

MATEMÁTICA BÁSICA 1



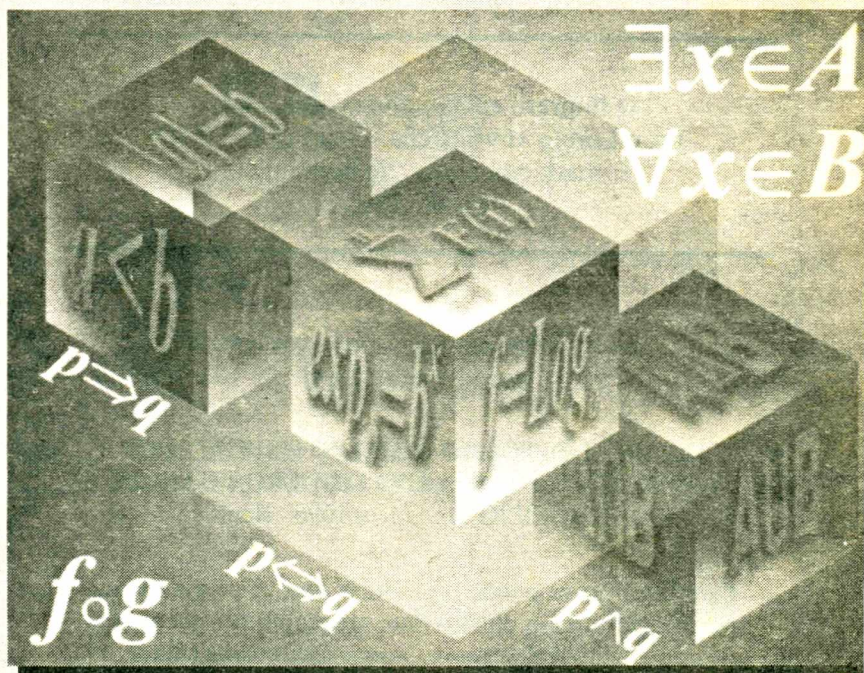
EDICIONES



R. FIGUEROA G.

MATEMÁTICA BÁSICA 1

R. FIGUEROA G.



Ediciones



LV
LibrosVirtual

LIMA - PER

MATEMÁTICA BÁSICA 1

Para Universidades y Centros de enseñanza superior

La Primera Edición de esta obra fué publicada en Abril de 1982, siendo renovada los años 1984 (2da. Edición), 1986 (3ra. Edición) y 1996 (6ta. Edición) permaneciendo vigente en las ediciones Sétima y Octava hasta la actualidad.

NOVENA EDICIÓN

Enero 2006

© Impreso en *Ediciones*



Jirón Loreto 1696 Breña - Telefax 423-8469

E-mail: ediciones_2@hotmail.com

Lima - Perú

Todos los derechos reservaciones conforme al

Decreto Ley N° 26905

HECHO EL DEPÓSITO LEGAL N° 15010599 - 2572
RAZÓN SOCIAL : **RICARDO FIGUEROA GARCÍA**
DOMICILIO : Jr. Loreto 1696 - Breña

Este libro no se puede reproducir total o parcialmente por ningún medio electrónico, mecánico o fotocopia u otros medios sin el previo y expreso permiso del autor.



PROLOGO

En la actualidad, en todas las disciplinas de estudio (carreras de ciencias, economía, ingeniería, administración, médicas, etc.) es evidente la necesidad de tener conocimientos básicos de las primeras áreas de las matemáticas (Álgebra, Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica).

Desafortunadamente, de la misma manera también es evidente que el interés por las matemáticas no responde a esta necesidad. Creo que en gran parte los responsables de este desinterés somos las personas que de una manera u otra tenemos que ver con el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este fué el motivo principal para la realización de esta obra.

Actualmente, el contenido científico de un libro no es la única preocupación de los autores. El aspecto didáctico con lo que se presenta el material es tan importante como el contenido mismo. Haciendo mía esta preocupación, el contenido de este libro está organizado de acuerdo con el sistema de instrucción personalizada, por lo cual los conceptos y propiedades que se presentan a lo largo de los 10 capítulos que consta la obra, (Lógica - Conjuntos - Relaciones y Funciones - Los Números Reales - Relaciones y Funciones en R^2 - Funciones Exponenciales y Logarítmicas - Inducción Matemática - Sucesiones - Los Números Complejos - Polinomios), están suficientemente motivados y reforzados con una cantidad amplia de ejemplos ilustrativos como de ejercicios propuestos, de tal manera que en todo el libro se presenten más de 900 ejemplos y 1800 ejercicios a todos los niveles de dificultad.

La obra pretende buscar un equilibrio entre lo formal y lo intuitivo, de tal forma que se prefirió, en algunos casos, ser menos riguroso de lo deseado si se pensaba que ésto produciría un mayor beneficio pedagógico; sin embargo, se trató de ser formal y preciso en la mayor medida posible.

Este libro está básicamente enfocado a cualquier persona que desee adquirir los fundamentos básicos de las matemáticas; así pienso que puede ser un buen auxiliar para los estudiantes que terminaron su educación secundaria como los del primer ciclo de las Escuelas Normales, Universidades y de cualquier curso cuyo objetivo sea capacitar a los estudiantes para iniciarse en los estudios de cursos superiores.

Aprovecho la oportunidad para expresar mi agradecimiento a todas la personas que tuvieron la gentileza de hacerme llegar sus valiosas observaciones a las primeras ediciones, pues sus críticas constructivas hicieron posible modificar el orden de algunos capítulos, agregar nuevos temas y mejorar la exposición de otros. Asimismo deseo expresar un especial reconocimiento a la Editorial AMERICA cuyo personal no ha escatimado esfuerzos para resolver las dificultades inherentes a la publicación del texto.

Una observación final. Se ha tenido especial cuidado en reducir las erratas lo más posible. Cada ejercicio propuesto fué resuelto minuciosamente, las respuestas que figuran en la parte final del libro fueron comprobadas más de una vez. Aun cuando todo autor sueña con producir el libro exento de errores ninguno ha logrado esa aspiración, al menos que yo sepa. Por tanto, agradecería que me hagan notar cualquier error que pueda haber persistido todavía.

Ricardo Figueroa García



CONTENIDO

1

LOGICA

1.1	Introducción. 1.2 Proposición	1
1.3	Proposiciones simples y compuestas	2
1.4	La Conjunción	4
1.5	La Disyunción	5
1.5.1	La Disyunción Inclusiva	6
1.5.2	La Disyunción Exclusiva. 1.6 La Negación	7
1.7	La Condicional o Implicación	9
1.7.1	Tabla de verdad de la Condicional o Implicación	9
1.7.2	El uso de las Proposiciones Implicativas	11
1.7.3	Proposición Recíproca	11
1.7.4	Proposición Inversa. 1.7.5 Proposición Contrarecíproca	12
1.8	La Bicondicional	12
1.9	Uso de los Signos de Agrupación	13
1.10	Evaluación de Esquemas Moleculares por la Tabla de Valores	19
1.11	Proposiciones Equivalentes	21
1.12	Otro uso de la Implicación	24
1.13	La Inferencia Lógica	27
1.13.1	El Método Abreviado	29
1.14	Principales Leyes Lógicas o Tautologías	33
1.14.1	Equivalencias Notables	34
1.14.2	Implicaciones Notables	43
1.15	La Demostración Matemática. 1.15.1 Demostración Directa	45
1.15.2	Demostración Indirecta	47
1.16	Circuitos Lógicos. 1.16.1 Circuitos en Serie	49
1.16.2	Circuitos en Paralelo	50

2

CONJUNTOS

2.1	Definición. 2.2 Notación	61
2.3	Determinación de un conjunto	62
2.4	Conjuntos Finitos e Infinitos. 2.5 Conjuntos Numéricos	63

2.6	Conjuntos Especiales	64
LOGICA CUANTIFICACIONAL		
2.7	Función Proposicional	66
2.8	Cuantificadores Universal y Existencial	67
2.9	Negación de Proposiciones que contienen Operadores Cuantificacionales	69
2.10	Funciones Lógicas que contienen más de una variable	71
2.11	Relaciones entre Conjuntos: Conjuntos Iguales. Conjuntos equivalentes	81
2.12	Representación Gráfica de los Conjuntos	85
2.13	Unión de Conjuntos. 2.13.1 Propiedades	89
2.14	Intersección de Conjuntos. 2.14.1 Propiedades	91
2.14.2	Propiedades Distributivas de la Unión e Intersección	93
2.14.3	Leyes de Absorción	94
2.15	Diferencia de Conjuntos. 2.15.1 Propiedades	94
2.16	Complemento de un Conjunto. 2.16.1 Propiedades	96
2.17	Diferencia Simétrica. 2.17.1 Propiedades	98
2.18	Número de elementos de un Conjunto. Propiedades	113

3

RELACIONES Y FUNCIONES

3.1	Introducción. 3.2 Par Ordenado	125
3.3	Producto Cartesiano	126
3.3.1	Propiedades del Producto Cartesiano	127
3.3.2	Diagonal de un Conjunto	129
3.3.3	Representación Geométrica del Producto Cartesiano	129
3.4	Relaciones Binarias	134
3.4.1	Dominio de una Relación. 3.4.2 Rango de una Relación	135
3.4.3	Propiedades del Dominio y Rango de una Relación	136
3.5	Relación Inversa o Recíproca. Propiedades	137
3.6	Composición de Relaciones. Propiedades	138
3.7	Relaciones definidas en un conjunto	139
3.8	Clases de Relaciones. 3.8.1 Relación Reflexiva	140
3.8.2	Relación Simétrica. 3.8.3 Relación Transitiva	141
3.8.4	Relación de Equivalencia	142
3.8.5	Relación Antisimétrica	143
3.8.6	Relación de Orden	144
3.9	FUNCIONES. 3.9.1 Dominio y Rango de una Función	154
3.9.2	Aplicaciones de A en B	155
3.9.3	Función Inyectiva o Univalente	161

3.9.4	Función Sobreyectiva o Suryectiva	162
3.9.5	Función Biyectiva	163
3.9.6	Composición de Funciones	164
3.9.7	Función Inversa	166
3.10	Operaciones Binarias Internas	172
3.10.1	Propiedades de las Operaciones Binarias Internas	174

4

NUMEROS REALES

4.1	Introducción. 4.2 Definición Axiomática de los Números Reales	185
4.3	Teoremas sobre la Adición	187
4.4	Teoremas sobre la Multiplicación	189
4.5	Aplicaciones de $\mathbb{R}$ en el Álgebra	193
4.5.1	Operaciones de Adición, Multiplicación y Cociente	193
4.5.2	n Potencia de un número real	197
4.5.3	Raíces y Radicales	203
4.5.4	Ecuaciones Cuadráticas	213
4.5.5	Ecuaciones reducibles a cuadráticas	222

ORDEN EN $\mathbb{R}$

4.6	Desigualdades	224
4.7	Teoremas Relativos a Desigualdades	224
4.8	Inecuaciones. 4.8.1 Inecuaciones Lineales	237
4.8.2	Inecuaciones Cuadráticas	239
4.8.3	Inecuaciones Racionales	241
4.9	La Recta Real	245
4.10	Intervalos	246
4.11	Operaciones con Intervalos	248
4.12	Resolución Gráfica de Inecuaciones en $\mathbb{R}$	256
4.13	Inecuaciones Polinómicas	258
4.14	Ecuaciones e Inecuaciones con Radicales	265
4.14.2	Inecuaciones con Radicales	267
4.15	Valor Absoluto. 4.15.1 Teoremas sobre Valor absoluto	276
4.15.2	Ecuaciones con Valor Absoluto	286
4.15.3	Inecuaciones con Valor Absoluto	287
4.16	El Máximo Entero de un Número Real	299
4.16.1	Teoremas sobre el Máximo Entero de un Número Real	300



RELACIONES Y FUNCIONES EN $\mathbb{R}^2$

RELACIONES DEFINIDAS DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

5.1	El Producto Cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	313
5.2	Distancia entre dos puntos	315
5.3	Gráficas de Relaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$	315
5.3.1	Gráficas de Relaciones Lineales	317
5.3.2	Gráficas de relaciones de la forma: $x^2+y^2=r^2$ o $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	317
5.3.3	Gráficas de las relaciones de la forma: $y=ax^2+bx+c$	320
5.3.4	Gráficas de las relaciones de la forma: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	323
5.3.5	Gráficas de las relaciones de la forma: $Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0$	324
5.3.6	Gráficas de relaciones con valor absoluto	325
5.3.7	Gráficas de relaciones definidas por inecuaciones	331
	I) Desigualdades Lineales. II) Desigualdades Cuadráticas	337
5.3.8	Gráficas de relaciones inversas	341
5.3.9	Criterios generales para graficar una relación	351

FUNCIONES EN $\mathbb{R}^2$

5.4	Funciones reales de variable real	359
5.5	Gráfica de una función. 5.5.1 Propiedades	360
5.6	Cálculo del dominio y rango	362
5.7	Funciones Especiales. 5.7.1 Función Identidad 5.7.2 Función Constante	366
5.7.3	Función Lineal. 5.7.4 Función Cuadrática	367
5.7.5	Función Raíz Cuadrada	369
5.7.6	Función Polinómica de grado n	370
5.7.7	Función Racional	370
5.7.8	Funciones Seccionadas	371
5.7.9	Función Escalón Unitario	372
5.7.10	Función Signo	373
5.7.11	Función Valor Absoluto	374
5.7.12	Función Máximo Entero	376
5.7.13	Funciones Pares	382
5.7.14	Funciones Impares. 5.7.15 Funciones Periódicas	383
5.8	Álgebra de las Funciones	397
5.9	Composición de Funciones	409
5.10	Funciones Crecientes y Decrecientes	421
5.11	Función Inyectiva o Univalente	422
5.12	Función Sobreyectiva	426

5.13	Función Biyectiva	427
5.14	Función Inversa	428
5.14.1	Propiedades de la Función Inversa	429
5.15	Imagen Directa de un Conjunto. Propiedades	445
5.16	Imagen Inversa de un Conjunto. Propiedades	447

6

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

6.1	La Función Exponencial	454
6.2	Logaritmos	457
6.2.1	Propiedades Fundamentales de los Logaritmos	459
6.3	La Función Logaritmo	468
6.4	Ecuaciones Exponenciales	473
6.5	Ecuaciones Logarítmicas	477
6.6	Inecuaciones Exponenciales	483
6.7	Inecuaciones Logarítmicas	487

7

INDUCCION MATEMATICA

7.1	Introducción. 7.2 Principio del Buen Orden	499
7.3	Principio de Inducción Completa	500
7.4	Definiciones Recursivas	504
7.5	Sumatorias	509
7.6	Propiedades de las Sumatorias	513
7.7	Formulas importantes de las Sumatorias	514
7.8	Notación de producto de los terminos de una sucesión	518
7.9	Propiedades de $\prod_{i=1}^n f(i)$	519
7.10	Binomio de Newton	523
7.10.1	Propiedades del Coeficiente Binomial	524
7.10.2	El Teorema del Binomio	525

8

SUCESIONES

8.1	Introducción	537
8.2	Sucesiones Aritméticas y Geométricas	539
8.3	Sucesiones Monótonas	545
8.4	Límite de una Sucesión	548
8.5	Teoremas sobre Límites	551
8.6	Series Infinitas	559

9

NUMEROS COMPLEJOS

9.1	Introducción. 9.2 El Sistema de Números Complejos	565
9.3	Propiedades de la Adición	566
9.4	Propiedades de la Multiplicación	568
9.5	$\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$	570
9.6	Forma cartesiana de un número complejo	571
9.7	Representación geométrica de los números complejos	573
9.8	Conjugado de un número complejo. Propiedades	574
9.9	Módulo de un número complejo. Propiedades	582
9.10	La raíz cuadrada de un número complejo	584
9.11	Lugares Geométricos en $\mathbb{C}$	589
9.12	Forma polar de un número complejo	602
9.13	Operaciones en la forma polar 9.13.1 Multiplicación. Interpretación Geom.	603
9.13.2	Cociente. Interpretación Geométrica	604
9.14	Potenciación de números complejos. El Teorema de Moivre	608
9.15	Radicación de números complejos	611
9.15.1	Ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos	613
9.15.2	Raíces primitivas de la unidad	614
9.16	La exponencial compleja. 9.16.1 Propiedades	616
9.16.2	Operaciones en la forma exponencial compleja	618

10

POLINOMIOS

10.1	Definición y Notaciones. 10.2 Igualdad de polinomios	637
10.3	Suma y Multiplicación de polinomios	638
10.4	Algoritmo de la división	639

10.5	La división Sintética	642
10.6	Teorema del Resto	645
10.7	Teorema del Factor	646
10.8	Raíces de un Polinomio	655
10.8.1	Número de raíces de una ecuación polinómica	655
10.8.2	Multiplicidad de un factor	656
10.8.3	Naturaleza de las raíces de un polinomio real	656
	Teorema 10.8. Regla de los signos de Descartes	659
10.8.4	Raíces racionales de un polinomio	661
	Teorema 10.10. Teorema del Valor Intermedio	663
10.9	Acotación de Raíces	666
10.10	Relación entre las raíces y los coeficientes	674

Respuestas a Ejercicios Propuestos

682

LISTA DE SIMBOLOS

	Pag.		Pag.		
$\wedge$	Conjunción "y"	4	$\mathbb{Z}$	Conjunto de núm. enteros	63
$\vee$	Disyunción Inclusiva "o"	6	$\mathbb{Q}$	Conjunto de núm. racionales	64
Δ	Disyunción exclusiva	7	$\mathbb{I}$	Conjunto de núm. irrac.	64
Δ	Discriminante	215	$\mathbb{R}$	Conjunto de núm. reales	64
$\sim$	Negación	7	$\mathbb{C}$	Conjunto de núm. complejos	64
$\Rightarrow$	Implicación, entonces	9	$\emptyset$	Conjunto vacío o nulo	64
$\Leftrightarrow$	Bicondicional; si y sólo si	12	$\mathbb{U}$	Conjunto universal	65
$\equiv$	Equivalente	21	$\forall$	Para todo	67
$\ncong$	No es equivalente	22	$\exists$	Existe	68
$\nRightarrow$	No implica	24	$\subset$	Es subconjunto de:	82
$\therefore$	Por lo tanto	28	$\supset$	Incluye a:	82
$<$	Menor que	46-186	$\not\subset$	No es subconjunto de:	82
$>$	Mayor que	47-186	$P(A)$	Conjunto potencia de A	84
$\leq$	Menor o igual que	224	$\cup$	Unión	89
$\geq$	Mayor o igual que	224	$\cap$	Intersección	91
$\{.. \}$	Conjunto	61	A'	Complemento del conj. A	96
$\in$	Pertenece, es elemento de.	62	$A \Delta B$	Diferencia simétrica de los conjuntos A y B	98
$\notin$	No pertenece	62	$n(A)$	Número de elementos de A	113
$\mathbb{N}$	Conjunto de núm. naturales	63			

aRb	a está relacionado con b	134
$\text{Dom}(R)$	Dominio de la relación R	135
$\text{Ran}(R)$	Rango de la relación R	135
R^{-1}	Relación inversa de R	137
$R \circ S$	Relación compuesta de S por R.	138
$f: A \rightarrow B$	f es una función de A en B.	154
$\text{Dom}(f)$	Dominio de la función f	154
$\text{Ran}(f)$	Rango de la función f	154
$g \circ f$	Función compuesta de f por g.	409-164
f^{-1}	Función Inversa de f	167
$\langle a, b \rangle$	Intervalo Abierto	247
$[a, b]$	Intervalo cerrado	247
$\langle -\infty, +\infty \rangle$	Intervalo infinito	248
$ a $	Valor Absoluto de a	276
$ $	Función Valor Absoluto	314
$\llbracket x \rrbracket$	Máximo entero no mayor que x.	299
R^2	Plano Cartesiano	313
I	Función Identidad	366
$\exp_b$	Función Exponencial	455
$\log_b$	Función Logaritmo	468

Σ	Sumatoria	509
Π	Notación de producto	518
$n!$	Factorial de n	523
$\binom{n}{r}$	Coficiente binomial o número combinatorio	523
$\{a_n\}$	Sucesión	538
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Límite de la sucesión $\{a_n\}$ cuando n tiende a ∞	549
$i=(0,1)$	Unidad compleja	571
$\text{Re}(z)$	Parte real de z	572
$\text{Im}(z)$	Parte imaginaria de z	572
$\bar{z}$	Conjugado complejo	574
$ z $	Módulo del complejo z	582
$\theta = \text{Arg}(z)$	Argumento de z	602
$\exp(z) = e^z$	Exponencial compleja	616
$P(z)$	Polinomio de variable compleja	638
$P(x)$	Polinomio de variable real	638



CAPITULO 1

LOGICA

1.1 INTRODUCCION

Lógica es el estudio de los procesos válidos del razonamiento humano. Existen dos tipos importantes de razonamiento: el **inductivo** y el **deductivo**. El razonamiento inductivo es el medio por el cual una persona, en base de sus experiencias específicas, decide aceptar como válido un principio general. El razonamiento deductivo es, en cambio, el medio según el cual dicha persona utiliza el principio general aceptado previamente para decidir sobre la validez de una idea, que a su vez habra de determinar el curso de su acción.

Dado que las proposiciones son preceptos válidos de razonamiento deductivo en nuestro breve estudio, veremos lo esencial de la lógica proposicional, a través del uso y manejo de una simbología adecuada.

1.2 PROPOSICION

Una **proposición** es un enunciado cuya propiedad fundamental es la de ser verdadera (V) o falsa (F), pero no ambas simultáneamente.

Una proposición se representa simbólicamente por letras minúsculas tales como: p , q , r , etc (llamadas variables proposicionales). Cuando se trata de representar muchas proposiciones similares se usan subíndices para indicar cada una de ellas, esto es,

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Si $P(x)$, que se lee "P de x", es un polinomio en x , su valor numérico para $x=a$ se escribe $P(a)$, y se lee "P de a". Por ejemplo, si el polinomio dado es $P(x)=x^2-3x+4$ y se toma $a=2$, se obtiene: $P(a)=(2)^2-3(2)+4$, es decir:

$$P(a)=2$$

Análogamente, también expresaremos simbólicamente el hecho de que una pro-

posición sea verdadera o falsa. Si p es una proposición, su valor de verdad se denotará con $V(p)$ y escribiremos:

$$V(p)=V$$

y se queremos expresar que es falsa escribiremos:

$$V(p)=F$$

Ejemplos:

Proposición	Valor de verdad
a) p : César Vallejo nació en París	$V(p)=F$
b) q : $2+3 < 10-3$	$V(q)=V$
c) r : El número 1331 es divisible por 11	$V(r)=V$
d) t : Todos los hombres no son mortales	$V(t)=F$

Observaciones:

1. Aquellos enunciados que indican una pregunta, una orden o una exclamación, son expresiones no proposicionales.

Ejemplos:

- a) ¿Qué edad tienes?
- b) ¡Viva el Perú!
- c) Prohibido fumar

2. Los enunciados que usan las palabras "él", "ella" y los símbolos x, y, z , no tienen la propiedad de ser verdadero o falso, es decir, no son proposiciones. Sin embargo, si a una de estas palabras y símbolos se le asigna un determinado objeto o valor, llamado **constante**, el resultado es una proposición. A este tipo de enunciados se les denomina **enunciados abiertos**.

Ejemplos:

- a) El está jugando tenis
- b) $x+2 > 5$
- c) $2x+3y=8$

Así en a), si la variable él se reemplaza por la constante Fernando tenemos "Fernando está jugando tenis", que es una proposición cuyo valor de verdad V o F dependen de que si Fernando esté jugando o no.

De igual manera en b), si la variable x se reemplaza por un número mayor que 3 el enunciado se convierte en una proposición verdadera, o si el reemplazo se hace por un número menor que 3, la proposición resulta falsa.

1.3 PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS



Las proposiciones simples, llamadas también **atómicas** o **elementales**, son

aquellos enunciados que tienen un solo sujeto y un solo predicado. El valor de verdad V o F de estas proposiciones se obtienen de la disciplina o suceso de donde provienen.

Ejemplos:

(1) p : El ángulo recto mide 90°

$V(p)=V$, por los conceptos de la geometría elemental.

(2) q : Carlos Marx es autor de la Iliada.

$V(q)=F$, pues, según la historia, Homero es autor de la Iliada.

(3) r : "7 es un número primo"

$V(r)=V$, porque la aritmética así lo establece.

Las proposiciones compuestas, llamadas también **moleculares o coligativas** son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples. El valor de verdad de la proposición compuesta depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones componentes, sin que esta dependencia de verdades tenga que ver con la naturaleza, la significación o la estructura de las proposiciones componentes. Por esta propiedad, a las proposiciones compuestas se les llama también **funciones veritativas**.

En la composición de proposiciones simples, estas están ligadas por ciertas palabras tales como "y", "o", "si, entonces", "si y sólo si", "no", "pero" etc. Estas constantes proposicionales son llamados **conectivos lógicos**.

Ejemplos:

- 1) La proposición "El terreno es muy fértil y hay suficiente lluvia", es la compuesta de las proposiciones atómicas "El terreno es muy fértil", "Hay suficiente lluvia".
- 2) La proposición: "La luna no es satélite de la tierra", es una proposición molecular que utiliza el conectivo "no". En este caso, el término de enlace actúa solo sobre una proposición atómica: "La luna es satélite de la tierra".
- 3) La proposición: "Si estamos en diciembre entonces llegará la navidad", usa el conectivo "si..., entonces" que actúa sobre las proposiciones simples "Estamos en diciembre", "Llegará la navidad".

Observación. Dado que el valor de una proposición molecular depende únicamente de los valores de verdad de las proposiciones componentes, el número de combinaciones para el valor de verdad de aquella es 2^n , donde n es el número de enunciados que tiene la proposición compuesta.

Así, para dos proposiciones simples p y q , las posibilidades de combinación de V o F son $2^2=4$ formas posibles. Para tres proposiciones simples p , q y r ($n=3$) tenemos: $2^3=8$ formas posibles.

OPERACIONES CON PROPOSICIONES

Así como en aritmética y en álgebra se estudian operaciones entre números, en lógica se estudian operaciones entre proposiciones. La operación aritmética de suma de dos números 3 y 5, por ejemplo, hace corresponder a un nuevo número 8 que es su suma mediante la igualdad: $3+5=8$; es decir, escribir " $3+5$ " significa lo mismo que escribir "8". Vamos a proceder análogamente para definir las operaciones entre proposiciones.

1.4 LA CONJUNCION

Dadas dos proposiciones p y q , la conjunción es el resultado de componer estas proposiciones con el conectivo lógico "y". Se denota por el símbolo " $\wedge$ ", se escribe " $p \wedge q$ " y se lee " p y q ".

Ejemplo. Sean las proposiciones: p =La tiza es blanca

q =6 es un número primo

A partir de estas proposiciones simples obtenemos la nueva proposición uniéndolas mediante la conjunción "y".

r =La tiza es blanca y 6 es un número primo

Aquí podemos observar que $V(p)=V$ y $V(q)=F$, entonces $V(r)=F$, ya que la conjunción "y" exige el cumplimiento de ambas componentes, sin excepción.

En consecuencia, la regla práctica para conjunciones es:

La proposición conjuntiva es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones coligativas p y q son verdaderas, en cualquier otro caso es falsa.

Esta característica es válida para toda conjunción y se puede resumir en la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 2. Determinar el valor de verdad de la proposición:

$$r: "2+3+5=11 \text{ y } 4+8 > 5+6"$$

Solución. Sean $p: 2+3+5=11 \rightarrow V(p)=F$

$$q: 4+8 > 5+6 \rightarrow V(q)=V$$

Luego, según la tabla de verdad de la conjunción:

$$V(r) = V(p \wedge q) = F$$

EJEMPLO 3. Determinar el valor de verdad de la proposición:

$$r: "7 \text{ es un número par y no es mayor que } 5"$$

Solución. A simple vista, la conjunción es falsa, pues si:

$$p: 7 \text{ es un número par} \rightarrow V(p) = F$$

$$q: 7 \text{ no es mayor que } 5 \rightarrow V(q) = F$$

entonces, según la tabla de verdad de la conjunción:

$$V(r) = V(p \wedge q) = F$$

Nota. Hay palabras como "pero", "a la vez", "sin embargo", "además", "aunque", "no obstante", etc, que también unen proposiciones conjuntivamente y se pueden simbolizar por el conectivo " $\wedge$ ".

EJEMPLO 4. Determinar el valor de verdad de la proposición:

$$r: "15 \text{ es múltiplo de } 3, \text{ pero } 5 \text{ no es mayor que } 7".$$

Solución. Sean: $p: 15 \text{ es múltiplo de } 3 \rightarrow V(p) = V$

$$q: 5 \text{ no es mayor que } 7 \rightarrow V(q) = V$$

Luego, según la tabla de verdad de la conjunción:

$$V(r) = V(p \wedge q) = V$$

1.5 LA DISYUNCION

Se llama *disyunción* o *suma lógica* de las proposiciones p y q , dadas en ese orden, a la proposición que se obtiene enunciando q a continuación de p unidas ambas por el conectivo "o", esto es: " p o q ".

Ejemplos:

a) La proposición: "La luna es azul o 3 es un número primo" es la disyunción

$$\text{de: } p: \text{La luna es azul} \rightarrow V(p) = F$$

$$q: 3 \text{ es un número primo} \rightarrow V(q) = V$$

Aquí, podemos decir que la disyunción p o q es verdadera, pues el uso habitual del conectivo "o" establece una **alternativa**: alguna de las dos compo-

nentes se cumple. Como es cierto que 3 sea un número primo, no importa que la luna no sea azul, ya que una de las dos componentes de la alternativa es verdadera. En este caso podemos escribir, entonces: $V(\text{poq})=V$.

b) La proposición: Luis es ingeniero o profesor de matemáticas, es la disyunción de:
 $r = \text{Luis es ingeniero}$
 $s = \text{Luis es profesor de matemáticas}$

c) La proposición: "César Vallejo nació en el Perú o nació en Francia", es la disyunción de: $t = \text{"César Vallejo nació en el Perú"}$
 $u = \text{"César Vallejo nació en Francia"}$

En el ejemplo b) se observa que si $V(r)=F$ y $V(s)=F \rightarrow V(\text{ros})=F$. Sin embargo cuando las componentes son ambas verdaderas, la disyunción admite dos usos diferentes del conectivo "o", uno inclusivo y el otro exclusivo.

Así en el ejemplo b), si $V(r)=V$ o $V(s)=V \rightarrow V(\text{ros})=V$. En este caso hemos usado el "o" inclusivo, pues la verdad de que Luis sea ingeniero no excluye la posibilidad de que sea profesor de matemáticas.

En cambio, en el ejemplo c) la verdad de que César Vallejo naciera en el Perú excluye la posibilidad de que naciera en Francia y viceversa. En este caso hemos usado el "o" exclusivo y si $V(t)=V$ ó $V(u)=V \rightarrow V(\text{tou})=F$

Estas consideraciones ilustran la necesidad de distinguir dos interpretaciones para la disyunción "poq".

1.5.1 LA DISYUNCION INCLUSIVA

Dadas dos proposiciones p y q , la disyunción inclusiva o débil, es una proposición coligativa que resulta de unir las proposiciones p y q con el conectivo "o", el cual se denota por el símbolo " $\vee$ ", se escribe " $p \vee q$ " y se lee "poq". La regla práctica es:

La disyunción inclusiva de dos proposiciones es verdadera si y sólo si por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera, resultando falsa solamente cuando las dos son falsas".

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.5.1 LA DISYUNCION EXCLUSIVA

En este caso, la palabra "o" suele usarse en su sentido excluyente, en cuyo caso la conectiva proposicional se simboliza por " Δ ", se llama disyunción exclusiva o fuerte, se escribe $p \Delta q$ y se lee "p o q pero no ambos", esto es, se da exactamente una de las dos alternativas.

La regla práctica es:

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si y sólo si por lo menos una de las dos proposiciones componentes es verdadera y no las dos, resultando falsa en otros casos.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.6 LA NEGACION

Se denomina proposición negativa de la proposición afirmativa "p" a otra que se denota por " $\sim p$ " y que se lee "no p" o "no es cierto que p" y cuya verdad o falsedad queda determinada por la siguiente tabla:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observamos que si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso, y viceversa. Es decir, el valor de la negación de un enunciado es siempre opuesto del valor de verdad del enunciado. Lo importante de la proposición negativa es que su valor de verdad depende del valor de verdad de la afirmación

Observación. Nótese que la negación es una operación unitaria, en el sentido de que asigna a una proposición p, otra proposición $\sim p$. En cambio, la conjunción y la disyunción son operaciones binarias, en el sentido de que a cada dos proposiciones p y q, asignan una nueva proposición.

- EJEMPLO 1.**
- La tisa es blanca
 - No es cierto que la tisa es blanca

c) La tisa no es blanca

d) La tisa es azul

Como se puede notar b) y c) son cada uno la negación de a), en cambio d) no es la negación de a).

Otras formas de expresar la negación es utilizando los términos "no es el caso que", "es falso que", etc.

En estos casos generalmente la negación niega proposiciones compuestas y simbólicamente se expresa por $\neg(\dots)$

EJEMPLO 2. Simbolizar la siguiente proposición:

"No es el caso de que 10 sea múltiplo de 3 o que $5+2 < 10$ ".

Solución. Si $p = 10$ es múltiplo de 3, y $q = 5+2 < 10$;

entonces la proposición se simboliza: $\neg(p \vee q)$

EJEMPLO 3. Sean las proposiciones: $p = "3$ es un número par", $q = "5$ es mayor que 2" y $r = "Todo$ número primo es impar". Escribir y establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $\neg(p \wedge q)$ b) $\neg q \vee r$ c) $\neg(\neg r \wedge p) \vee \neg q$

Solución. El valor de verdad de cada proposición simple es:

$$V(p)=F, \quad V(q)=V, \quad V(r)=F$$

Según estos valores de verdad, se tiene:

d) $\neg(p \wedge q)$: "No es cierto que 3 es un número par y 5 es mayor que 2".

Ahora bien, $V(p \wedge q)=F \rightarrow V[\neg(p \wedge q)]=V$

b) $\neg q \vee r$: "No es cierto que 5 es mayor que 2 ó todo número primo es impar" o bien: "5 no es mayor que 2 ó todo número primo es impar".

$V(\neg q)=F$ y $V(r)=F \rightarrow V(\neg q \vee r)=F$ (Según la tabla de la disyunción).

c) $\neg(\neg r \wedge p) \vee \neg q$: "No es cierto que no todo número primo es impar y 3 es un número par, o 5 no es mayor que 2".

$V(\neg r \wedge p)=V(V \wedge F)=F \rightarrow V[\neg(\neg r \wedge p)]=V$. Luego: $V(c)=(V \vee F)=V$

Nota. En adelante, para considerar el valor de verdad de una disyunción se ha de tener en cuenta que se ha utilizado el sentido incluyente de la palabra "o", es decir, " p o q " significará " $p \vee q$ ".

1.7 LA CONDICIONAL O IMPLICACION

Dadas las proposiciones p y q , se denomina *proposición condicional o implicativa* a la que resulta de unir p y q por el conectivo "si,...,entonces" que se denota por el símbolo " $\rightarrow$ ", se escribe " $p \rightarrow q$ " y se lee "si p , entonces q ", " p implica q ", " p sólo si q ", " q , si p ", etc, en donde p es el *antecedente o condición* y q es el *consecuente o conclusión*.

EJEMPLO 1. "Si Patricia consigue visa de turista, entonces viajará a Miami". Simbolizar la proposición.

Si p =Patricia consigue visa de turista, y

q =Patricia viajará a Miami

La proposición se simboliza: $p \rightarrow q$

Nota. También son conectivos condicionales los términos: "porque", "puesto que", "ya que", "si", "cuando", "cada vez que", etc. Todas se caracterizan porque después de cada uno de estos conectivos está el antecedente o condición.

EJEMPLO 2. "16 es múltiplo de 2 puesto que 16 es un número par".

Si p = 16 es múltiplo de 2 (antecedente), y

q = 16 es número par (consecuente)

Se simboliza: $q \rightarrow p$

que expresamos: "Si 16 es un número par, entonces es múltiplo de 2"

EJEMPLO 3. "Arturo no viajó a Europa porque perdió sus documentos".

Si p = Arturo no viajó a Europa (antecedente) y

q = Arturo perdió sus documentos (consecuente)

Se simboliza: $q \rightarrow p$

que expresamos: "Si Arturo perdió sus documentos, entonces no viajó a Europa."

1.7.1 TABLA DE VERDAD DE LA CONDICIONAL

Antes de dar la tabla de verdad para la implicación, consideremos la siguiente proposición:

r = "Si Luis obtiene un promedio de 15 o más, entonces se le otorgará beca".

Aquí se trata de la implicación de las proposiciones:

p = Luis obtiene un promedio de 15 o más (antecedente).

$q = A$ Luis se le otorgará beca (consecuente)

Nos interesa inducir el valor de verdad de la condicional r en términos de la V o F de las proposiciones p y q . El enunciado r puede pensarse como una promesa, condicionado por p , y podemos asociar su verdad al cumplimiento de la promesa. Veamos todas las posibilidades.

- a) Si Luis obtiene 15 o más de promedio y se le otorga beca se habrá cumplido lo prometido. $V(p)=V$ y $V(q)=V \rightarrow V(r)=V$
- b) Si Luis obtiene 15 o más de promedio y no se otorga beca, no se habrá cumplido lo prometido. $V(p)=V$ y $V(q)=F \rightarrow V(r)=F$
- c) Si Luis obtiene un promedio menor que 15 y se otorga beca, no se falta a la promesa. $V(p)=F$ y $V(q)=V \rightarrow V(r)=V$
- d) Si Luis obtiene un promedio menor que 15 y no se le otorga beca, se sigue cumpliendo lo prometido. $V(p)=F$ y $V(q)=F \rightarrow V(r)=V$

Entonces el valor de verdad de $p \rightarrow q$ queda establecido de acuerdo a la siguiente regla:

La condicional o implicación tendrá un valor de verdad falso cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso; en los demás casos diremos que $p \rightarrow q$ es verdadero.

En consecuencia, la tabla de verdad de la implicación es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 4. Dadas las proposiciones p, q y r tales que $V(p)=V(q)=F$ y $V(r)=V$, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $p \rightarrow \neg(q \vee r)$ c) $\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge p)$
 b) $\neg q \rightarrow (\neg p \vee r)$ d) $\neg(q \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$

Solución. a) $V(q \vee r) = V(F \vee V) = V \rightarrow V[\neg(q \vee r)] = F \therefore V[p \rightarrow \neg(q \vee r)] = V(F \rightarrow F) = V$

b) $V(\neg q) = V$ y $V(\neg p \vee r) = V(V \vee V) = V \therefore V[\neg q \rightarrow (\neg p \vee r)] = V(V \rightarrow V) = V$

c) $V(p \wedge \neg q) = V(F \wedge V) = F \rightarrow V[\neg(p \wedge \neg q)] = V$; $V(\neg r \wedge p) = V(F \wedge F) = F$

$\therefore V[\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge p)] = V(V \rightarrow F) = F$

d) $V(q \rightarrow \neg r) = V(F \rightarrow F) = V \rightarrow V[\neg(q \rightarrow \neg r)] = F$; $V(\neg p \rightarrow r) = V(F \rightarrow V) = V$

$$\bar{V} \{ \bar{V}(q \rightarrow \bar{V}r) \rightarrow (\bar{V}p \rightarrow r) \} = V(F \rightarrow V) = V$$

1.7.2 EL USO DE LAS PROPOSICIONES IMPLICATIVAS



El uso de las proposiciones implicativas en matemáticas es de suma importancia. Ya hemos visto que la condicional $p \rightarrow q$ significa que "q se obtiene lógicamente de p". Los teoremas tienen esta misma forma condicional. Recordemos que en la demostración de un teorema intervienen dos factores: la **hipótesis** o dato (p), aquello que se considera verdadera, y la **tesis** o conclusión (q), aquello que se quiere demostrar. Entonces el teorema es: $p \rightarrow q$. Probar el teorema, es demostrar que $p \rightarrow q$ sea verdadera, y, dado que la hipótesis p es verdadera; es decir, la verdad de $p \rightarrow q$ se obtiene de la verdad de q, sabiendo que p es verdadera.

Otras formas de leer el teorema $p \rightarrow q$ son las siguientes: "p sólo si q"; "q, si p"; "p es condición suficiente para que q"; "q es condición necesaria para que p", etc.

EJEMPLO 5. Sean las proposiciones: p="Dos ángulos tienen un lado común".

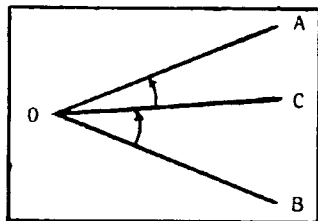
q="Dos ángulos son adyacentes". Establecer quién es condición necesaria y/o suficiente para quién.

Solución. Consideremos las implicaciones siguientes:

$r = p \rightarrow q$: Si dos ángulos tienen un lado común, entonces son adyacentes.

$s = q \rightarrow p$: Si dos ángulos son adyacentes, entonces, tienen un lado común.

La implicación r es falsa, pues si dos ángulos tienen un lado común, no necesariamente son ad yacentes. En la figura se observa que el $\angle AOB$ y el $\angle BOC$ tienen el lado común OB, sin embargo no son adyacentes; entonces, p no es suficiente para q ó q no es condición necesaria para p. La implicación s es verdadera, pues en la figu



ra se observa que el $\angle AOC$ y el $\angle BOC$ son adyacentes y tienen el lado común OC. Entonces, q es suficiente para p ó p es necesariamente de q.

Nota. A toda condicional se le asocian otras tres proposiciones, igualmente importantes, que son: la recíproca, la inversa y la contra recíproca.

1.7.3 Proposición Recíproca. Dada la proposición condicional " $p \rightarrow q$ ", se

llama **proposición recíproca** a la proposición que se denota por " $q \rightarrow p$ ".

Ejemplo. Sea la proposición directa $p \rightarrow q$

"Si x es par, entonces, x es múltiplo de 2"

La proposición recíproca, $q \rightarrow p$, es:

"Si x es múltiplo de 2, entonces, x es par"

1.7.4 Proposición Inversa. Dada la proposición condicional " $p \rightarrow q$ ", se llama **proposición inversa** a la proposición que se denota por " $\sim p \rightarrow \sim q$ ".

Ejemplo. Sea la proposición directa $p \rightarrow q$

"Si Patricia tiene 30 años, entonces es joven"

La proposición inversa, $\sim p \rightarrow \sim q$, es:

"Si Patricia no tiene 30 años, entonces no es joven"

1.7.5 Proposición Contra recíproca. Dada la proposición condicional " $p \rightarrow q$ " se llama **proposición contra recíproca** a la que se denota por " $\sim q \rightarrow \sim p$ ".

Esta proposición es de mucha utilidad en la demostración de teoremas dados por la **reducción al absurdo** o **falsa suposición**.

Ejemplo. Sea la proposición directa " $p \rightarrow q$ "

"Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta, entonces son paralelas".

La proposición contra recíproca, " $\sim q \rightarrow \sim p$ ", es:

"Si dos rectas no son paralelas, entonces no son perpendiculares a una misma recta".

1.8 LA BICONDICIONAL



Sean p y q dos proposiciones con las que se forma la siguiente proposición: " $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$ "

Esta nueva proposición está formada mediante dos implicaciones y una conjunción. Podemos escribir esta proposición haciendo uso de un nuevo conectivo; la escribiremos como:

$$p \leftrightarrow q$$

El símbolo $\leftrightarrow$ es llamado el **conectivo bicondicional** o **doble implicación**. A la proposición formada la llamamos **proposición bicondicional**. Formalizando esto último llegamos a la siguiente definición:

Dada dos proposiciones simples p y q , se denomina **bicondicional** a la proposición definida por la **conjunción de la proposición condicional con su recí**

proca:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

se denota " $p \leftrightarrow q$ " y se lee "p si y sólo si q"

EJEMPLO. "Fernando comprará un automóvil si y sólo si obtiene un préstamo de la cooperativa"

Si p Fernando comprará un automóvil.

q Fernando obtiene un préstamo de la cooperativa.

Esta proposición bicondicional se entiende como: "Si Fernando compra un automóvil entonces obtiene un préstamo de la cooperativa, y si obtiene un préstamo de la cooperativa compra un automóvil. Si simbolizamos esta proposición obtenemos:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = p \leftrightarrow q$$

En consecuencia, la tabla de verdad de la bicondicional queda perfectamente determinada a partir de las tablas de verdad de la condicional y la conjunción; esto es:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Concluimos afirmando que el valor de verdad de la proposición bicondicional está dado por la siguiente regla:

Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces la bicondicional $p \leftrightarrow q$ es verdadera, y si p y q tienen valor de verdad opuestos, entonces $p \leftrightarrow q$ es falsa.

1.9 USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACION

Los signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves) se usan en lógica cuando se trata de obtener esquemas lógicos más complejos con el fin de evitar la ambigüedad de las fórmulas. Así, por ejemplo, la expresión:

$$p \vee q \wedge r$$

es ambigua; pero asociada por sus términos:

$$(p \vee q) \wedge r \quad \text{ó} \quad p \vee (q \wedge r)$$

la expresión dada tiene un sentido y deja de ser ambigua.

Otra finalidad de los signos de agrupación es darle mayor o menor jerarquía a los conectivos. En general, " $\sim$ " es la conectiva de menor jerarquía, le sigue " $\wedge$ ", " $\vee$ " que son de igual jerarquía, y luego " $\rightarrow$ " que es el de mayor jerarquía. Sin embargo, cada conectiva puede ser de mayor jerarquía si así lo indica el signo de colección.

Ejemplos: (1) "No es el caso de que 9 es múltiplo de 3 o que $2 \times 8 = 15$ ".

Asignándole una variable a cada proposición simple se tiene

$$p = 9 \text{ es múltiplo de } 3 ; q = 2 \times 8 = 15$$

Su notación simbólica es: $\sim(p \vee q)$

Nótese que aquí la negación afecta a las variables dentro del paréntesis.

(2) "Si el testigo no dice la verdad, entonces Juan es inocente o culpable"

Si p = "El testigo dice la verdad", q = "Juan es inocente" y

r = "Juan es culpable"; entonces se simboliza:

$$\sim p \rightarrow (q \vee r)$$

Aquí, el símbolo de mayor jerarquía es " $\rightarrow$ ". Obsérvese que " $\sim$ " solo afecta a la variable " p " y que " $\vee$ " está limitado por el paréntesis.

Observación. La combinación de las variables y los operadores o conectivos proposicionales por medio de los signos de los signos de agrupación se denomina **esquema molecular**. En cada esquema molecular solo uno de los operadores es el de mayor jerarquía y es el que le da nombre a dicho esquema. Por ejemplo, en los esquemas moleculares:

$$A = \sim p \rightarrow (q \vee r) ; B = [(p \wedge q) \vee \sim r] \leftrightarrow p ; C = \sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee r)]$$

Podemos notar que los operadores de mayor jerarquía en A , B y C son: " $\rightarrow$ ", " $\leftrightarrow$ " y " $\sim$ " y los nombres que llevan cada uno de estos esquemas son: esquema condicional, esquema bicondicional y esquema negativo, respectivamente.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Para los siguientes enunciados:

(1) Recoge ese lápiz

(3) $x - y = 5$

(2) $2 + 5 < 6$

(4) Hace mucho frío

Cuál de alternativas siguientes es la correcta?

a) Dos son proposiciones

b) Dos son enunciados abiertos

c) Dos no son ni proposiciones ni enunciados abiertos

d) Tres son proposiciones

Solución. (1) Recoge ese lápiz, es un mandato que no tiene un valor de ver-

dad, entonces no es proposición ni enunciado abierto.

(2) $3+5 < 6$, es una proposición cuyo valor de verdad es F.

(3) $x-y = 5$, es un enunciado abierto.

(4) Hace mucho frío, es una oración que no tiene un valor de verdad, luego, no es proposición ni enunciado abierto.

En consecuencia, (1) y (4) satisfacen la alternativa (c).

EJERCICIO 2. Dadas las proposiciones: p = Marcos es comerciante, q = Marcos es un próspero industrial y r = Marcos es ingeniero.

Simbolizar el enunciado: "Si no es el caso que Marcos sea un comerciante y próspero industrial, entonces es ingeniero o no es comerciante".

Solución. La proposición: "No es el caso que Marcos sea un comerciante y próspero industrial", se simboliza: $\sim(p \wedge q)$

La proposición: "Marcos es ingeniero o no es comerciante", se simboliza: $(r \vee \sim p)$. Uniendo estos dos esquemas con el conectivo " $\rightarrow$ ", se tiene:

$$\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)$$

EJERCICIO 3. Dadas las proposiciones q : "4 es un número impar", p y r cualesquiera tal que $\sim[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)]$ es verdadera; hallar el valor de verdad de los siguientes sistemas moleculares:

$$A = r \rightarrow (\sim p \vee \sim q) ; B = [r \leftrightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow (q \wedge \sim p) ; C = (r \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$$

Solución. Si q : "4 es un número impar" $\rightarrow V(q)=F$

$$\sim[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)] \text{ es } V \rightarrow V[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)] = F$$

Según la condicional: $V(r \vee q) = V$ y $V(r \rightarrow p) = F$

Si $V(r \rightarrow p) = F$, entonces: $V(r) = V$ y $V(p) = F$

Sustituyendo estos valores de verdad en los esquemas moleculares se tiene:

$$V(A) = V \rightarrow (V \vee V) \equiv V; \quad V(B) = [V \leftrightarrow (F \wedge F)] \leftrightarrow (F \wedge V) \equiv [F] \leftrightarrow (F) \equiv V$$

$$V(C) = (V \vee V) \wedge (F \vee F) = (V) \wedge (F) \equiv F$$

EJERCICIO 4. De la falsedad de la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ se deduce que el valor de verdad de los esquemas moleculares:

$$A = (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q); \quad B = [(\sim r \vee q)] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]; \quad C = (p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$$

son respectivamente: a) VFV b) FFF c) VVV d) FFV

Solución. Según la disyunción inclusiva, si: $V[(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)] = F$, entonces: $V(p \rightarrow \sim q) = F$ y $V(\sim r \rightarrow s) = F$

Aplicando la condicional en ambos casos se tiene:

$$V(p \rightarrow \sim q) = F \rightarrow V(p) = V \text{ y } V(q) = V ; V(\sim r \rightarrow s) = F \rightarrow V(r) = F \text{ y } V(s) = F$$

Entonces: $V(A) = (F \wedge F) \vee (F) = (F) \vee (F) = F$

$V(B) = [(V \vee V) \wedge V] \leftrightarrow [(F \vee F) \wedge F] = (V) \leftrightarrow (F) = F$

$V(C) = (V \rightarrow V) \rightarrow [(V \vee V) \wedge F] = (V) \rightarrow [F] = F$

Por lo tanto, la alternativa correcta es la b).

EJERCICIO 5. En cuales de los siguientes casos es suficiente la información para conocer el valor de verdad de las proposiciones correspondientes.

$A = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; $V(q) = V$. $B = (p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$; $V(p) = V$ y $V(r) = F$.

$C = [p \wedge (q \rightarrow r)]$; $V(p \rightarrow r) = V$. $D = (p \rightarrow q) \rightarrow r$; $V(r) = V$

Solución. En A: Si $V(q) = V$, entonces $V(A) = (p \vee V) \leftrightarrow (\neg p \wedge F)$

Pero: $V(p \vee V) = V$ y $V(\neg p \wedge F) = F$, cualquiera sea el valor de verdad de p . Luego, $V(A) = (V) \leftrightarrow (F) = F$ $\therefore$ Es suficiente la información.

En B: Si $V(p) = V$ y $V(r) = F$, entonces $V(B) = (V \wedge q) \rightarrow (V \vee F) = (V \wedge q) \rightarrow (V)$.

Cualquiera sea el valor de verdad de $(V \rightarrow q)$, la condicional es verdadera, por tanto, es suficiente la información.

En C: Según la tabla de la condicional, existen tres posibilidades para que el $V(p \rightarrow r) = V$, por tanto, no es suficiente la información dada para conocer el valor de verdad de C.

En D: Si $V(r) = V$, entonces $(p \rightarrow q) \rightarrow V$.

Cualquiera sea el valor de verdad de $(p \rightarrow q)$, la condicional es verdadera, por tanto, es suficiente la información dada.

EJERCICIO 6. Definamos $p \# q$ como una operación verdadera si p es falsa y q verdadera, y como falsa en todos los casos restantes. Según esto, si r : "Juan es médico" y s : "Juan es deportista"; hallar la traducción de $(\neg r) \# s$.

Solución. Según la definición de $\#$, las tablas de verdad de $p \# q$ y $(\neg r) \# s$, son:

p	q	$p \# q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

$\neg r$	s	$(\neg r) \# s$
F	V	V
F	F	F
V	V	F
V	F	F

Vemos que la tabla de valor de verdad de $(\neg r) \# s$ es idéntica a la de la conjunción, por lo tanto, la traducción de $(\neg r) \# s$ es:

"Juan es médico y deportista"

EJERCICIOS: Grupo 1

1. De los enunciados siguientes:

- | | |
|-------------------|--------------------------------------|
| (1) Hola que tal! | (4) Todos los hombres son inmortales |
| (2) $x^2+1 < 10$ | (5) Sócrates nació en Atenas |
| (3) $2 + 5 > 6$ | (6) $x + 5 \neq 8$ |

Cuál de las alternativas siguientes es correcta:

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| a) 3 son enunciados abiertos | c) 3 no son proposiciones |
| b) 2 son proposiciones | d) 4 son proposiciones |

2. Si p : "Carlos vendrá", q : "Carlos ha recibido la carta" y r : "Carlos está interesado todavía en el asunto". Simbolizar los siguientes enunciados:

- "Carlos vendrá, si ha recibido la carta, siempre que esté interesado todavía en el asunto".
- "O Carlos vendrá porque ha recibido la carta o no está interesado todavía en el asunto".
- "Carlos vendrá si y sólo si ha recibido la carta o vendrá porque está interesado todavía en el asunto".

3. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| (1) $(3+5=8) \vee (5-3=4)$ | (3) $(3+8=11) \wedge (7-4 > 1)$ |
| (2) $(5-3=8) \rightarrow (1-7=6)$ | (4) $(4+6=9) \leftrightarrow (5-2=4)$ |

4. $\neg[(\neg p \vee q) \vee (r + q)] \wedge [(\neg p \vee q) + (q \wedge \neg p)]$, es verdadera. Hallar los valores de verdad de p, q y r .

5. De la falsedad de $(p + \neg q) \vee (\neg r + \neg s)$, se deduce que el valor de verdad de los esquemas: $A = \neg(\neg q \vee \neg s) + \neg p$; $B = \neg(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (\neg p + \neg q)$ y

$C = p + \neg[q + \neg(s + r)]$, son respectivamente:

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| a) FFV | b) FFF | c) FVF | d) FVV |
|--------|--------|--------|--------|

6. Se sabe que $p \wedge q$ y $q + t$ son falsas. De los esquemas moleculares siguientes, cuáles son verdaderos: $A = (\neg p \vee t) \vee \neg q$; $B = \neg[p \wedge (\neg q \vee \neg p)]$; $C = [(p + q) \wedge \neg(q \wedge t)] \leftrightarrow [\neg p \vee (q \wedge \neg t)]$

7. La proposición $(p \wedge q) + (q + r)$ es falsa, y se tienen los esquemas moleculares: $A = \neg(q \vee r) \vee (p \vee q)$, $B = (p \vee \neg q) + (\neg r \wedge q)$ y

$C = [(p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)] \leftrightarrow (p \vee \neg r)$. Cuáles son falsos.

8. Si la proposición $A = (p + \neg q) + (r + \neg s)$ es falsa, hallar el valor de verdad de las proposiciones q, p, r, s . (en este orden).

9. Dadas las proposiciones: $A = (p \rightarrow q) \rightarrow r$; $V(r) = V$. $B = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; $V(q) = V$. $C = (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$; $V(p) = V$ y $V(r) = F$. $D = p \wedge (q \rightarrow r)$; $V(r) = V$.

En que casos la información que se da es suficiente para determinar el valor de verdad de cada proposición.

10. $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es una proposición verdadera, teniendo r y s valores de verdad opuestos. De las afirmaciones siguientes cuáles son verdaderas: $A = [(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$, es verdadera

$B = [(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\neg p \wedge q)$, es falsa

$C = [(\neg r \wedge \neg s) \rightarrow (p \vee r)] \wedge \neg(r \wedge s)$, es verdadera.

11. Si la proposición $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg s \vee r)$ es falsa, de las proposiciones siguientes, cuáles son verdaderas?: $A = \neg[(p \rightarrow q) \rightarrow r]$;

$B = \neg(\neg p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r) \wedge s$; $C = [(p \vee \neg q) \wedge p] \vee (\neg q)$.

12. Si las proposiciones $A = (p \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg s$ y $B = [(p \rightarrow s) \Delta \neg p] \Delta s$, son verdaderas, hallar los valores de verdad de p , s y $p \Delta s$, en ese orden.

13. Dada la siguiente información: $V(r \rightarrow q) = V$; $V(n \wedge r) = F$; $V(m \vee n) = V$ y $V(p \vee m) = F$. Determinar el valor de verdad del esquema molecular:

$A = [(m \vee \neg n) \rightarrow (p \wedge \neg r)] \leftrightarrow (m \wedge q)$.

14. Si $A = (p \leftrightarrow r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$, es verdadera, hallar el valor de verdad de la proposición $B = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

15. Si $V[(q \rightarrow p) \rightarrow (r \vee p)] = F$; hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

$A = (p \wedge x) \rightarrow (m \leftrightarrow y)$

$C = (r \leftrightarrow p) \rightarrow (s \wedge q)$

$B = (q \rightarrow n) \vee (x \wedge y)$

$D = [(s \rightarrow p) \vee (n \rightarrow r)] \leftrightarrow (x \vee \neg x)$

16. Si $V(m \leftrightarrow n) = F$, $V[\neg(s \rightarrow r)] = F$ y $V(\neg p \wedge \neg q) = F$; hallar el valor de verdad del esquema $A = [(p \vee q) \rightarrow (s \wedge \neg r)] \rightarrow (n \leftrightarrow m)$.

17. Sabiendo que el valor de verdad de la proposición compuesta:

$A = \{ \neg[(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta s] \} \rightarrow \{ (s \Delta p) \rightarrow t \}$, es siempre falso. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $B = \{ [(\neg p \Delta q) \Delta r] \rightarrow [\neg(q \rightarrow (s \rightarrow p))] \} \Delta (p \Delta q)$

b) $C = \{ \neg(p \rightarrow q) \Delta [(r \wedge p) \rightarrow \neg(r \vee s)] \} \Delta t$

18. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones cualesquiera tales que: $V(\neg w \rightarrow \neg s) = F$ y $V[(p \wedge \neg r) \leftrightarrow (s \rightarrow u)] = V$; hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas: $A = [(p \wedge q) \vee r]$; $B = (s \leftrightarrow \neg w) \rightarrow (r \vee \neg p)$ y

$C = [t \rightarrow (w \vee \neg p)] \vee \neg(p \rightarrow r)$

19. Dadas las proposiciones:

p: Los números m y n son múltiplos enteros de 5.

q: El producto de los números m y n es un múltiplo entero de 5.

Analizar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) p es condición suficiente para q .

b) p sólo si q .

c) p es condición necesaria para q .

20. Si la proposición $p = (\neg p \rightarrow q) \vee (s \rightarrow \neg r)$ es falsa; cuáles de los siguientes esquemas moleculares son falsos: $A = [(r \rightarrow q) \wedge q] \leftrightarrow [(\neg q \vee r) \wedge s]$; $B = \neg(p \vee q) \vee \neg q$; $C = \neg[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$.

1.10 EVALUACION DE ESQUEMAS MOLECULARES POR LA TABLA DE VALORES

Consiste en obtener los valores del operador principal a partir de la validez de cada una de las variables proposicionales. Hemos visto que para evaluar una tabla de verdad de dos variables proposicionales se necesitan $2^2=4$ valores de verdad (filas) para cada variable. En general, el número de valores de verdad que asigna a cada variable resulta de aplicar la fórmula 2^n , donde n es el número de variables que hay en el esquema molecular. Las combinaciones de todas las posibilidades de V y F se hacen en las columnas de referencia al margen izquierdo del esquema, luego se procede a aplicar la regla a cada uno de los operadores, empezando por el de menor alcance, hasta llegar al de mayor jerarquía.

EJEMPLO 1. Evaluar la tabla de verdad del esquema molecular:

$$A = \neg(p \wedge q) \leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$$

Solución. Número de valores de verdad para cada variable: $2^2=4$

p	q	$\neg(p \wedge q)$		$\leftrightarrow$	$(\neg p) \vee (\neg q)$		
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
Pasos		2	1	6	3	5	4

Explicación de los pasos:

- (1) Se aplicó la conjunción a los valores de verdad de p y q .
- (2) Se aplicó la negación a la columna (1)

- (3) Se aplicó la negación a los valores de verdad de p .
 (4) Se aplicó la negación a los valores de verdad de q .
 (5) Se aplicó la disyunción inclusiva a los valores de verdad de las columnas 3 y 4.
 (6) Finalmente se aplicó la bicondicional a los valores de verdad de las columnas 2 y 5.

En este ejemplo, el operador de mayor alcance es el bicondicional " $\leftrightarrow$ ", cuya columna (todos V) se ha trazado con doble raya para facilitar la lectura final del resultado de la tabla de valores.

En los ejemplos que siguen, se obviará la explicación de los pasos.

EJEMPLO 2. Evaluar la tabla de verdad de la proposición: $A = \sim[p \rightarrow (p \vee q)]$

Solución. Número de valores de verdad para cada variable: $2^2=4$

p	q	$\sim [p \rightarrow (p \vee q)]$			
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F
Pasos		4	1	3	2

EJEMPLO 3. Evaluar la tabla de verdad de la proposición:

$$[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow (\sim p) \vee [r \Delta (\sim p \wedge \sim q)]$$

Solución. Número de valores de verdad para cada variable: $2^3=8$

p	q	r	$[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow (\sim p) \vee [r \Delta (\sim p \wedge \sim q)]$								
V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
Pasos			1	3	2	9	4	8	5	7	6

Observación. Según el resultado que se obtenga en el operador de mayor jerarquía, los esquemas moleculares se clasifican en contingentes (consistentes), tautológicos y contradictorios.

Un esquema molecular es **contingente** cuando en su resultado hay por lo menos una verdad y una falsedad (Ejemplo 3). Un esquema molecular es **tautológico** cuando los valores de verdad de su operador principal son todos verdaderos (Ejemplo 1). Un esquema molecular es **contradictorio** cuando en el resultado todos los valores de verdad son falsos (Ejemplo 2).

EJEMPLO 4. Si se sabe que: $p \# q \equiv [\sim(p \wedge q) \rightarrow p]$; evaluar el esquema:

$$A \equiv [(p \rightarrow q) \# (q \wedge \sim p)] \leftrightarrow (q \# p)$$

Solución. En primer lugar, construimos las tablas de verdad de $p \# q$ y $q \# p$

p	q	$\sim(p \wedge q) \rightarrow p$			
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F
		2	1	4	3

p	q	$\sim(q \wedge p) \rightarrow q$			
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F
		2	1	4	3

Obsérvese que la tabla de verdad de $p \# q$ es idéntica a la de p , y la tabla de verdad de $q \# p$ es idéntica a la de q .

Ahora evaluamos el esquema A:

p	q	$[(p \rightarrow q) \# (q \wedge \sim p)] \leftrightarrow (q \# p)$					
V	V	V	V	F	V	V	
V	F	F	F	F	V	F	
F	V	V	V	V	V	V	
F	F	V	V	F	F	F	
Pasos		1	3	2	5	4	

Por lo tanto, el esquema A es contingente.

1.11 PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Dos proposiciones compuestas P y Q se dicen que son equivalentes si unidas por el bicondicional " $\leftrightarrow$ " el resultado es una tautología, es decir, que P y Q tienen los mismos valores de verdad en su operador principal. Se escribe:

$$P \equiv Q \text{ ó } P \leftrightarrow Q$$

y se lee: " P es equivalente a Q " ó " Q es equivalente a P ".

Si P no es equivalente a Q , se escribe:

$$P \neq Q \text{ ó } P \nleftrightarrow Q$$

EJEMPLO 1. Determinar si las proposiciones siguientes son equivalentes:

P : "Si Juan aprobó los exámenes de admisión, ingresó a la universidad".
 Q : "No es el caso que Juan apruebe los exámenes de admisión y no ingrese a la universidad".

Solución. Sean las proposiciones simples, p : "Juan aprobó los exámenes"

q : "Juan ingresó a la Universidad".

Entonces: $P = p \rightarrow q$ y $Q = \neg(p \wedge \neg q)$

Uniendo bicondicionalmente estos dos esquemas se tiene:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

y para probar que esta bicondicional es verdadera construimos su tabla de verdad.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
Pasos		1	4	3

Dado que el resultado de la tabla es una tautología, las proposiciones P y Q son equivalentes.

EJEMPLO 2. Determinar si los esquemas $A = (p \rightarrow q) \vee (r \wedge p)$ y $B = \neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$ son equivalentes.

Solución. Construimos las tablas de verdad de A y B unidas por el operador

" $\leftrightarrow$ "

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(r \wedge p)$	$\leftrightarrow$	$\neg q$	$\rightarrow$	$(\neg r \rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V
Pasos			1	3	2	7	4	5

Vemos que las columnas 3 y 6, que corresponden a los operadores principales de A y B , respectivamente, son iguales; entonces, el resultado de unir estas dos columnas por el operador " $\leftrightarrow$ " es tautológico, por lo que, A y B son

equivalentes.

EJEMPLO 3. De las siguientes proposiciones, cuáles son equivalentes?

A="Es necesario que Juan no estudie en la Universidad de Lima para que Luis viva en Monterrico". B="No es cierto que Luis viva en Monterrico y que Juan estudie en la Universidad de Lima". C="Luis no vive en Monterrico y Juan no estudia en la Universidad de Lima".

Solución. Sean: p ="Juan estudia en la Universidad de Lima"

q ="Luis vive en Monterrico"

Entonces: $A = q \rightarrow \neg p$; $B = \neg(q \wedge p)$; $C = \neg q \wedge \neg p$

A				B			C
p	q	$q \rightarrow \neg p$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(q \wedge p)$	$\leftrightarrow$	$\neg q \wedge \neg p$
V	V	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
Pasos		1		3	2		4

Aquí observamos que las columnas 1 y 3 de los operadores principales de las proposiciones A y B son iguales, por lo tanto, éstas son equivalentes, esto es:

$$A \equiv B, \quad A \not\equiv C \quad \text{y} \quad B \not\equiv C$$

EJEMPLO 4. Dada la proposición en $\mathbb{Z}$ (números enteros) p ="Si x es primo y x no es mayor que 2, entonces x no es múltiplo de 2". Luego:

A="Si x es múltiplo de 2, entonces x no es primo y no es mayor que 2".

B="Si x es múltiplo de 2, entonces x no es primo o es mayor que 2".

C="x no es múltiplo de 2 o x no es primo o x es mayor que 2".

Cuáles de estas proposiciones son equivalentes a p ?

Solución. Sean las proposiciones: r ="x es primo", s ="x es mayor que 2" y t ="x es múltiplo de 2". Simbolizando se tiene:

$$p = (r \wedge \neg s) \rightarrow \neg t; \quad A = t \rightarrow (\neg r \wedge \neg s); \quad B = t \rightarrow (\neg r \vee \neg s); \quad C = \neg t \vee \neg r \vee \neg s$$

Para evitar el laborioso trabajo de elaborar las tablas de verdad de cada proposición, construyamos sólo la de p , y supongamos que: $V(r)=V$, $V(s)=V$, $V(t)=V$ (Primera fila) y obtenemos en la tabla: $V(p)=V$, entonces:

$A = V \rightarrow (F \wedge F) = F$, luego: $A \not\equiv p$; $B = V \rightarrow (F \vee F) = V$, luego: $B \equiv p$; $C = F \vee F \vee F = V$, luego: $C \equiv p$.

Ahora supongamos que: $V(r)=V$, $V(s)=F$ y $V(t)=V$ (tercera fila), con estos valores obtenemos en la tabla: $V(p)=F$

Dado que A ya quedó descartado, probamos con B y C, esto es:

$$B = V \rightarrow (F \vee V) = F ; \text{ luego } B \equiv p$$

$$C = F \vee F \vee F = F ; \text{ luego } C \equiv p$$

Se puede seguir probando que para otros valores de verdad de r, s y t, las proposiciones B y C son verdaderas al igual que p, en consecuencia, podemos afirmar que éstas son equivalentes a p.

r	s	t	p
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

1.12 OTRO USO DE LA IMPLICACION

Se dice que una proposición A implica a otra proposición B, cuando unidas por el condicional " $\rightarrow$ ", resulta una tautología. Se simboliza:

$$A \rightarrow B$$

y se lee: "A implica a B", o también, "A es condición suficiente para que B" o "B es condición necesaria para A".

Si A no implica a B, se escribe: $A \nrightarrow B$

EJEMPLO 1. Sean los esquemas moleculares: $A = (\sim p) \Delta (\sim r)$ y $B = \sim(p \wedge q) \vee \sim r$. Demostrar que A implica a B.

Solución. En efecto, construyamos la tabla de verdad de $A \rightarrow B$:

p	q	r	$(\sim p) \Delta (\sim r)$	$\rightarrow$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim r$
V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V
Pasos			1	6	4
					3
					5
					2

Como el resultado arroja una tautología, queda demostrado que: $A \rightarrow B$

EJEMPLO 2. Dados los esquemas moleculares: $A = p \wedge \sim q$, $B = q \rightarrow \sim r$ y $C = \sim p \Delta (q \wedge r)$; determinar si C es una condición necesaria para la conjunción de A y B.

Solución. Si C es una condición necesaria para $A \wedge B$, entonces se debe pro-

bar que $(A \wedge B) \rightarrow C$

p	q	r	$(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$			$\rightarrow$	$\sim p \Delta (q \wedge r)$		
V	V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	V	V	V	F
Pasos			1	3	2	7		6	5

Como el resultado (7) no es una tautología, entonces C no es una condición necesaria para A y B , esto es: $(A \wedge B) \neq C$

EJERCICIOS: Grupo 2

En los ejercicios del 1 al 12 establecer, por medio de una tabla de valores, si cada uno de los siguientes esquemas moleculares es contingente, tautológico o contradictorio.

- $\sim[\sim p \rightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p)] \vee \sim(\sim p \vee \sim q)$
- $[(p \vee \sim q) \wedge \sim p] \Delta \sim(\sim q \rightarrow p)$
- $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$
- $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q]$
- $[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \vee \sim q)$
- $[p \vee (q \rightarrow \sim r)] \wedge [(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q]$
- $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$
- $\sim[(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]] \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$
- $[p \wedge (\sim q \rightarrow p)] \wedge \sim[(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \vee \sim p)]$
- $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$
- $[(p \Delta \sim q) \wedge \sim(r \wedge q)] \leftrightarrow \sim[(p \Delta \sim q) \rightarrow (q \wedge r)]$
- $\{[(\sim p \wedge r) \rightarrow q] \leftrightarrow [\sim q \leftrightarrow (p \vee r)]\} \Delta \{(p \rightarrow q) \Delta (q \vee \sim r)\}$
- Afirmamos que:

A: "Hoy es lunes pero no martes, entonces hoy no es feriado" $\leftrightarrow$ "Hoy es feriado, entonces no es verdad que hoy es lunes y no es martes".

B: "Hoy es lunes o martes, si y sólo si, hoy no es lunes" $\leftrightarrow$ "Hoy no es lunes y hoy es martes".

C: "Hoy es feriado y no es martes, entonces hoy es martes" $\leftrightarrow$ "Hoy no es martes, entonces hoy es feriado".

Cuáles son verdaderas?

14. (1) Es necesario y suficiente que p y q sean falsos para que:

$\sim(p \wedge r) \rightarrow (q \vee \sim r)$ sea falsa.

(2) Es necesario que q sea falsa y r verdadera para que:

$(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \vee \sim p)$ sea falsa.

(3) No es necesario que p y q sean verdaderas para que:

$\sim(p \Delta q) \vee (\sim p \Delta \sim q)$ sea verdadera.

Cuáles de estas afirmaciones son verdaderas?

15. Dados los esquemas lógicos: $P = (p + q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$; $R = \sim(\sim p \leftrightarrow q)$;

$Q = \sim(p \vee \sim q)$. Cuál de las siguientes relaciones es correcta:

a) $P \equiv R$ b) $R \equiv Q$ c) $P \equiv R$ d) Ninguna

16. Si se sabe que: $p * q \equiv (p + \sim q)$ y $p \# q \equiv \sim p \wedge \sim q$, evaluar el esquema molecular $A = (p + r) \# (q * r)$

17. Si definimos el conectivo Δ como: $p \Delta q \equiv (p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge r) \wedge \sim q]$, donde r es una proposición cualquiera. Analizar cuales de las siguientes afirmaciones son correctas.

a) $p \Delta p$ es una contradicción

c) $q \Delta t \equiv q \wedge \sim t$

b) $p \Delta q \equiv q \Delta p$

d) $p \Delta \sim q \equiv p \wedge (\sim p \vee q)$

18. Dada la siguiente información: $p * q \equiv (\sim p + q) \wedge (\sim q \leftrightarrow p)$

$p \# q \equiv (\sim p \leftrightarrow q) \vee (\sim q + p)$

Evaluar la fórmula: $\{[(p * q) \wedge (q \vee r)] \rightarrow (\sim p \# q)\}$.

19. Dados los siguientes esquemas moleculares: $A = p \Delta (\sim q)$, $B = p \leftrightarrow \sim r$ y $C = \sim(q \wedge \sim r)$. Determinar: a) Si la conjunción de A y C implica a B

b) Si la disyunción de A y B implica a C .

20. Determinar si cada una de las proposiciones que aparecen a continuación implica a $K = \sim(p \wedge q) \vee \sim r$.

$A = p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$; $B = (q \wedge \sim r)$; $C = (\sim p) \Delta (\sim r)$

21. Sean las siguientes proposiciones: $M = (p + \sim q) \wedge (r + p)$; $S = [\sim(\sim p \vee q)] \wedge q$ $L = q + \sim r$. Analizar: a) M implica a L y b) M implica a S

22. Dada la siguiente tabla:

Evaluar las fórmulas:

a) $(p + q) \oplus (q \# r)$

b) $(q \wedge r) \# (r \wedge q)$

c) $(m \leftrightarrow n) * (n \# q)$

d) $(\sim n \oplus \sim q) \# (q * n)$

p	q	$p * q$	$p \# q$	$p \oplus q$
V	V	F	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F



1.13 LA INFERENCIA LÓGICA

En matemáticas llamamos **razonamiento** a un par ordenado $(\{p_i\}, q)$, en donde, $\{p_i\}$ es un conjunto finito de proposiciones, llamadas **premisas** y q una proposición, llamada **conclusión**.

Un razonamiento es deductivo si y sólo si las premisas son evidencias de la verdad de la conclusión, es decir, si $p_1, p_2, \dots, p_n$ son verdaderas entonces q es verdadera; cuando se deduce esto se dice que se ha construido una inferencia. De este modo, toda regla de inferencia es tautológico.

Una inferencia es válida si y sólo si la premisa p o conjunción del conjunto de premisas $\{p_i\}$ implica la conclusión q , esto es, si:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q \text{ es una tautología} \quad (a)$$

EJEMPLO 1. Determinar si $p \vee q$ es una consecuencia válida de:

$$\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow r, \neg r.$$

Solución. Aquí las premisas son: $p_1 = \neg p \rightarrow \neg q$, $p_2 = \neg q \rightarrow r$, $p_3 = \neg r$, y la conclusión: $Q = p \vee q$.

Debemos demostrar que: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow Q$, es una tautología. En efecto, la tabla de verdad para esta inferencia es:

p	q	r	$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow r) \wedge (\neg r)$				$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F
Pasos			1	3	2	5	4	7

Como el resultado (7) es una tautología, la conjunción de premisas implica a la conclusión, por tanto, la inferencia es válida.

Observaciones: (1) En los casos en que las premisas forman dos o más conjunciones, se toma la última conjunción como la principal del antecedente.

(2) La validez de una inferencia no depende de los valores de verdad ni del contenido de los enunciados que aparecen en la inferencia, sino de la forma particular de la inferencia.

(3) Si la condicional ($\supset$) no es una tautología, entonces se dice que la inferencia es **no válida** o es una **falacia**.

EJEMPLO 2. Determinar la validez de la inferencia: "Si el triángulo es i sósceles entonces tiene dos lados iguales. Pero, el triángulo no tiene dos lados iguales; por lo tanto, no es isósceles".

Solución. Sean: p ="El triángulo es isósceles"

q ="El triángulo tiene dos lados iguales"

Entonces, el esquema de la inferencia es:

$$\begin{array}{r} p \supset q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

p	q	$(p \supset q) \wedge (\sim q)$			$\supset$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
Pasos		1	3	2	5	4

Como el resultado de la tabla de verdad es una tautología, la inferencia es válida.

EJEMPLO 2. Mediante una tabla de verdad, establecer si es válida la inferencia:

$$\begin{array}{r} p \leftrightarrow \sim q \\ q \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

Solución.

p	q	r	$(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim r)$			$\supset$	$(\sim q)$
V	V	V	F	F	V	F	F
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V
Pasos			1	3	2	5	4

El resultado de la tabla no es una tautología, por lo tanto, la inferencia es una falacia.

1.13.1 EL METODO ABREVIADO

Es un procedimiento que evita la laboriosa tarea de construir la tabla de valores para determinar la validez de las inferencias. Este método consiste en suponer la conjunción de premisas verdadera y la conclusión falsa, única posibilidad que invalida la implicación:

$$\begin{array}{ccccccc} (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q \\ V & V & V & & V & & F \end{array}$$

Si no se demuestra esta posibilidad la inferencia será válida.

En la prueba de éste método se aplican los siguientes pasos:

- Asignar el valor de verdad V a cada una de las premisas y de falsedad F a la conclusión.
- Deducir la validez de cada una de las variables proposicionales en función de las reglas veritativas, empezando por la conclusión o por el operador de una de las premisas que ofrece una sola posibilidad.
- Si cada una de las variables cumple una sola función veritativa, se habrá probado que la conjunción de premisas es verdadera y la conclusión es falsa; por lo que, la inferencia no será válida (No hay implicación).
- Si una variable tiene dos valores de verdad y falsedad a la vez, quedará demostrado que no es posible que la conjunción de premisas sea verdadera y la conclusión falsa. Por lo que, hay implicación y la inferencia será válida.

EJEMPLO 4. Establecer si es válida la inferencia:

$$\begin{array}{c} p \leftrightarrow \neg q \\ q \vee r \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

Solución. Empezamos escribiendo el esquema de la inferencia en la forma:

$$a) \underbrace{(p \leftrightarrow \neg q)}_V \wedge \underbrace{(q \vee r)}_V \wedge \underbrace{(\neg r)}_V \rightarrow \underbrace{\neg q}_F$$

- Empezamos por la conclusión: Si $V(\neg q)=F \rightarrow V(q)=V$. Trasladamos este valor a la primera premisa y notamos que si: $V(p \leftrightarrow F)=V \rightarrow V(p)=F$ (única posibilidad). En la tercera premisa: $V(\neg r)=V \rightarrow V(r)=F$. Estos dos valores encontrados satisfacen el valor de verdad de la segunda premisa.
- Como cada una de las variables cumple una sola función veritativa, decidimos que la inferencia no es válida. Esto es, se ha demostrado que la

conjunción de premisas es verdadera y la conclusión falsa. (Ver el ejemplo 3, donde la sexta fila de valores invalida la implicación).

EJEMPLO 5. Establecer si es válida la inferencia:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg p \Delta \neg r \\ \hline r \leftrightarrow q \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Solución. a) $\underbrace{(p \rightarrow q)}_V \wedge \underbrace{(\neg p \Delta \neg r)}_V \wedge \underbrace{(r \leftrightarrow q)}_V \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow r)}_F$

b) En la conclusión, si: $V(p \rightarrow r)=F$, entonces, $V(p)=V$ y $V(r)=F$

Trasladamos estos valores en la primera y tercera premisas:

$$V(V \rightarrow q) \rightarrow V(q)=V \text{ (única posibilidad)}$$

$$V(F \leftrightarrow q) \rightarrow V(q)=F \text{ (única posibilidad)}$$

d) Como la variable q tiene los valores de verdad y falsedad a la vez, concluimos afirmando que la inferencia es válida.

EJEMPLO 6. Comprobar la validez del enunciado siguiente: "Si estudio, entonces no perderé matemáticas y si no juego fútbol, entonces estudiaré; pero perdí matemáticas. Por tanto, jugué fútbol".

Solución. Sean: p ="estudio", q ="pierdo matemáticas" y r ="juego fútbol".

Entonces, el enunciado dado es como sigue:

a) $\underbrace{(p \rightarrow \neg q)}_V \wedge \underbrace{(\neg r \rightarrow p)}_V \wedge \underbrace{r}_V \rightarrow \underbrace{r}_F$

b) Si $V(r)=F$ y $V(q)=V$, entonces en la primera y tercera premisas se tiene: $V(p \rightarrow F)=V$, entonces $V(p)=F$, y $V(V \rightarrow p)=V$, entonces $V(p)=V$

d) Como la variable p tiene los valores F y V a la vez, se deduce que la inferencia es válida.

EJEMPLO 7. Simbolizar y analizar el valor de verdad del siguiente enunciado: "Si un satélite gira alrededor de la luna, entonces gira también alrededor de la tierra; y si gira alrededor de la tierra, también gira alrededor del sol. Y, si gira alrededor del sol, entonces gira alrededor de la constelación de la lira. En consecuencia, si un satélite gira alrededor de la luna, entonces gira alrededor de la constelación de la lira".

Solución. Sean: p ="Un satélite gira alrededor de la luna"

q = "Un satélite gira alrededor de la tierra"

r = "Un satélite gira alrededor del sol"

s = "Un satélite gira alrededor de la constelación de la li-

Entonces el esquema de la inferencia es: $p + q$ ra"

$$\begin{array}{r} q + r \\ r + s \\ \hline \therefore p + s \end{array}$$

y la conjunción de premisas es:

$$a) \underbrace{(p + q)}_V \wedge \underbrace{(r + q)}_V \wedge \underbrace{(r + s)}_V + \underbrace{(p + s)}_F$$

b) En la conclusión: si $V(p + s)=F + V(p)=V$ y $V(s)=F$ (única posibilidad)

En la tercera premisa: $V(r + F)=V + V(r)=F$ (única posibilidad)

En la primera premisa: $V(V + q)=V + V(q)=V$ (única posibilidad)

En la segunda premisa, para los valores de verdad de r y q hallados, se cumple que: $V(r + q)=V$

c) Como cada una de las variables cumple una sola función veritativa, decimos que la inferencia no es válida, o que el enunciado es falso, ya que se cumple lo que habíamos supuesto: la conjunción de premisas verdadera y la conclusión falsa.

EJEMPLO 8. Estudiar si es válida la siguiente proposición compuesta"

"Si Raúl participa en el comité electoral de la Universidad entonces los estudiantes se enojarán con él, y si no participa en un comite electoral de la Universidad entonces las autoridades universitarias se enojarán con él. Pero Raúl participará en un comité electoral de la Universidad. Por lo tanto, los estudiantes o las autoridades universitarias se enojarán con él".

Solución. Sean: p ="Raúl participa en el comité electoral de la Universidad"
 q ="Los estudiantes se enojarán con él"

r ="Las autoridades universitarias se enojarán con él"

El esquema de inferencia es: $p + q$

$$\begin{array}{r} \neg p + r \\ p \vee \neg p \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

y la conjunción de premisas:

$$a) \underbrace{(p + q)}_V \wedge \underbrace{(r + \neg p)}_V \wedge \underbrace{(p \vee \neg p)}_V + \underbrace{(q \vee r)}_F$$

b) En la conclusión: si $V(q \vee r) = F \rightarrow V(q) = F$ y $V(r) = F$ (única posibilidad)

En la primera premisa: $V(p \rightarrow F) = V(p) = V$ (única posibilidad)

En la segunda premisa: $V(F \vee \neg p) = V \vee V(\neg p) = V \vee V(p) = F$

d) Como la variable p tiene los valores de V y F a la vez, concluimos afirmando que la proposición compuesta es válida.

EJERCICIOS: Grupo 3

Demostrar, por la tabla de valores o por el método abreviado, si los esquemas representan o no reglas de inferencia válidas.

$$1. \quad p \rightarrow (\neg q)$$

$$p \vee (\neg q)$$

$$\therefore \neg q$$

$$2. \quad p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow p$$

$$\therefore p \leftrightarrow q$$

$$3. \quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$$

$$p \vee r$$

$$\therefore q \vee s$$

$$4. \quad p \rightarrow q$$

$$\neg q \rightarrow \neg r$$

$$\therefore p \leftrightarrow r$$

$$5. \quad p \leftrightarrow q$$

$$r \vee q$$

$$\neg r$$

$$\therefore q$$

$$6. \quad p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$r \rightarrow s$$

$$\therefore p \rightarrow s$$

$$7. \quad q \leftrightarrow (\neg r \rightarrow r)$$

$$r \vee s$$

$$\neg p \leftrightarrow r$$

$$\therefore q \vee r$$

$$8. \quad q \rightarrow p$$

$$q \rightarrow (r \vee s)$$

$$\neg(\neg q \vee \neg s)$$

$$\therefore r \rightarrow (s \rightarrow p)$$

$$9. \quad p \vee \neg q$$

$$r \rightarrow \neg p$$

$$s \leftrightarrow p$$

$$\therefore p \vee (q \rightarrow \neg r)$$

$$10. \quad p \leftrightarrow \neg q$$

$$\neg p \Delta s$$

$$r \rightarrow s$$

$$\therefore p \rightarrow (r \wedge \neg q)$$

Traducir a forma simbólica y comprobar la validez de los siguientes enunciados:

11. Si trabajo, no puedo estudiar. Estudio o paso matemáticas, pero trabajé. Por tanto, pasé matemáticas.

12. Si el ómnibus sufrió desperfectos en el camino entonces Patricia llegará tarde a la Universidad. Pero, Patricia no llegará tarde a la Universidad. Por tanto, si el ómnibus sufrió desperfectos en el camino entonces Patricia viajó en taxi.

13. Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7. 5 no es primo ó 2 divide a 7. Por tanto, 6 es impar.

14. En el cumpleaños de mi esposa le llevaré flores. Es el cumpleaños de mi

- esposa o trabajo hasta tarde; pero hoy no le llevé flores a mi esposa. Por tanto, hoy trabajé hasta tarde.
15. Si trabajo no puedo estudiar, trabajo o apruebo matemáticas, pero apruebo matemáticas. Por tanto, estudié.
16. Si Londres no está en Dinamarca, entonces París no está en Francia. Por tanto, Londres está en Dinamarca.
17. Si me gustan las matemáticas, entonces estudiaré. Estudio o pierdo el curso, en consecuencia, si pierdo el curso, entonces no me gustan las matemáticas.
18. Luis es director de una empresa si tiene el mayor número de acciones; y si tiene el mayor número de acciones, o es un economista o tiene mucho dinero. Ocurre que Luis tiene el mayor número de acciones. En consecuencia, o es un economista o tiene mucho dinero.
19. Estudiar si es válida o no la siguiente proposición compuesta: "Si en la luna no hay oxígeno, entonces no hay agua ni aire. Si no hay oxígeno ni hay agua, entonces no hay plantas. No es el caso que en la luna haya oxígeno o no haya plantas. En consecuencia, la luna está hecha de queso"
20. "Si Anito decía la verdad, entonces Sócrates corrumpía la juventud, y si el tribunal lo condenó equivocadamente, entonces Anito no es el culpable. Pero, Sócrates no corrumpía la juventud o Anito es el culpable. Por tanto, Anito no decía la verdad o el tribunal no condenó a Sócrates equivocadamente"

1.14 PRINCIPALES LEYES LÓGICAS Y TAUTOLOGÍAS

Una forma proposicional es una ley lógica si y sólo si cualquiera que sea la interpretación formalmente correcta que se haga de la misma, se obtiene como resultado una verdad lógica. En lógica, las tautologías son conocidas con el nombre de **leyes o principios lógicos** y son las siguientes:

T.1: Ley de Identidad (Reflexividad)

Una proposición sólo es idéntica a si misma. Se expresa por:

$$p \rightarrow p \text{ y } p \leftrightarrow p$$

T.2: Ley de no Contradicción

Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez.

Se expresa por:

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

T.3: Ley del Tercio Excluido

Una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera posibilidad. Se expresa por:

$$p \vee \neg p$$

Existen muchas otras tautologías igualmente importantes y que se clasifican en dos grupos: las tautologías llamadas **equivalencias notables** y las llamadas **implicaciones notables**.

1.14.1 EQUIVALENCIAS NOTABLES

E.1: Ley de Involución (Doble negación)

Dos negaciones de igual alcance equivale a una afirmación.

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

E.2: La Idempotencia

Una cadena de conjunciones o disyunciones de variable redundante se eliminan.

$$a) \quad p \wedge p \equiv p$$

$$b) \quad p \vee p \equiv p$$

E.3: Leyes Conmutativas

Si en las proposiciones conjuntivas, disyuntivas y bicondicionales se permutan sus respectivas componentes, sus equivalentes significan lo mismo.

$$a) \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$b) \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

$$c) \quad p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

E.4: Leyes Asociativas

Las leyes asociativas para la conjunción, disyunción y bicondicional establecen que si en un esquema hay más de una conjunción, disyunción y bicondicional, respectivamente, con igual alcance, ellas pueden agruparse indistintamente.

$$a) \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$b) \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$c) \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

E.5 Leyes Distributivas

$$a) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$b) \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$c) \quad p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$d) \quad p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

E.6: Leyes de Morgan

La negación de las proposiciones conjuntivas o disyuntivas se obtienen cambiando la conjunción por la disyunción, o la disyunción por la conjunción, y negando cada uno de los componentes.

$$a) \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$b) \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

Ejemplos: a) "No es verdad que hace frío y está lloviendo" equivale a:

"No hace frío o no está lloviendo"

b) "No es verdad que las rosas son rojas o las violetas son azules" equivale a: "Las rosas no son rojas y las violetas no son azules"

E.7: Las leyes del Condicional

$$a) \quad p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$b) \quad \neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

E.8: Leyes del Bicondicional

$$a) \quad (p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$b) \quad (p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

E.9: Leyes de la Absorción

$$a) \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$b) \quad p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$$

$$c) \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$d) \quad p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$$

Las leyes a) y b) constituyen la absorción del esquema conjuntivo al disyuntivo. Uno de los miembros del esquema conjuntivo es el esquema absorbente (puede ser una variable o una cadena de disyunciones), y el otro miembro es el esquema que se absorbe (puede ser una disyunción o una cadena de disyunciones).

Las leyes c) y d) constituyen la absorción del esquema disyuntivo al conjuntivo. A diferencia de a) y b) el esquema absorbente es una variable o cade-

na de disyunciones y el esquema que se absorbe es una conjunción o cadena de conjunciones.

Nótese que en a) y c) se absorbe toda la disyunción y conjunción, respectivamente, mientras que en b) y d) se absorbe sólo la variable que se repite negativamente.

Ejemplos. (1) Simplificar: $(\sim r \wedge p) \wedge (s \vee r) \wedge (\sim t \vee p) \wedge (t \vee \sim s)$

Aplicando b) a los dos primeros términos del esquema se tiene

$$(\sim r \wedge p \wedge s) \wedge (\sim t \vee p) \wedge (t \vee \sim s)$$

En los primeros términos se repite p, luego, según a):

$$(\sim r \wedge p \wedge s) \wedge (t \vee \sim s)$$

En el segundo término, la variable s se repite negativamente, luego, según b); el esquema equivale a: $\sim r \wedge p \wedge s \wedge t$

(2) Simplificar: $s \vee (r \wedge \sim s) \vee (p \wedge r \wedge t)$

Aplicando d) a los dos primeros términos del esquema se tiene:

$$(s \vee r) \vee (p \wedge r \wedge t)$$

La variable r se repite en la cadena de conjunciones del segundo término, luego, aplicando c) el esquema equivale a: $s \vee r$

E.10: Leyes de Transposición

$$a) (p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$$

$$b) (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$$

Los miembros de un condicional y bicondicional pueden ser transpuestos si se niegan cada uno de ellos.

E.11: Leyes de Exportación

$$a) (p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$b) [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow r] \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow (p_n \rightarrow r)]$$

E.12: Formas normales para la Conjunción y Disyunción

F.N. Conjuntiva

F.N. Disyuntiva

$$a) T \wedge T \equiv T$$

$$a) C \vee C \equiv C$$

$$b) T \wedge P \equiv P$$

$$b) C \vee P \equiv P$$

$$c) C \wedge P \equiv C$$

$$c) T \vee P \equiv T$$

(T=Tautología, C=Contradicción, P=Esquema molecular cualquiera)

E.13: Elementos Neutros para la Contradicción y Tautología

$$a) p \wedge C = C$$

$$b) C \vee T = T$$

$$c) p \vee T = T$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Dada la proposición: "Si $3+4=7$ entonces 8 es primo, o 4 no es par"

- a) Negar oracionalmente la proposición
 b) Determinar el valor de verdad de la proposición original.

Solución. Sean: $p="3+4=7"$, $q="8$ es primo", $r="4$ es par"

La proposición en símbolos es: $(p \rightarrow q) \vee \sim r$

- a) Su negación es: $\sim[(p \rightarrow q) \vee \sim r] \equiv \sim(p \rightarrow q) \wedge \sim(\sim r)$ (Morgan: E.6b)
 $\equiv (p \wedge \sim q) \wedge r$ (E.7b y E.1)

Oralmente: "Si $3+4=7$, 8 no es primo y 4 es par"

- b) En la proposición original: $V(p)=V$, $V(q)=F$, $V(r)=V$

Entonces: $V[(p \rightarrow q) \vee \sim r] \equiv V[(V \rightarrow F) \vee F] \equiv V(F \vee F) = F$

EJERCICIO 2. Hallar otra forma equivalente de la proposición: "Es necesario entrenar debidamente y no cometer infracciones para cumplir buen papel deportivo"

Solución. Sean: $p="entrenar debidamente"$, $q="cometer infracciones"$ y $r="cumplir buen papel"$.

Aquí, el antecedente es $(p \wedge \sim q)$ y el consecuente r , entonces la proposición en símbolos es: $r \rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv \sim r \vee (p \wedge \sim q)$ (Cond. E.7a)

Por tanto, la otra forma de enunciar la proposición dada es:

"No cumplir buen papel deportivo, o entrenar debidamente y no cometer infracciones".

* **EJERCICIO 3.** Hallar una proposición equivalente a:

$$P = [(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge (\sim q)$$

Solución. $P \equiv [(\sim p \wedge q) \vee (r \wedge \sim r)] \wedge (\sim q)$ (Cond. E.7a)

$$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (C)] \wedge (\sim q) \quad (\text{Morgan: E.6a y T.2})$$

$$\equiv [(p \wedge \sim q)] \vee (\sim q) \quad (\text{E.12: FNDb})$$

$$\therefore P \equiv \sim q \quad (\text{Abs. E.9a})$$

✓ **EJERCICIO 4.** Simplificar el esquema: $A = (\sim p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

Solución. $A \equiv \sim(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ (Cond. E.7a)

$$\equiv (p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p) \quad (\text{E.6a y E.7a})$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q) \quad (\text{Comm. E.3b})$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \quad (\text{Idemp. E.2b})$$

EJERCICIO 5. Si definimos " $\#$ " como: $(p\#q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, hallar una expresión equivalente a $p\#q$.

Solución. $p\#q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (Morgan: E.6a)
 $\equiv [(p \vee q) \wedge \neg p] \vee [(p \vee q) \wedge \neg q]$ (Dist. E.5a)
 $\equiv [\neg p \wedge q] \vee [p \wedge \neg q]$ (Abs. E.9b)
 $\equiv [\neg(q \rightarrow p)] \vee [\neg(p \rightarrow q)]$ (Cond. E.7b)
 $\equiv \neg[(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)]$ (Morgan: E.6a)
 $\equiv \neg(p \leftrightarrow q)$ (Bicond. E.8a)

EJERCICIO 6. Si $A = p \leftrightarrow \neg q$, $B = [(p \Delta \neg q) \rightarrow r] \wedge [(p \Delta \neg q) \rightarrow \neg r]$ y $C = \neg[(\neg s \rightarrow (\neg s \vee r))] \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

Establecer si A, B y C son equivalentes.

Solución. Simplificando los esquemas B y C se tiene:

$B \equiv (p \Delta \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)$ (Dist. E.5c)
 $\equiv \neg(p \Delta \neg q) \vee (r \wedge \neg r)$ (Morgan: E.6a)
 $\equiv \neg(p \Delta \neg q) \vee (C)$ (Contrad. T.2)
 $\equiv \neg(p \Delta \neg q)$ (E.12: FNDb)
 $\equiv p \leftrightarrow \neg q$ (Def. de Bicond)

$C \equiv [\neg s \rightarrow (\neg s \vee r)] \wedge \neg(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ (Cond. E.7b)
 $\equiv [\neg(\neg s) \vee (\neg s \vee r)] \wedge \neg(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ (Cond. E.7a)
 $\equiv [s \vee (\neg s \vee r)] \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$ (Invol. E.1)
 $\equiv [(s \vee \neg s) \vee r] \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$ (Asoc. E.4b)
 $\equiv [T \vee r] \wedge (p \leftrightarrow \neg q) \equiv T \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$ (T.3 y E.13c)
 $\equiv p \leftrightarrow \neg q$ (E.12: FNCb)

Por lo tanto: $A \equiv B \equiv C$

EJERCICIO 7. Para una proposición cualquiera p se define

$$V(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ es verdadera} \\ 0 & \text{si } p \text{ es falso} \end{cases}$$

A partir de las tablas de verdad, mostrar que:

a) $V(\neg p) = 1 - V(p)$ y b) $V(p \vee q) = V(p) + V(q) - V(p) \cdot V(q)$

A continuación y sólo utilizando a) y b) probar que:

c) $V(p \wedge q) = V(p) \cdot V(q)$

Finalmente, deducir una fórmula aritmética para:

d) $V[\neg(p \rightarrow q)]$ en función de $V(\neg p)$ y $V(q)$.

Solución. a) Si $V(p) = V \rightarrow V(\neg p) = F$

Según la definición: $V(p) = 1$ y $V(\neg p) = 0$

Como: $0 = 1 - 1 \rightarrow V(\neg p) = 1 - V(p)$

Ahora, para $V(p)=F$ y $V(\sim p)=V$; o sea: $V(p)=0$ y $V(\sim p)=1$

y si: $1 = 1-0 \rightarrow V(\sim p) = 1-V(p)$

b) Si $V(p)=V$ y $V(q)=V \rightarrow V(p \vee q)=V$

Según la definición: $V(p)=1$, $V(q)=1$ y $V(p \vee q)=1$

Pero: $1 = 1+1-(1)(1) \rightarrow V(p \vee q) = V(p)+V(q)-V(p) \cdot V(q)$

Para $V(p)=V$ y $V(q)=F \rightarrow V(p \vee q)=V$

Según la definición: $V(p)=1$, $V(q)=0$ y $V(p \vee q)=1$

Como: $1 = 1+0-(1) \cdot (0) \rightarrow V(p \vee q) = V(p)+V(q)-V(p) \cdot V(q)$

Igualmente se demuestra b) para: $V(p)=F$ y $V(q)=V$; $V(p)=F$ y $V(q)=F$

c) Podemos escribir: $V(p \wedge q) = V[\sim(\sim p \vee \sim q)]$ (Morg. E.6a)

Según a): $V(p \wedge q) = 1-V(\sim p \vee \sim q)$

y según b): $= 1-[V(\sim p)+V(\sim q)-V(\sim p) \cdot V(\sim q)]$

$= 1 - \{1-V(p)+1-V(q)-[1-V(p)][1-V(q)]\}$

de donde: $V(p \wedge q) = V(p) \cdot V(q)$

d) $V[\sim(p \rightarrow q)] = V(p \wedge \sim q)$ (Cond. E.7b)

$= V(p) \cdot V(\sim q)$

(Según c))

$= [1-V(\sim p)][1-V(q)]$

(Según a))

de donde: $V[\sim(p \rightarrow q)] = 1-V(\sim p)-V(q)+V(\sim p) \cdot V(q)$

EJERCICIO 8. Transformar la siguiente proposición compuesta:

$P = (\sim p \leftrightarrow q) \Delta (p \rightarrow q)$ a su equivalente condicional más simple.

Solución. Sabemos que: $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \Delta q \rightarrow \sim p \leftrightarrow q \equiv p \Delta q$

Luego, en P:

$P \equiv (p \Delta q) \Delta (p \rightarrow q) \equiv (p \Delta q) \Delta (\sim p \vee q)$ (Cond. E.7a)

$\equiv p \Delta [q \Delta (\sim p \vee q)]$

(Asoc. E.4b)

$\equiv p \Delta \{[q \vee (\sim p \vee q)] \wedge \sim q \wedge (\sim p \vee q)\}$

(Def. Disy. Ex.)

$\equiv p \Delta \{[q \vee (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee \sim(\sim p \vee q)]\}$

(Morg. E.6a)

$\equiv p \Delta \{[(q \vee q) \vee \sim p] \wedge [\sim q \vee (p \wedge \sim q)]\}$

(Asoc. E.4b y Morg. E.6b)

$\equiv p \Delta \{[q \vee \sim p] \wedge [\sim q]\} \equiv p \Delta (\sim p \wedge \sim q)$

(Idemp. E.2b y Abs. E.9b)

$\equiv [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [\sim(p \wedge (\sim p \wedge \sim q))]$

(Disy. Exc.)

$\equiv [p \vee \sim q] \wedge [\sim p \vee \sim(\sim p \wedge \sim q)]$

(Abs. E.9d y Morg. E.6a)

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge [\sim p \vee (p \vee q)]$

(Morg. E.6a)

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge [(\sim p \vee p) \vee q] \equiv (p \vee \sim q) \wedge [T \vee q]$

(Asoc. E.4b y T.3)

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge T \equiv \sim q \vee p$

(Neutro: E.13c)

$\therefore P \equiv q \rightarrow p$

EJERCICIO 9. Se define el conectivo $+$ por la tabla:

p	q	$p + q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- a) Expresar $p \Delta q$ en términos de $+$ y $\sim$
 b) Comprobar mediante una tabla de verdad que la expresión hallada en a) es equivalente a $p \leftrightarrow \sim q$.

Solución. Obsérvese que los valores de verdad de $p + q$ es la negación de los valores de verdad de $p \vee q$

Esto es: $p + q \equiv \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (Morg. E.6b)

Se sabe que: $p \Delta q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

Entonces: $p \Delta q \equiv \sim[\sim(p \vee q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

$$\equiv \sim(p + q) \wedge \sim(\sim p + \sim q)$$

$$\therefore p \Delta q \equiv (p + q) + (\sim p + \sim q)$$

b)

p	q	$p \leftrightarrow \sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$(p + q) + (\sim p + \sim q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como los valores de verdad en el operador principal de ambas tablas son idénticas, se deduce que: $p \leftrightarrow \sim q \equiv (p + q) + (\sim p + \sim q)$

EJERCICIO 10. Si T es una tautología y p, q son proposiciones, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- a) $\{[(p \wedge T) \vee (q \wedge \sim T)] \wedge (p \vee q)\} \leftrightarrow p$
 b) $\{[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge (p \vee q)\} \leftrightarrow T$
 c) $\{[(p \vee q \vee \sim T) \wedge \sim T] \vee [(\sim p \wedge T) \vee T]\} \leftrightarrow T$

Solución. a) $\equiv \{[(p \wedge T) \vee (\sim T)] \wedge (p \vee q)\}$ (q $\wedge \sim T = \sim T$)
 $\equiv \{[(\sim T \vee p)] \wedge (p \vee q)\}$ (Abs. E.9d)
 $\equiv \{p \wedge (p \vee q)\} \equiv p$ (E.12: FNDA y Abs. E.9a)

La afirmación es verdadera.

b) $\equiv \{[(p \vee q) \vee \sim(p \vee q)] \wedge (p \vee q)\}$ (Morg. E.6b)
 $\equiv \{[T] \wedge (p \vee q)\} \equiv (p \vee q)$ (T.3 y E.12: FNCb)

La afirmación es falsa.

c) $\equiv \{[\sim T] \vee [T]\}$ (Abs. E.9a y E.9c)
 $\equiv T$ (Terc. Exc. T.3)

La afirmación es verdadera

EJERCICIOS: Grupo 4

- Sean: p ="Juan estudia inglés", q ="Pedro está en casa".
Simplificar y expresar oralmente la proposición: $P = \neg[(p \wedge \neg q) \rightarrow p] \vee q$
- Determinar el equivalente a la afirmación: "x no es divisor de 3 es condición necesaria para que x sea primo y no sea mayor que 4".
- Determinar los esquemas más simples equivalentes a las proposiciones:
 - $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg q \vee p$
 - $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \wedge \neg q)$
 - $[(p \rightarrow q) \vee \neg p] \wedge (\neg q \rightarrow p)$
 - $(p \wedge \neg r) \vee [\neg q \wedge \neg(p \wedge r)]$
 - $[(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)] \wedge \neg(p \wedge q)$
 - $\neg\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge (\neg p \vee q))]\} \rightarrow \neg(p \vee q)\}$
 - $\neg\{\neg[\neg(p \wedge q) \vee \neg q] \rightarrow [\neg(p \vee \neg q)]\}$
- Mostrar que la proposición $P = \neg(p \rightarrow q) \wedge [q \rightarrow (\neg r)]$ es equivalente a las proposiciones: $A = [p \wedge (p \vee \neg r)] \wedge (\neg q)$, $B = [p \wedge (\neg q)] \wedge [\neg(q \wedge r)]$ y $C = [p \wedge (\neg q)] \vee [(p \wedge \neg r) \wedge (\neg q)]$
- Cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes?
 $A = \neg(q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (q \vee p)$, $B = [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q)] \leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge q]$
 $C = \neg(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$, $D = \neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (\neg q)]$
- Cuales de las afirmaciones siguientes son verdaderas?
 - $[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \equiv (p \rightarrow r)$.
 - $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv [(\neg p) \leftrightarrow q]$
 - $\neg[(p \wedge q) \vee r] \equiv [\neg(p \vee r) \vee \neg(q \vee r)]$
- Simplificar la proposición:
 $\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee p \vee q] \wedge [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee p]\} \wedge (\neg q)$
- Usando equivalencias lógicas simplificar:
 $[\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)] \vee [p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r)]$
- Simplificar aplicando equivalencias lógicas la proposición:
 $\{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\neg r \vee q) \wedge p]\} \wedge \{[\neg p \vee q \vee \neg q \vee \neg(p \vee q)] \rightarrow [r \wedge p \wedge (\neg r \vee q)]\}$
- Dado el conectivo lógico * definido por la siguiente tabla:
 Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:
 a) $q \equiv V$ es condición necesaria o suficiente para que $(p * q) \equiv V$

p	q	p * q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

$$b) \sim p * [(p \wedge q) * (r \wedge s)] \equiv r \wedge s$$

c) Es falso que $(p \rightarrow q) \equiv F$ sea condición necesaria y suficiente para $p * q \equiv F$

11. Si $p \wedge q \wedge r \equiv F$, demuestre que la proposición más simplificada de:

$$P = [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow (r \wedge \sim p) \text{ es la proposición } p \vee q \vee r.$$

12. Hallar la expresión más simple equivalente a la proposición:

$$\{(\sim(p \vee q)) \leftrightarrow \sim(\sim p \rightarrow \sim q)\} \Delta \{(p \wedge \sim q) \vee \sim[(p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow p)]\}$$

13. Se define la proposición lógica compuesta $p * q$ por medio de la siguiente tabla:

Hallar la proposición lógica más simple equivalente a la siguiente proposición:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

$$\{(\sim p) * q\} \vee \{[\sim(p * q)] * [\sim\{(\sim p * q)\} * [(\sim p) * q]]\} \vee \sim p$$

14. Simplificar la proposición compuesta:

$$\{(\sim p \leftrightarrow q) \vee [(p \wedge \sim q) \vee \sim[(r \rightarrow s) \vee (q \rightarrow p)]]\} \Delta [q \wedge (p \rightarrow q)]$$

15. Enunciar una proposición t , lo más sencilla posible, que sea equivalente a $R \rightarrow S$, siendo:

$$R = p \Delta \{(p \Delta q) \vee [(r \wedge \sim p) \wedge (q \wedge \sim p)] \vee (p \wedge \sim q)\}$$

$$S = (\sim p \rightarrow q) \vee \{[\sim q \rightarrow (p \wedge r)] \wedge (p \rightarrow q)\}$$

16. Aplicando equivalencias lógicas, simplificar lo más posible las siguientes proposiciones:

$$P = \{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\} \vee \{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$$

$$Q = \{[\sim((\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q))] \vee (p \rightarrow r)\} \vee \sim(p \rightarrow q) \Delta [q \wedge ((t \wedge s) \rightarrow q)]$$

17. Si x e y son las proposiciones más simplificadas de los esquemas moleculares:

$$P = \{p \wedge [(q \wedge \sim r) \vee (r \vee \sim q)]\} \wedge \{(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \vee r)\}$$

$$Q = [\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)] \vee [p \rightarrow (q \wedge r \wedge \sim p)]$$

respectivamente, hallar $x \vee y$.

18. Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

$$a) \sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim q)] \equiv (p \rightarrow q) \quad b) \sim[(\sim p) \leftrightarrow q] \equiv (p \leftrightarrow q)$$

$$c) \sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \equiv (p \rightarrow \sim q)$$



1.14.2 IMPLICACIONES NOTABLES**1.1 Ley del Modus Ponens**

Su representación simbólica es: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

y su esquema clásico:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Si se afirma el antecedente de una premisa condicional se concluye en la afirmación del consecuente.

Ejemplo: "Si en verano hace calor, entonces en invierno hace frío"
 "En verano hace calor"

 Luego: "En invierno hace frío"

1.2 Ley del Modus Tollens

Su representación simbólica es: $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

y su esquema clásico:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Si se niega el consecuente de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente.

Ejemplo: "Si Ricardo Palma nació en Lima, entonces es limeño"
 "Ricardo Palma no es limeño"

 Luego: "Ricardo Palma no nació en Lima"

1.3 Ley del Silogismo Disyuntivo

Su representación simbólica es:

$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	o	$[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$
y su esquema clásico: $p \vee q$	o	$p \vee q$
$\neg p$		$\neg q$
$\hline \therefore q$		$\hline \therefore p$

Si se niega uno de los miembros de una premisa disyuntiva, se concluye en la afirmación del otro miembro.

Ejemplo: "Juan es abogado o es ingeniero"
 "Juan es abogado"

 Luego: "Juan es ingeniero"

1.4 Ley de la Inferencia Equivalente

Su representación simbólica es: $[(p \leftrightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

y su esquema clásico: $p \leftrightarrow q$

$$\frac{p}{\therefore q}$$

Si uno de los miembros de la premisa bicondicional es verdadera, entonces es verdadera el otro miembro.

Ejemplo: "Si x es múltiplo de 2, si y sólo si x es par"

" x es múltiplo de 2"

Luego: " x es par"

1.5 Ley del Silogismo Hipotético

Su representación simbólica es: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

y su esquema clásico: $p \rightarrow q$

$$\frac{q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$$

Si $p \rightarrow q$ es verdadero y $q \rightarrow r$ es verdadero, entonces $p \rightarrow r$ es verdadero. Esta ley indica que el condicional es transitivo.

Ejemplo: "Si x es un número real tal que $x^2+x-6=0$, entonces $(x+3)(x-2)=0$ "

"Si $(x+3)(x-2)=0$, entonces: $x=3$ ó $x=2$ "

Luego: "Si x es un número real tal que $x^2+x-6=0$, entonces $x=-3$ o $x=2$ "

1.6 Ley de la Transitividad Simétrica

Su representación simbólica es: $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

y su esquema clásico: $p \leftrightarrow q$

$$\frac{q \leftrightarrow r}{\therefore p \leftrightarrow r}$$

Si $(p \leftrightarrow q)$ es verdadera y $(q \leftrightarrow r)$ es verdadera, entonces $(p \leftrightarrow r)$ es verdadera. Esta ley indica la transitividad del bicondicional.

Ejemplo: "El viento sopla si y sólo si llueve"

"Llueve si y sólo si el cielo está nublado"

Luego: "El viento sopla si y sólo si el cielo está nublado"

1.7 Simplificación

Se simboliza por: $(p \wedge q) \rightarrow p$ ó $(p \wedge q) \rightarrow q$
 y su esquema clásico es:
$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \text{ó} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

De una premisa conjuntiva se puede concluir en cualquiera de sus componentes.

Ejemplos: (1) "5 es menor que 7 y 15 es múltiplo de 5, por tanto, 5 es menor que 7"

(2) "Sócrates fué un filósofo griego y Shakespeare fué un dramaturgo inglés por lo tanto, Shakespeare fué un dramaturgo inglés"

1.8 Adición

Se simboliza por: $p \rightarrow (p \vee q)$ ó $q \rightarrow (p \vee q)$
 y su esquema clásico es:
$$\frac{p}{\therefore p \vee q} \quad \text{ó} \quad \frac{q}{\therefore p \vee q}$$

Una disyunción está implicada por cualquiera de sus miembros.

Ejemplo: "Benjamin Franklin fué inventor del pararrayos. Por lo tanto, fué inventor del pararrayos o fué un hábil político americano".

1.9 Ley del Absurdo

Se simboliza por: $[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$ ó $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$
 y su esquema clásico es:
$$\frac{p \rightarrow (q \wedge \sim q)}{\therefore \sim p} \quad \text{ó} \quad \frac{\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)}{\therefore p}$$

Si una contradicción se deduce de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente.

1.15 LA DEMOSTRACION MATEMATICA

Ya hemos visto la importancia que tiene, en matemáticas, el uso de las proposiciones implicativas en diversas demostraciones, específicamente en la de teoremas.

Fundamentalmente existen dos formas de demostración matemática: la directa y la indirecta.

1.15.1 DEMOSTRACION DIRECTA

Según la tabla de verdad de la implicación, si p es falso, la proposición $p \rightarrow q$ es válida, cualquiera que sea el valor de verdad de q , entonces no habría nada que demostrar. Luego, interesan los casos de antecedente verdadero.

Cuando a partir de la verdad de p o de un conjunto de premisas de la forma:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \dots \wedge p \rightarrow q \quad (\alpha)$$

se deduce la verdad de la conclusión q , se dice que se ha usado una demostración directa.

EJEMPLO 1. Demostrar que: "Si $2x^2 + a < 9$ y $x=2$, entonces $a < 1$ "

Demostración. Sean $p: 2x^2 + a < 9$, $q: x=2$ y $r: a < 1$

Probaremos que: $(p \wedge q) \rightarrow r$ es válida.

En efecto:

(1) Para $x=2$ en p , tendremos la inferencia válida:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + a < 9 \\ x = 2 \\ \hline \therefore 2(2)^2 + a < 9 \end{array}$$

(2) Sea $t: 2(2)^2 + a < 9 \leftrightarrow t: a < 1$

Entonces se tiene que: $(p \wedge q) \rightarrow t$ es válida

(3) Ya que por hipótesis: $(p \wedge q)$ es verdadero

(4) Si aplicamos el Modus Ponens a (2) y (3), se tiene que el consecuente t se cumple.

(5) Luego, $t \equiv r$

(6) Por tanto, r se cumple, con lo que se ha demostrado que: $(p \wedge q) \rightarrow r$ es válida.

EJEMPLO 2. Comprobar la validez de la inferencia:

$$\begin{array}{r} p \wedge q \\ (p \wedge q) \rightarrow r \\ \hline r \rightarrow s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Solución. Probaremos que la siguiente condicional es una tautología.

$$(p \wedge q) \wedge [(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow s$$

En efecto:

$$(1) \quad (p \wedge q) \wedge [\neg(p \wedge q) \vee r] \wedge (\neg r \vee s) \rightarrow s \quad (\text{Cond. E.7a})$$

$$(2) \quad \equiv (p \wedge q) \wedge [\neg(p \wedge q) \vee r] \wedge (s) \rightarrow s \quad (\text{Abs. E.9a})$$

- (3) $\equiv [(p \wedge q) \vee r] \wedge s \rightarrow s$ (Abs. E.9b)
 (4) $\equiv \{ \neg[(p \wedge q) \vee r] \vee \neg s \} \vee s$ (Cond. E.7a)
 (5) $\equiv \neg[(p \wedge q) \vee r] \vee (\neg s \vee s)$ (Asoc. E.4b)
 (6) $\equiv \neg[(p \wedge q) \vee r] \vee (T)$ (Terc. Exc.T.3)
 (7) $\equiv T$ (Tautología) (Neutro: E.13c)

Por lo tanto, es válida la inferencia.

1.15.2 DEMOSTRACION INDIRECTA

Esta demostración se denomina también demostración por contradicción o por **reducción al absurdo**. Según el Modus Tollens se puede deducir la negación del antecedente de una condicional cuando se sabe que el consecuente es falso. Si el consecuente es una contradicción, se sabe que es lógicamente falso. Así de $p \rightarrow (q \wedge \neg q)$ se puede deducir $\neg p$. (Ley del absurdo).

EJEMPLO 1. Demostrar que: $5 > 3$

Demostración. Sea p : $5 > 3$

Se va ha demostrar que p es verdadera. En efecto:

- (1) Supongamos que $5=3$, o sea: $\neg p$
- (2) Entonces por (1): $5-3=2$ (q)
- (3) Pero: $5-3>0$, o sea no es 2 ($\neg q$)
- (4) Entonces de (2) y (3) tenemos: $q \wedge \neg q$
- (5) Luego, de (1) y (4): $\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)$
- (6) Según la ley del absurdo: $[\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)] \rightarrow p$
- (7) Aplicando el Modus Tollens a (5) y (6) se tiene que p es verdadera.

Nota. Una demostración indirecta se emplea también en enunciados o inferencias lógicas válidas que tienen la forma:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q \quad (\alpha)$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

- (1) Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa
- (2) De esta premisa adicional, junto con las premisas dadas, deducir una contradicción.
- (3) Establecer la conclusión deseada como deducción lógica de las premisas originales.

$$[(\neg q) \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n] \rightarrow \neg p_1 \quad (\beta)$$

Probaremos que (B) es equivalente a (A). En efecto:

$$\begin{aligned}
 (B) &\equiv [(\sim q) \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n] \rightarrow \sim p_1 \\
 &\equiv \sim[(\sim q) \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n] \vee \sim p_1 && \text{(Cond. E.7a)} \\
 &\equiv q \vee [\sim(p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n)] \vee \sim p_1 && \text{(Morg. E.6a)} \\
 &\equiv q \vee [\sim(p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n \wedge p_1)] && \text{(Morg. E.6a)} \\
 &\equiv \sim(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \vee q && \text{(Asoc. E.4a y Comm. E.3b)} \\
 &\equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q && \text{(Cond. E.7a)} \\
 (B) &\equiv (A)
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Si el contrato no se cumple, entonces la construcción del edificio no se terminará a fin de año. Si la construcción no se termina a fin de año, entonces el banco pierde dinero. Por lo tanto, si el contrato no se cumple, entonces el banco pierde dinero.

Solución. Sean p: El contrato se cumple

q: La construcción del edificio se termina

r: El banco pierde dinero

Entonces, la inferencia es:

$$(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow r)$$

Demostraremos que es válida por el método indirecto.

En efecto:

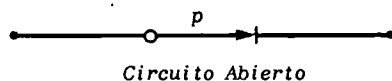
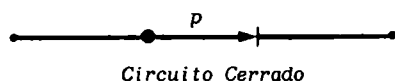
$$\begin{aligned}
 &(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge \sim(\sim p \rightarrow r) \rightarrow \sim(\sim q \rightarrow r) \\
 (p \vee \sim q) \wedge \sim(p \vee r) &\rightarrow \sim(q \vee r) && \text{(Cond. E.7a y E.7b)} \\
 (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim r) &\rightarrow (\sim q \wedge \sim r) && \text{(Morg. E.6b)} \\
 (\sim p \wedge \sim r) \wedge \sim q &\rightarrow (\sim q \wedge \sim r) && \text{(Abs. E.9b)} \\
 \sim p \wedge (\sim r \wedge \sim q) &\rightarrow (\sim q \wedge \sim r) && \text{(Asoc. E.4a)} \\
 [p \vee \sim(\sim r \wedge \sim q)] &\vee (\sim q \wedge \sim r) && \text{(Cond. E.7a)} \\
 p \vee [\sim(\sim r \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim q)] &&& \text{(Asoc. E.4b)} \\
 p \vee [T] &\equiv T && \text{(Tautología)} \\
 &&& \text{(Terc. Exc. T.3)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es válida la inferencia.

1.16 CIRCUITOS LÓGICOS

El valor de verdad de una proposición puede asociarse al pasaje de corriente en un circuito eléctrico controlado por un interruptor.

En efecto, para representar un interruptor mediante una proposición p , se tiene:



Es decir, el interruptor está cerrado (pasa corriente) si $V(p)=V$, y está abierto (no pasa corriente) si $V(p)=F$. De aquí establecemos una identificación entre las proposiciones y los interruptores de un circuito eléctrico. Las operaciones proposicionales (conjunción, disyunción, etc) pueden representarse mediante circuitos con tantos interruptores como proposiciones componentes. Considerando las clases de instalaciones: en serie y en paralelo, es factible diseñar esquemas de circuitos eléctricos para representar a proposiciones compuestas o viceversa.

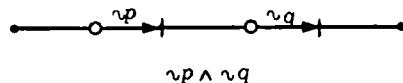
1.16.1 CIRCUITOS EN SERIE

Consideremos dos interruptores p y q conectados en serie:



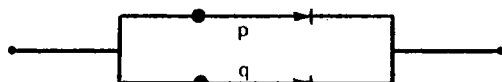
Se observa que este circuito admite paso de corriente cuando los dos interruptores p y q están cerrados, en cualquier otro caso no hay paso de corriente. De aquí tenemos el comportamiento de la conjunción de las proposiciones p y q . Por tanto:

- $p \wedge q$: representa un circuito cerrado en serie, que deja pasar corriente solo si los interruptores p y q están cerrados a la vez. Diremos que solo en este estado $p \wedge q$ es verdadera.
- $\neg p \wedge \neg q$: representa un circuito abierto en serie que deja pasar corriente. Diremos entonces que en este estado $\neg p \wedge \neg q$ es falsa.



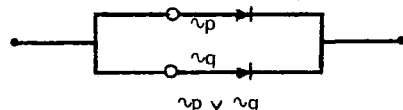
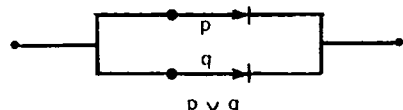
1.16.2 CIRCUITOS EN PARALELO

Consideremos ahora dos interruptores instalados en paralelo:



Se observa en el circuito que hay paso de corriente cuando uno de los interruptores o ambos están cerrados; no hay paso de corriente cuando los dos interruptores están abiertos. Tenemos, entonces, el comportamiento de la disyunción de las proposiciones p y q . La falsedad de $p \vee q$, es decir, el hecho de que no pase corriente, sólo se verifica en el caso de la falsedad si simultánea de $p \vee q$. Por tanto:

- a) $p \vee q$: representa un circuito cerrado en paralelo que deja pasar corriente si por lo menos uno de los interruptores eléctricos está cerrado. Diremos que sólo en este estado $p \vee q$ es verdadero.
- b) $\neg p \vee \neg q$: representa un circuito abierto en paralelo que no deja pasar corriente, por lo que en este estado $\neg p \vee \neg q$ es falsa.



Las representaciones anteriores nos permite diseñar o simbolizar redes de circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo, o también simplificar circuitos muy complicados haciendo uso de las ya conocidas equivalencias notables.

EJEMPLO 1. Diseñar circuitos lógicos de las siguientes proposiciones:

a) $(p \vee q) \wedge r$

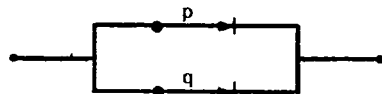
b) $p + q$

c) $p \leftrightarrow q$

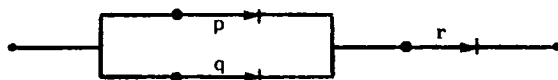
Solución. a) Vemos que $(p \vee q) \wedge r$ es la conjunción de $p \vee q$ y r , que deben estar conectados en serie:



Pero, $p \vee q$ se representa por:

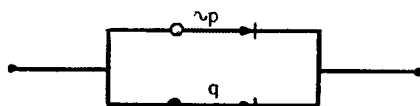


Luego, sustituyendo en (1), tendremos la representación pedida, esto es:



b) Según la condicional E.7a: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

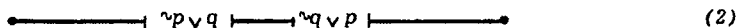
Luego, la representación de $p \rightarrow q$, es la disyunción (conexión en paralelo) de $\neg p \vee q$. Esto es:



c) De la equivalencia E.8a: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad (\text{Cond. E.7a})$$

Entonces, la representación de $p \leftrightarrow q$ es la conjunción (conexión en serie) de $(\neg p \vee q)$ y $(\neg q \vee p)$, esto es:



Pero $\neg p \vee q$ y $\neg q \vee p$, se representan, respectivamente, por:

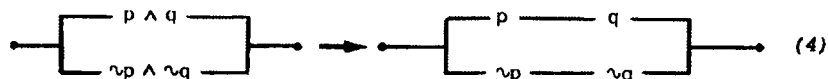


Sustituyendo en (2) se tiene:



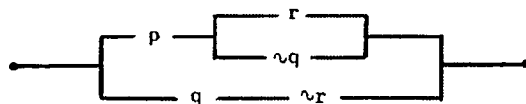
Pero, según la equivalencia E.8b: $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Representando la disyunción de $p \wedge q$ y $\neg p \wedge \neg q$, tendremos:



Los circuitos (3) y (4) son representaciones de $p \leftrightarrow q$; se dice entonces que (3) y (4) son circuitos equivalentes.

EJEMPLO 2. Describir simbólicamente el circuito:



Solución. Los pasos para simbolizar el circuito son:

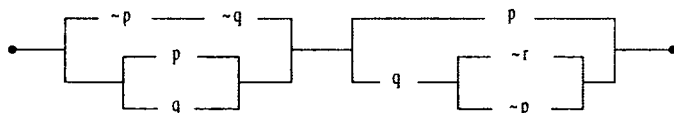
- (1) r y $\neg q$ están conectados en paralelo; se simboliza: $r \vee \neg q$
- (2) p y $(r \vee \neg q)$ están conectados en serie; se simboliza: $p \wedge (r \vee \neg q)$
- (3) q y $\neg r$ están conectados en serie; se simboliza: $q \wedge \neg r$
- (4) $p \wedge (r \vee \neg q)$ y $(q \wedge \neg r)$ están conectados en paralelo; se simboliza:

$$[p \wedge (r \vee \neg q)] \vee (q \wedge \neg r)$$

Este esquema molecular, llamado también **polinomio booleano**, representa simbólicamente el circuito dado.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

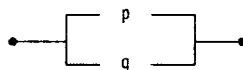
EJERCICIO 1. Determinar el circuito equivalente al circuito:



Solución. El esquema molecular que representa al circuito dado es:

$$\begin{aligned}
 & [(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)] \wedge \{p \vee [q \wedge (\sim r \vee \sim p)]\} \\
 & \equiv [(p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge \{p \vee q\} && (\text{Morg.E.6b y Abs.E.9d}) \\
 & \equiv [T] \wedge (p \vee q) && (\text{Terc.Exc.T.3}) \\
 & \equiv (p \vee q) && (\text{E.12: FNCb})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el circuito equivalente es:



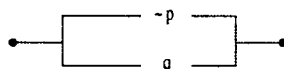
EJERCICIO 2. Construir el circuito lógico equivalente del esquema:

$$[(p \rightarrow q) \vee p] \wedge [(p \rightarrow q) \vee \sim p]$$

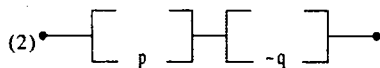
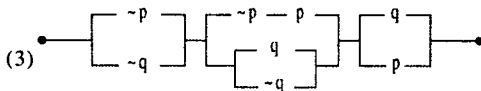
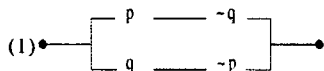
Solución. Según la condicional E.7a, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & [(\sim p \vee q) \vee p] \wedge [(\sim p \vee q) \vee \sim p] \\
 & \equiv [(\sim p \vee p) \vee q] \wedge [(\sim p \vee \sim p) \vee q] && (\text{Asoc. E.4b}) \\
 & \equiv [(T) \vee q] \wedge [(\sim p) \vee q] && (\text{T.3 y Idemp.E.12a}) \\
 & \equiv T \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p \vee q && (\text{E.12: FNDc y FNCc})
 \end{aligned}$$

Luego, el circuito lógico equivalente es:



EJERCICIO 3. La proposición $p \Delta q$ (Disyunción exclusiva) a cuales de los siguientes circuitos es equivalente?



Solución. Sabemos que $p \Delta q = (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

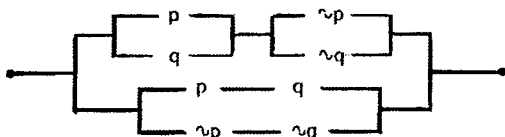
Simbolizando cada circuito dado se tiene:

$$\begin{aligned}
 (1): & (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p] && (\text{Dist. E.5a}) \\
 & \equiv [(p \vee q)] \wedge (\sim p \vee \sim q) && (\text{abs. E.5d}) \\
 & \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv p \Delta q \\
 (2): & (q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv p \Delta q \\
 (3): & (\sim p \vee \sim q) \wedge [(\sim p \wedge p) \vee (q \vee \sim q)] \wedge (q \vee p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge [(C) \vee (T)] \wedge (p \vee q) && (T.2 \text{ y } T.3) \\
 &\equiv \sim(p \wedge q) \wedge [T] \wedge (p \vee q) && (\text{Morg. E.6a y FNDc}) \\
 &\equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv p \Delta q \\
 (4): &(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p) \equiv [(p \vee \sim q) \wedge q] \vee [(p \vee \sim q) \wedge \sim q] && (\text{Dist. E.5a}) \\
 &\equiv (q \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) && (\text{Abs. E.9b}) \\
 &\equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q) \equiv p \Delta q
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p \Delta q$ es equivalente a los esquemas (1), (2) y (3).

EJERCICIO 4. Qué representa el circuito equivalente a:

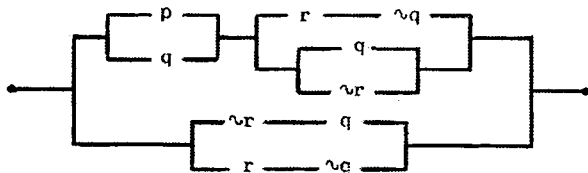


Solución. El polinomio booleano del circuito es:

$$\begin{aligned}
 &[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \\
 &\equiv [p \Delta q] \vee [(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)] && (\text{Disy. Exc.}) \\
 &\equiv (p \Delta q) \vee \sim[(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] && (\text{Morg. E.6a}) \\
 &\equiv (p \Delta q) \vee \sim(p \Delta q) && (\text{Disy. Exc.}) \\
 &\equiv T && (\text{Terc. Exc. T.3})
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el circuito representa una tautología.

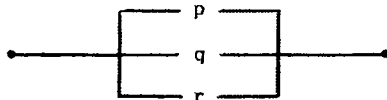
EJERCICIO 5. Hallar la menor expresión que representa el circuito:



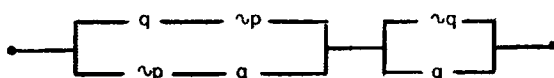
Solución. El esquema molecular representativo del circuito es:

$$\begin{aligned}
 &\{(p \vee q) \wedge [(r \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim r)]\} \vee \{(\sim r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)\} \\
 &\equiv \{(p \vee q) \wedge [\sim(q \vee \sim r) \vee (q \vee \sim r)]\} \vee \{(r \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r)\} && (\text{E.6b y E.3b}) \\
 &\equiv \{(p \vee q) \wedge [T]\} \vee (r \wedge \sim q) \vee q && (T.3 \text{ y Abs. E.9d}) \\
 &\equiv (p \vee q) \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q \vee r) && (\text{E.12: FNCb y Abs. E.9d})
 \end{aligned}$$

Por tanto, el circuito equivalente es:



EJERCICIO 6. Sea A el circuito lógico más simple correspondiente a la proposición: $[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [(p \wedge s) \vee (p \wedge \neg s)]$ y B el circuito lógico más simple equivalente a:



Construir el circuito lógico simplificado correspondiente a: $A + B$.

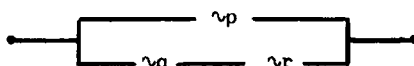
$$\begin{aligned}
 \text{Solución. } A &\equiv [p \wedge (q \vee r)] \wedge [p \wedge (s \vee \neg s)] && (\text{Dist. E.5a}) \\
 &\equiv [p \wedge (q \vee r)] \wedge [p \wedge (T)] && (\text{Terc. Exc. T.3}) \\
 &\equiv [p \wedge (q \vee r)] \wedge p && (\text{E.12: FNCb}) \\
 &\equiv p \wedge (q \vee r) && (\text{Idemp. E.2a})
 \end{aligned}$$

El esquema molecular correspondiente al circuito B es:

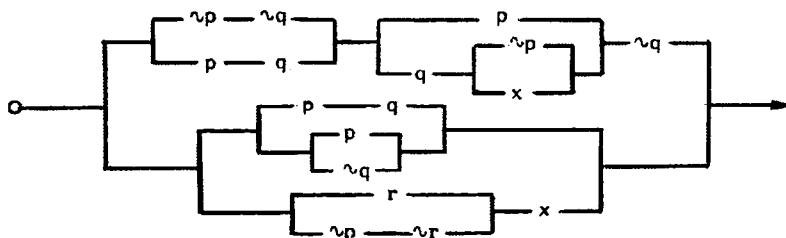
$$\begin{aligned}
 B &\equiv [(q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)] \wedge (\neg q \vee q) \\
 &\equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)] \wedge (T) && (\text{Asoc. E.4b y T.3}) \\
 &\equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \equiv \neg p \wedge q && (\text{E.12: FNCb y Idemp. E.2b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A + B &\equiv \neg A \vee B \equiv \neg[p \wedge (q \vee r)] \vee (\neg p \wedge q) \\
 &\equiv [\neg p \vee \neg(q \vee r)] \vee (\neg p \wedge q) && (\text{Morg. E.6a}) \\
 &\equiv [\neg p \vee (\neg p \wedge q)] \vee \neg(q \vee r) && (\text{Comm. E.3b}) \\
 &\equiv \neg p \vee \neg(q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) && (\text{Abs. E.9c y Morg. E.6b})
 \end{aligned}$$

Luego, el circuito simplificado de $A + B$, es:



EJERCICIO 7. Hallar la proposición x de manera que sea una tautología el circuito simplificado siguiente:



Solución. Designemos por P el esquema molecular de todo el circuito, Q el sistema molecular del circuito superior y R el esquema molecular del circuito inferior.

Entonces:

$$P = Q \vee R$$

(1)

$$Q \equiv \{(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\} \wedge \{p \vee [q \wedge (\neg p \vee x)]\} \wedge (\neg q)$$

Para observar la conjunción entre corchetes es suficiente hacer $x = \neg p$ y obtener:

$$Q \equiv [(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)] \wedge \{(p \vee q)\} \wedge (\neg q) \quad (\text{Abs. E.9d})$$

$$\equiv [(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] \wedge (\neg q) \quad (\text{Abs. E.9b})$$

$$\equiv [(p \wedge q)] \wedge (\neg q) \quad (\text{Abs. E.9a})$$

$$\equiv p \wedge (q \wedge \neg q) \equiv p \wedge C \equiv C$$

Luego, en (1): $P = C \vee R = R \quad (\text{E.12: FNDb})$

$$\rightarrow P \equiv [(p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)] \vee \{[r \vee (\neg p \wedge \neg r)] \wedge x\}$$

$$\equiv [(p \vee \neg q)] \vee [(r \vee \neg p) \wedge x] \quad (\text{Abs. E.9c y E.9d})$$

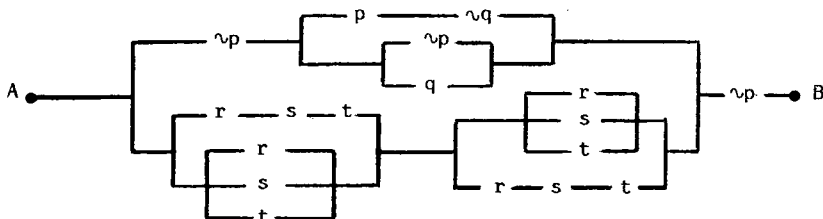
Si $x = \neg p \rightarrow P \equiv (p \vee \neg q) \vee [(r \vee \neg p) \wedge \neg p]$

$$\equiv (p \vee \neg q) \vee (\neg p) \equiv (p \vee \neg p) \vee \neg q \quad (\text{Abs. E.9b y Asoc. E.4b})$$

$$\equiv (T) \vee \neg p \equiv T, \text{ se cumple.} \quad (\text{T.3 y E.12:FNDc})$$

En consecuencia: $x = \neg p$

EJERCICIO 8. Construir el circuito lógico más simple equivalente a:



Solución. Sea Q el esquema molecular del circuito superior y R el esquema molecular del circuito inferior. Entonces, el circuito total es:

$$P \equiv (Q \vee R) \wedge \neg p \quad (1)$$

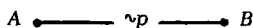
Siendo $Q \equiv \neg p \wedge [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)]$

$$\equiv \neg p \wedge [(p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q)] \quad (\text{Morg. E.6a})$$

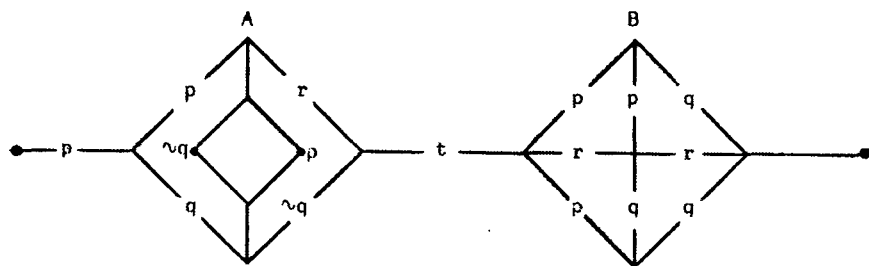
$$\equiv \neg p \wedge [T] \equiv \neg p \quad (\text{T.3 y E.12:FNCb})$$

Luego, en (1): $P \equiv (\neg p \vee R) \wedge \neg p \equiv \neg p \quad (\text{Abs. E.9a})$

Como se puede observar, no es necesario reducir el esquema molecular de R , pues éste está en la red de disyunciones que es absorbido por la conjunción de $\neg p$. En consecuencia, el circuito lógico más simple es:

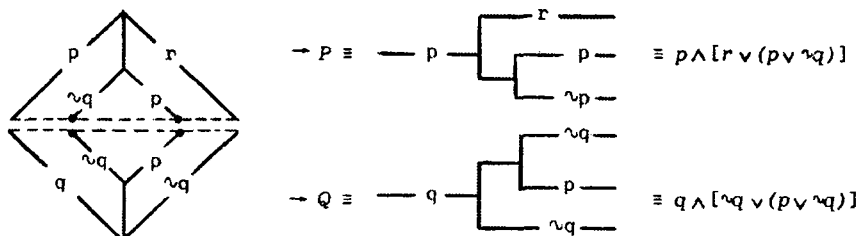


EJERCICIO 9. Si el costo de cada llave de instalación del circuito E de la figura adjunta es \$10, cuánto se ahorraría si se reemplaza éste por un circuito lógico más simple equivalente?



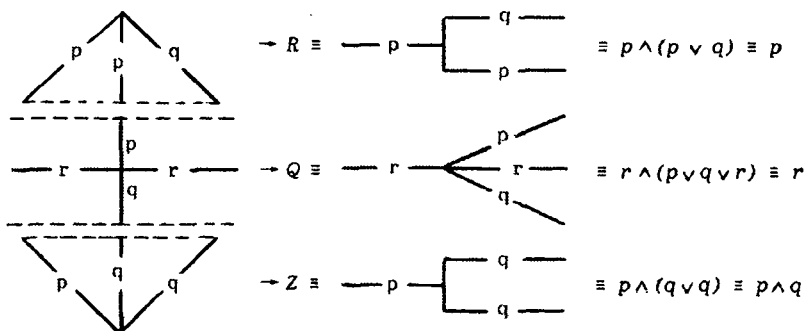
Solución El circuito lógico $E \equiv p \wedge A \wedge t \wedge B$ (1)

Para obtener el esquema molecular del circuito A, lo particionamos de la siguiente manera:



$$\begin{aligned}
 \text{Luego, } A &\equiv P \vee Q \equiv \{p \wedge [r \vee (p \vee \sim q)]\} \vee \{q \wedge [\sim q \vee (p \vee \sim q)]\} \\
 &\equiv \{(p \wedge r) \vee [p \wedge (p \vee \sim q)]\} \vee \{q \wedge [(\sim q \vee \sim q) \vee p]\} & (E.5a) \\
 &\equiv \{(p \wedge r) \vee p\} \vee \{q \wedge [\sim q \vee p]\} & (E.9a \text{ y } E.2b) \\
 &\equiv p \vee (q \wedge p) \equiv p & (E.9c \text{ y } E.9b)
 \end{aligned}$$

Análogamente, para el circuito B:



$$\text{Luego: } B = R \vee S \vee Z \equiv p \vee r \vee (p \wedge q) \equiv p \vee r$$

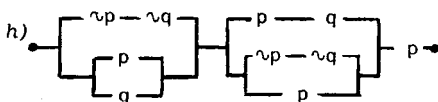
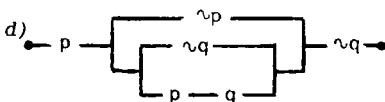
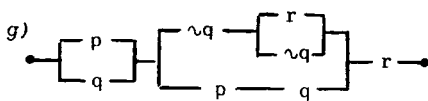
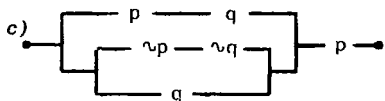
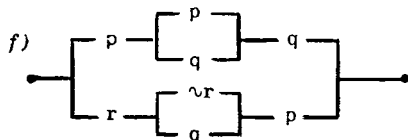
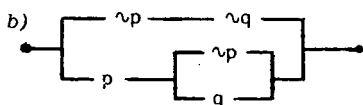
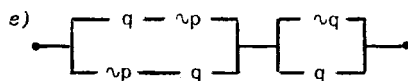
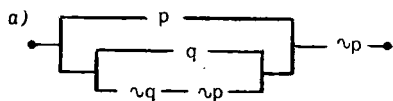
$$\text{Entonces en (1): } E \equiv p \wedge p \wedge t \wedge (p \vee r) \equiv p \wedge t$$

$$\text{Circuito equivalente: } \bullet \text{---} p \text{---} t \text{---} \bullet$$

Por lo tanto, se ahorraría: $16 \times 10 - 2 \times 10 = 140$ dólares

EJERCICIOS: Grupo 5

1. Determinar la menor expresión que representa al circuito dado:



2. Determinar los circuitos lógicos que representan a los siguientes esquemas moleculares:

a) $\sim[p + \sim(q \vee r)]$

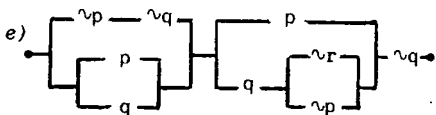
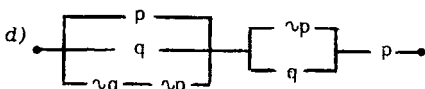
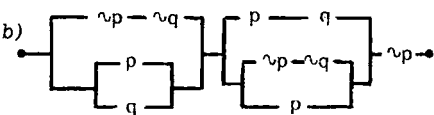
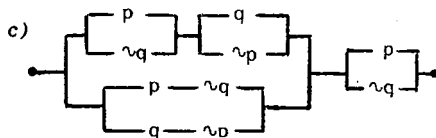
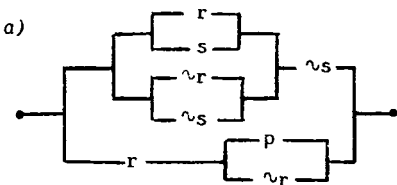
e) $(p \Delta q) + (q \Delta p)$

b) $(\sim p) \leftrightarrow (p + \sim q)$

f) $\{[(r \vee q)] \wedge p\} \vee \sim r \wedge . q$

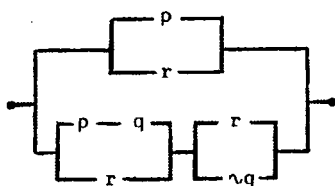
c) $(p \vee q) \rightarrow [(\sim p \vee q) + (p \wedge q)]$

3. Simplificar y hallar el equivalente a los circuitos dados:

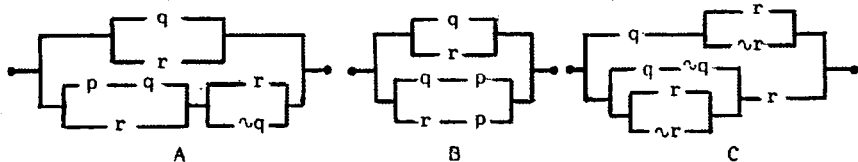


4. A un electricista se le da el diagrama del circuito siguiente:

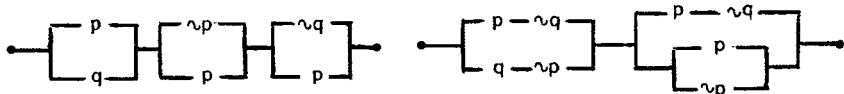
El quiere hacer una instalación lo más económica posible y que sea equivalente al circuito original. Si cada interruptor cuesta \$1.20 y no teniendo en cuenta el alambre, cuánto le costó la instalación y cuánto se ahorró?



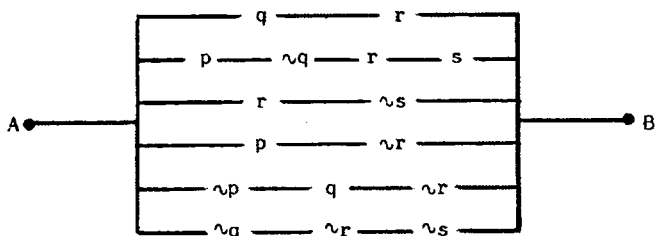
5. Demostrar que son equivalentes los circuitos A, B y C.



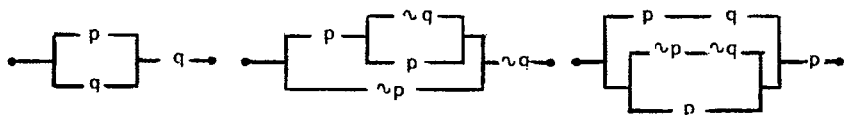
6. Demostrar que los siguientes circuitos son equivalentes a $p \Delta q$.



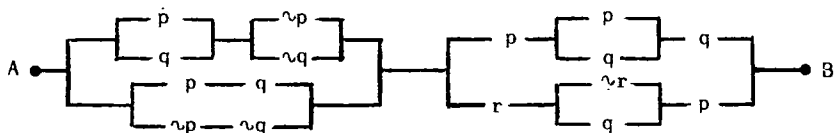
7. Construir el circuito más simple correspondiente al circuito:



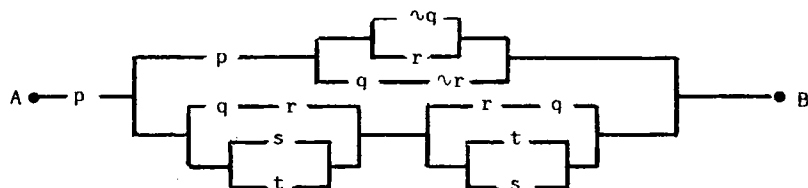
8. Hallar el resultado de conectar en paralelo los siguientes circuitos:



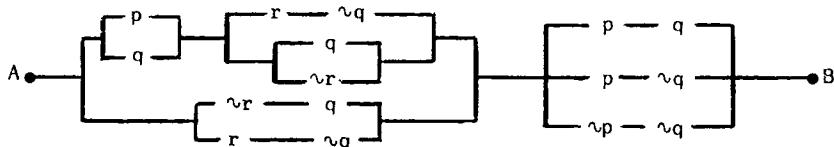
9. El costo de cada llave en la instalación del circuito siguiente es de \$15. ¿En cuánto se reducirá el costo de instalación si se reemplaza dicho circuito por el más simple posible?



10. Construir el circuito lógico más simple equivalente al circuito:



11. Sea P la proposición más simplificada del circuito lógico:

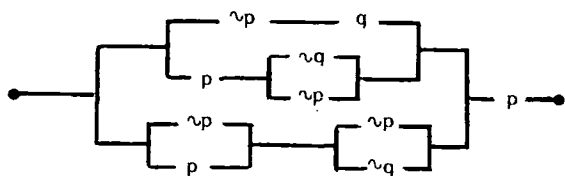


y sea Q la proposición más simplificada de

$$[(p \wedge s) \vee (p \wedge \neg s)] \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Construir el circuito lógico más simplificado correspondiente a $P + Q$

12. Sea P la proposición más simplificada del circuito lógico:

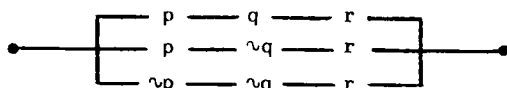


y sea Q la proposición más simplificada de: $s + \neg[w \Delta (\neg s + w)]$.

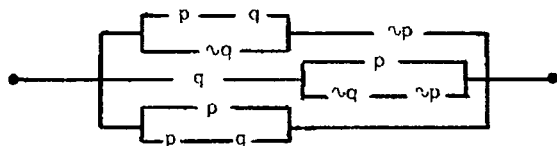
Si p, q, s, t, w son proposiciones lógicas cualesquiera tales que $P \leftrightarrow Q$ es verdadera y $\neg w + \neg s$ es falsa; hallar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(s \leftrightarrow \neg w) + \neg(\neg p \vee q)$ b) $\neg(\neg q + \neg p) + [(t \vee \neg w) + (w \wedge \neg p)]$

13. Construir el circuito lógico más simple equivalente a:



14. Sea A la proposición más simplificada del circuito lógico

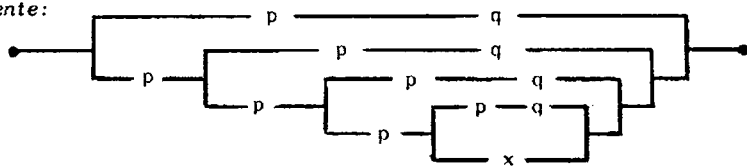


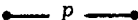
y B la proposición compuesta más simplificada de:

$$\{\neg(r \leftrightarrow \neg s) \Delta s\} \vee \{(\neg r \vee s) \wedge [s \vee (r \Delta s) \vee \neg r]\}$$

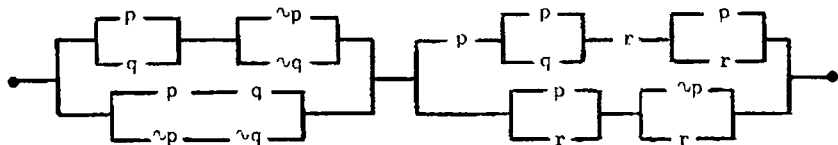
Hallar el valor de verdad de $A \leftrightarrow B$ sabiendo que la proposición compuesta: $\{[\neg p \rightarrow (q \vee r)] \wedge (\neg q)\} \rightarrow \{\neg r \rightarrow (\neg p \vee s)\}$, es falsa.

15. Hallar la proposición x más simple de manera que el circuito lógico siguiente:

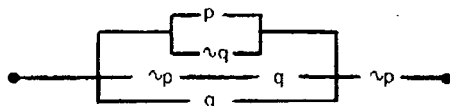


sea equivalente al circuito: 

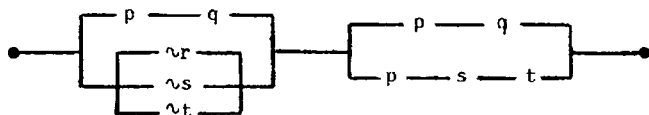
16. Simplificar lo más posible el siguiente circuito, siguiendo pasos ordenados y justificados.



17. Sea A el circuito lógico más simple equivalente al circuito:



y sea B, el circuito lógico más simple equivalente al circuito:



Construir el circuito lógico simplificado correspondiente a $A \rightarrow B$.



CAPITULO

2

CONJUNTOS

2.1 DEFINICION



La idea de conjunto es básica en el pensamiento humano. La idea es algo puramente intuitivo, algo no definido, pero si entendido por cada persona como resultado de su propia experiencia. Gracias a que la idea de un conjunto es algo ya entendido podemos identificarlo como una agrupación o colección de cualquier tipo de entidades u objetos que tienen propiedades comunes. Estos objetos se llama elementos o miembros del conjunto.

Ejemplos:

- (1) Los números 2, 3, 4, 5 forman un conjunto de cuatro elementos.
- (2) Los días de la semana forman un conjunto de siete días.
- (3) Las partes del automóvil forman un conjunto llamado Toyota 2003.

Nótese que en algunos casos, como en los ejemplos (1) y (2), los elementos del conjunto son abstractos, es decir, existen solo como ideas en la mente de una persona. En otros, como en el ejemplo (3), el conjunto consiste en objetos físicos reales.

2.2 NOTACION



Usualmente los conjuntos se denotan por letras mayúsculas:

$A, B, C, \dots, X, Y, Z$

y los elementos que lo determinan se designan por letras minúsculas:

$a, b, c, \dots, x, y, z$

Si un conjunto A está formado por los elementos 1, 2, a , b se escribe:

$$A = \{1, 2, a, b\}$$

y se lee: "A es el conjunto de los elementos 1, 2, a , b "

Se observa que los elementos van separados por comas y encerrados entre llaves $\{ \}$.

La relación de pertenencia se indica por la letra griega epsilon ϵ , de modo que:

$a \in A$ indica: $\begin{cases} a \text{ pertenece al conjunto } A \\ a \text{ es elemento del conjunto } A \end{cases}$

$3 \notin A$ indica: $\begin{cases} 3 \text{ no pertenece al conjunto } A \\ 3 \text{ no es elemento del conjunto } A \end{cases}$

2.3 DETERMINACION DE UN CONJUNTO

Existen dos maneras de especificar o determinar un conjunto dado: por **extensión** y por **comprensión**.

2.3.1 Por Extensión. Un conjunto queda determinado por extensión cuando se conocen individualmente todos sus elementos.

Ejemplos: (1) $A = \{a, e, i, o, u\}$. Se lee: "A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto castellano"

(2) $B = \{1, 2, 3, \dots\}$

Se lee: "B es el conjunto de elementos 1, 2, 3, ..." (los puntos sucesivos indican que posiblemente existan otros elementos)

(3) $C = \{a, \{b, c\}, d, e\}$

Se lee: "C es el conjunto de elementos a, el conjunto $\{b, c\}$, d, e". Aquí se puede observar que: $a \in C$, $\{b, c\} \in C$, $b \notin C$, $c \notin C$, $d \in C$, $e \in C$, $f \notin C$.

2.3.2 Por Comprensión. Un conjunto A queda determinado por comprensión, cuando éste se define por medio de una propiedad la cual deben satisfacer cada uno de sus elementos.

Si denotamos por x a un elemento cualquiera del conjunto A y por P a la propiedad característica, se escribe:

$$A = \{x | x \text{ cumple } P\} \quad \text{o} \quad A = \{x | P(x) \text{ es verdadera}\}$$

y se lee:

"A es el conjunto de los elementos x, tal que x cumple P" o

"A es el conjunto de los elementos x, tal que P(x) es verdadera".

(La barra vertical $|$ se lee "tal que" o "tales que")

Escribir $x \in A$ significa que x cumple la propiedad P y recíprocamente.

Ejemplos. (1) Si $A = \{a, e, i, o, u\}$, empleamos la letra x para expresar un elemento representativo del conjunto, escribiendo la propiedad característica en forma de enunciado abierto, esto es: $P(x): x \text{ es una vocal}$. Luego, se escribe: $A = \{x | x \text{ es una vocal}\}$

y se lee: "A es el conjunto de los elementos x , tales que x es una vocal".
El conjunto A también puede escribirse:

$$A = \{x | x \text{ es una letra del alfabeto, } x \text{ es una vocal}\}$$

Aquí la coma se lee "y".

(2) En $B = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$ se observa que sus elementos son números naturales múltiplos de 3, o sea la propiedad característica es $P(x): x$ es un número natural y múltiplo de 3.

Entonces: $B = \{x | x \text{ es un número natural y múltiplo de 3}\}$

2.4 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Desde un punto de vista intuitivo, un conjunto es finito si consta de un determinado número de elementos distintos, es decir, si consta de un primer y último elementos, o si al contar sus diferentes elementos, el proceso de contar se termina. En caso contrario, el conjunto es infinito.

Ejemplos: (1) $A = \{x | x \text{ es un día de la semana}\}$ es un conjunto finito

(2) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es un conjunto finito

(3) $C = \{x | x \text{ es un número par}\}$ es un conjunto infinito

(4) $D = \{x | x \text{ es un habitante de la tierra}\}$ es un conjunto finito aunque sea difícil contar los habitantes del mundo.

2.4 CONJUNTOS NUMERICOS

Los conjuntos numéricos que se estudian en matemáticas son: los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números irracionales, los números reales y los números complejos.

A continuación se hace una descripción muy simple de estos conjuntos con el objeto de hacer posible su empleo en temas posteriores.

(1) El conjunto de los números naturales

Es el conjunto denotado por N y cuyos elementos son empleados para regular la operación de contar.

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

(2) El conjunto de los números enteros

Es una extensión del conjunto de los números naturales, se denota por Z , y se escribe:

$$Z = \{-n, -\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Cuando se desea designar a los enteros positivos o negativos, se escri

$$\begin{aligned} \text{be:} \quad Z^+ &= \{1, 2, 3, 4, \dots, n\} \\ Z^- &= \{-n, -\dots, -4, -3, -2, -1\} \end{aligned}$$

Otras representaciones importantes del conjunto de los números enteros son:

$$\begin{aligned} Z_0^+ &= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n\} \\ \text{Enteros pares} &= \{x | x=2k, k \in Z\} \\ \text{Enteros impares} &= \{x=2k+1, k \in Z\} \end{aligned}$$

(3) El conjunto de los números racionales

Es el conjunto que se denota por Q y que es la solución de la ecuación $ax+b=0$, donde a y b son enteros, con $a \neq 0$. Se escribe:

$$Q = \{x | ax+b=0, a, b \in Z, a \neq 0\}$$

o bien:
$$Q = \{\dots, -\frac{b}{a}, \dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{b}{a}, \dots\}$$

Todo número racional b/a puede también ser representado mediante una expresión decimal exacta o periódica:

Por ejemplo: $\frac{1}{2} = 0.5$; $\frac{3}{4} = 0.75$; $\frac{2}{3} = 0.666\dots = 0.\widehat{6}$

(4) El conjunto de los números irracionales

Es el conjunto que se denota por I y está formado por los números que no son racionales, es decir, aquellos números que no pueden expresarse en la forma b/a , $a, b \in Z$ y $a \neq 0$

$$I = \{\dots, -\pi, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, e, \pi, \dots\}$$

(5) El conjunto de los números reales

Es el conjunto denotado por R y está formado por los conjuntos Q e I .

$$R = \{\dots, -\pi, -\sqrt{5}, -1/2, 0, 3/2, 2, \pi, \sqrt{17}, \dots\}$$

(6) El conjunto de los números complejos

Es el conjunto que se denota por C y cuyos elementos son de la forma: $a+bi$, donde $a, b \in R$ e $i=\sqrt{-1}$

$$C = \{a+bi | a, b \in R, i=\sqrt{-1}\}$$

2.6 CONJUNTOS ESPECIALES

2.6.1 Conjunto Vacío o Nulo. Es el conjunto que no tiene elementos. Se le denota simbólicamente por la letra griega ϕ (phi) y se define como:

$$\phi = \{x | x \neq x\}$$

y se lee: para cualquier x tal que, x es diferente de x , no es satisfecho

por algún elemento. Para indicar que un conjunto A no tiene elementos se escribe $A=\emptyset$, en caso contrario se escribe $A\neq\emptyset$.

Ejemplos:

- (1) $A=\{x\in\mathbb{R}|x^2+4=0\}$, es un conjunto vacío, pues la ecuación $x^2+4=0$ no tiene raíces reales. Luego, $A=\emptyset$
- (2) $B=\{x\in\mathbb{N}|5<x<6\}$, es un conjunto vacío porque no existe un número natural que sea mayor que 5 y menor que 6 a la vez. Luego, $B=\emptyset$
- (3) $C=\{x\in\mathbb{Z}|15x^2-11x+2=0\}$, es un conjunto vacío pues al resolver la ecuación $15x^2-11x+2=0$ se obtiene: $x=1/3$, $x=2/5$, que no pertenecen a $\mathbb{Z}$. Luego, $C=\emptyset$

2.6.2 Conjunto unitario. Es el conjunto que contiene uno y sólo un elemento.

Ejemplos:

- (1) $A=\{a\}$ es un conjunto unitario.
Como $a\in\{a\}$, resulta evidente que $a\neq\{a\}$
- (2) $B=\{x\in\mathbb{N}|x^2-4=0\}=\{2\}$, es un conjunto unitario.
- (3) $C=\{\{a\}\}$ y $D=\{\emptyset\}$ son conjuntos unitarios, pues $\{a\}\in C$ y $\emptyset\in D$.

Observación. Se debe tener presente que: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

$\{\emptyset\}$ es un conjunto unitario que está determinado por $\{x|x=\emptyset\}$, lo que asegura su existencia.

$\emptyset=\{\}$ es el conjunto vacío, el cual definimos por: $\emptyset=\{x|x\neq x\}$ y nos permite garantizar su existencia y que es único.

2.6.3 Conjunto Universal. El conjunto universal, llamado también **universo** del discurso y denotado por U , es un conjunto fijo del cual se toman otros conjuntos; es decir, que contiene a todos los conjuntos que podemos mencionar en una materia.

Los conjuntos más importantes en matemáticas son los conjuntos numéricos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{C}$, en ese orden.

Ejemplos. (1) El conjunto universal $U=\{x\in\mathbb{Z}|-2\leq x<7\}$ es universo de los conjuntos $A=\{-2,0,1,2\}$, $B=\{1,3,5,6\}$, $C=\{0,2,4\}$, porque todos los elementos de los conjuntos A, B y C pertenecen al conjunto U .

(2) Es el conjunto $U=\{0,1,2,3,4\}$, universo del conjunto $A=\{x^2|x\in U\}$?

En efecto, podemos observar que el conjunto A está formado por los cuadrados de los elementos de U , esto es: $A=\{0,1,4,9,16\}$.

LOGICA CUANTIFICACIONAL

2.7 FUNCION PROPOSICIONAL

Una función proposicional es todo enunciado abierto de la forma $p(x)$ que tiene la propiedad de convertirse en una proposición al ser sustituido la variable x por una constante c específica. El conjunto de todos los valores convenidos para la variable x recibe el nombre de **dominio de la variable**. Esto es, si representamos por D el dominio, diremos que x pertenece a D mediante la notación conocida: $x \in D$.

Entonces, según la definición de enunciado abierto, función proposicional sobre D es toda expresión $p(x)$ tal que $p(c)$ es verdadera o falsa para todo $c \in D$.

Ejemplos: (1) $p(x): x+5 < 11$

(3) $r(x): 2x^2-6$

(2) $q(x): 2x-3=7$

(4) $s(x): x$ es blanca

En (1), si x pertenece al conjunto de los números enteros, entonces $p(x)$ es una función proposicional, cuyo dominio son los números enteros, esto es, si $x = -2 \in \mathbb{Z} \rightarrow p(-2): -2+5 < 11$, es verdadera

$x = 7 \in \mathbb{Z} \rightarrow p(7): 7+5 < 11$, es falsa

Por tanto, $p(x)$ es una función proposicional

En (2), si $x=5 \rightarrow q(5): 2(5)-3=7$, es verdadera.

$x=2 \rightarrow q(2): 2(2)-3=1 \neq 7$, es falsa

Luego, $q(x)$ es una función proposicional

En (3), si $x=3 \rightarrow r(3): 2(3)^2-6=12$, no se le puede asignar ni V ni F, luego $r(x)$ no es una función proposicional.

En (4), si $x=tisa \rightarrow s(tisa):$ la tisa es blanca, es verdadera.

$x=pizarra \rightarrow s(pizarra):$ la pizarra es blanca, es falsa.

Luego, $s(x)$ es una función proposicional.

Observación. No se debe confundir entre el valor de verdad de una proposición (V o F) del valor de una función proposicional, para un cierto valor de la variable.

Por ejemplo, en la proposición $p(x):$ El autor de x

Si $x="El capital"$, entonces:

$p("El capital"):$ El autor de "El capital" = Carlos Marx

Se tiene: Valor de la función proposicional = Carlos Marx

Valor de verdad de la función proposicional = V

2.8 CUANTIFICADORES UNIVERSAL Y EXISTENCIAL

Hasta ahora hemos visto un método para obtener proposiciones a partir de una función proposicional $p(x)$. Hay otro método completamente distinto que permite obtener proposiciones a partir de una función proposicional: es el método de los llamados **cuantificadores**. Tomemos un ejemplo, sea la función proposicional:

$$p(x): x \text{ es un número primo} \quad (1)$$

Si a esta función proposicional anteponeamos la locución "Para todo x " obtenemos:

$$\text{"Para todo } x, x \text{ es un número primo"} \quad (2)$$

y con ello estamos indicando el sentido universal de dicha función proposicional; pues si afirmamos que, cualquiera que sea el objeto x , ese objeto x es un número primo, entonces habremos obtenido una proposición.

La locución "para todo x " se denomina el **cuantificador universal** y simbólicamente se le representa por $\forall x$.

Luego, la declaración (2) se puede escribir:

$$\forall x: x \text{ es un número primo} \quad (3)$$

Insistimos, pues, en que (1) es una función proposicional, en tanto que (3) es una proposición.

En términos generales, si se tiene una función proposicional $p(x)$, se puede tener de él una proposición mediante la adjudicación de un cuantificador universal, así:

$$\forall x:p(x) \quad \text{o} \quad \forall x|p(x) \quad \text{o} \quad (\forall x)[p(x)]$$

en todas ellas se lee:

$$\text{"Para todo } x, \text{ tal que, se verifique } p(x)\text{"}$$

La locución "para todo x " no es el único cuantificador que permite obtener proposiciones a partir de funciones proposicionales, existe otro llamado, **cuantificador existencial**.

Llamamos, en efecto, cuantificador existencial en x , a la frase "Existe x tal que". Si anteponeamos a la función proposicional (1) este nuevo cuantificador, se obtiene:

$$\text{"Existe } x \text{ tal que, } x \text{ es un número primo"} \quad (4)$$

Esta afirmación establece que hay por lo menos un objeto que es número primo. Por tanto, se ve que (4) admite la siguiente formulación sinónima:

$$\text{"Hay algún número primo"} \quad (5)$$

No cabe duda de que (5) es una proposición y, además, verdadera.

El cuantificador existencial en x "Existe x tal que" se simboliza $\exists x$, de modo que (4) se puede escribir del modo siguiente:

$$\exists x: x \text{ es un número primo} \quad (6)$$

En términos generales, si se tiene el esquema proposicional $p(x)$, puede obtenerse de él una proposición mediante la adjunción de un cuantificador existencial, así:

$$\exists x:p(x) \quad \text{o} \quad \exists x|p(x) \quad \text{o} \quad (\exists x)[p(x)]$$

y se lee:

"Existe por lo menos un x , tal que se verifique $p(x)$ "

El símbolo $\exists$ que significa: "existe" o "para algún" o "para al menos un" se llama **cuantificador existencial o particular**.

Ejemplo. Para el conjunto $A=\{-1,2,3,4\}$ se tiene:

- a) $\forall x \in A: 3x-2 < 12$, se lee: "Para todo $x \in A$, cumple $3x-2 < 12$ ", o "Cada $x \in A$ cumple $3x-2 < 12$ ".

y es una proposición verdadera porque todo elemento de A cumple la propiedad: $3x-2 < 12$.

- b) $\exists x \in A: x^2-2x=8$, se lee: "Existe (al menos uno) $x \in A$ tal que $x^2-2x=8$ " o "Algunos $x \in A$ cumplen: $x^2-2x=8$ ", que es una proposición verdadera, pues para $x=4$ se cumple la propiedad: $x^2-2x=8$.
- c) $\forall x \in A: x^2+3x+1 > 0$, se lee: "Cada $x \in A$ cumple $x^2+3x+1 > 0$ " o "Para todo $x \in A$, cumple $x^2+3x+1 > 0$ ". La proposición es falsa, pues para $x=-1 \in A$ no se cumple la propiedad: $x^2+3x+1 > 0$.

2.8.1 PROPOSICIONES UNIVERSALES

Una proposición universal es aquella que está provista de un cuantificador universal, y tiene la forma:

$$\forall x \in A: p(x)$$

Ejemplos. (1) Si $A=\{-1,1,2,3\}$ se tiene:

- a) " $\forall x \in A, x \in \mathbb{N}$ ", la proposición universal es falsa, pues hay al menos un elemento de A ($-1 \in A$) que no es número natural.
- b) " $\forall x \in A, 3x^2-x \geq 2$ ", la proposición es verdadera, pues cada uno de los elementos de A cumple la propiedad: $3x^2-x \geq 2$
- (2) "Todos los bolígrafos son azules"

Si representamos por B el conjunto de todos los bolígrafos, denotamos: " $\forall x \in B, x$ es azul". Obviamente la proposición es falsa, pues hay bolígrafo

fos que son rojos, negros, etc.

En general, la proposición universal: $\forall x \in A: p(x)$ es verdadera si la propiedad $p(x)$ lo es, es decir, se cumple con cada uno de los elementos de A , y es falsa si hay al menos un elemento de A que no cumple la propiedad $p(x)$.

2.8.2 PROPOSICIONES PARTICULARES O EXISTENCIALES

Se denomina proposición particular a aquella que está provista de un cuantificador existencial, y tiene la forma:

$$\exists x \in A: p(x)$$

Ejemplos. (1) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tenemos:

a) $\exists x \in A | 2x+1 > 8$, la proposición es verdadera, pues hay al menos un $x=4$ que cumple: $2x+1 > 8$.

b) $\exists x \in A | x^2+2x=5$, es falsa, pues ninguno de los elementos x de A cumplen la propiedad: $x^2+2x=5$.

(2) La proposición: $\exists x \in \mathbb{N} | x$ es par y primo. Es verdadera, pues $2 \in \mathbb{N}$ cumple la propiedad " x es par y primo".

En general, la proposición particular $\exists x \in A | p(x)$, es verdadera si en A hay al menos un elemento x que cumple $p(x)$, y es falsa si ningún elemento de A cumple $p(x)$, esto es, todo elemento de A no cumple $p(x)$.

Observación. Si la proposición particular $\exists x \in A | p(x)$, es verdadera para un único valor de x en A , se escribe:

$$\exists! x \in A | p(x)$$

y se lee: "Existe un único $x \in A$ tal que cumple $p(x)$ "

2.9 NEGACION DE PROPOSICIONES QUE CONTIENEN OPERADORES CUANTIFICACIONALES

Sea la proposición:

$$p(x): "x \text{ es un planeta habitable}"$$

Entonces la expresión $\forall x: p(x)$, es evidentemente falsa, y por lo tanto queremos afirmar su negación:

$$\sim [\forall x: p(x)]$$

que se lee:

"No para todo x , x es un planeta habitable"

y significa:

"Existe por lo menos un planeta que no es habitable"

o bien: "No todos los planetas son habitables"

Por lo tanto, la equivalencia del siguiente teorema, resulta evidente:

Teorema 1. La negación del cuantificador universal es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial respecto de la función proposicional negada.

$$\neg[\forall x:p(x)] \equiv [\exists x:\neg p(x)]$$

Si tenemos ahora la proposición:

$$\exists x:p(x)$$

que significa:

"Existe por lo menos un planeta que es habitable"

y que es una afirmación verdadera, entonces su negación es:

$$\neg[\exists x:p(x)]$$

que quiere decir:

"No existe x , tal que x sea un planeta habitable"

"Todos los planetas son no habitables"

"Para todo x , no es el caso de que x sea un planeta habitable"

Expresando simbólicamente, se tiene:

$$\forall x:\neg p(x)$$

Por lo que, la equivalencia del siguiente teorema es evidente:

Teorema 2. La negación de un cuantificador existencial es equivalente a la afirmación de un cuantificador universal respecto de la función proposicional negada.

$$\neg[\exists x:p(x)] \equiv [\forall x:\neg p(x)]$$

Observación. Estas dos negaciones de proposiciones que contienen cuantificadores se conocen también como los Teoremas de De Morgan.

En general, si representamos por A el conjunto de todos los valores convenientes para la variable x , tenemos:

Teorema 3. $\neg[\forall x \in A:p(x)] \equiv [\exists x \in A:\neg p(x)]$

O sea el enunciado:

"No es verdad que, para todo $a \in A$, $p(a)$ es verdadera"

es equivalente al enunciado:

"Existe un $a \in A$ tal que $p(a)$ es falso"

Teorema 4. $\neg[\exists x \in A: p(x)] \equiv [\forall x \in A: \neg p(x)]$

o sea el enunciado:

"No es verdad que existe un $a \in A$ tal que $p(a)$ es verdadero"
equivale al enunciado:

"Para todo $a \in A$, $p(a)$ es falso"

Por ejemplo, la negación de la proposición:

"Para todo número natural x , $x+3 \nmid 5$ "

Simbólicamente: $\neg[\forall x \in \mathbb{N}: x+3 > 5] \equiv [\exists x \in \mathbb{N}: x+3 \leq 5]$

2.10 FUNCIONES LOGICAS QUE CONTIENEN MAS DE UNA VARIABLE

De lo dicho en 2.7 para funciones proposicionales en una variable, en forma análoga se definen funciones proposicionales en varias variables. Por ejemplo:

x mato a y (1)

es una expresión en dos variables tal que, para cada sustitución de ambas variables por sendos nombres convenientemente elegidos, se obtiene una proposición. Así para: $x=\text{Bruto}$ e $y=\text{César}$, se produce la proposición:

$p(x,y)$: Bruto mato a César

Un ejemplo de función proposicional de tres variables es:

x vió que y mataba a z

la cual, para $x=\text{Napoleón}$, $y=\text{Bruto}$, $z=\text{César}$, produce la proposición:

$p(x,y,z)$: Napoleón vió que Bruto mataba a César

Otro ejemplo similar es: $x+y+z=1$ (2)

Para $x=2$, $y=3$, $z=-1$, produce la proposición:

$p(x,y,z): 4=1$

2.10.1 USO DE LOS CUANTIFICADORES

Si se coloca un cuantificador (universal o existencial) delante de una función proposicional de varias variables, no se obtiene una proposición sino una función proposicional de menor número de variables.

Por ejemplo, si aplicamos a (2) de 2.10 el cuantificador universal en x se obtiene:

$\forall x: x+y+z=1$ (3)

que es una función proposicional en dos variables: y, z .

Si a (3) aplicamos el cuantificador existencial en y , obtenemos:

$$\exists y: \forall x: x+y+z=1 \quad (4)$$

que es una función proposicional en la variable z .

Si a (4) le aplicamos el cuantificador universal en z , obtenemos:

$$\forall z: \exists y: \forall x: x+y+z=1 \quad (5)$$

que es una proposición. En el caso de que los individuos u objetos sean números, el sentido de esta proposición es el siguiente:

"Dado cualquier número z , existe por lo menos un número y tal que, para cualquier número x es: $x+y+z=1$ "

Para determinar su valor de verdad procedemos de la siguiente manera:

Como la proposición afirma para todo z , podemos tomar $z=-3$. Una vez fijado $z=-3$, la proposición afirma la existencia de un cierto número y , tal que cualquiera que sea x se debe cumplir:

$$x+y_0-3=1 \leftrightarrow y_0+x=4 \quad (6)$$

Ahora si tomamos $x=1$, la proposición afirma que:

$$y_0+1=4 \leftrightarrow y_0=3 \quad (7)$$

Pero como también podemos dar a x cualquier otro valor, tomamos $x=0$ y obtenemos, siempre para el mismo y_0 :

$$y_0+0=4 \leftrightarrow y_0=4 \quad (8)$$

Las igualdades (7) y (8) muestran que tal y debe valer simultáneamente 3 y 4, por lo cual no existe, y la proposición en cuestión (que afirmaba su existencia) es falsa.

Alteremos ahora el orden de los cuantificadores en (5) y obtengamos:

$$\forall z: \forall x: \exists y: x+y+z=1 \quad (9)$$

proposición que significa:

"Para números cualesquiera z y x existe un número y tal que: $x+y+z=1$ "

Aquí se dan primero los números arbitrarios z, x , luego se afirma para ellos la existencia de un y , tal que...etc. Luego, no debe considerarse que se trate siempre del mismo y . Así, por ejemplo, dados $z=2, x=1$, existe efectivamente un y , que es $y=-2$. Para $z=0, x=2$, existe también un y (distinto del anterior) que es $y=-1$. En consecuencia, la proposición (9) es verdadera. Como, según vimos, la proposición (5) es falsa, comprobamos que las proposiciones (5) y (9) no significan lo mismo. Esto muestra que una alteración en el orden de los cuantificadores puede alterar la proposición obtenida.

En resumen. La aplicación de n cuantificadores correspondientes a las n variables de una función proposicional, produce una proposición

que tiene un valor de verdad. Por ejemplo:

$$\forall x, \exists y: p(x, y) \quad \text{o} \quad \forall x, \forall y, \exists z: p(x, y, z)$$

El orden en que se aplican los cuantificadores es esencial; en algunos casos, al cambiar el orden de los cuantificadores cambia la proposición (o la función proposicional) obtenida.

Nota. La negación de una proposición cuantificada que contiene más de una variable puede averiguarse así:

$$\neg \forall x [\exists y: p(x, y)] \equiv \exists x \neg [\exists y: p(x, y)] \equiv \exists x, \forall y: \neg p(x, y)$$

Ejemplo. Sean $H = \{\text{Juan, Luis, Ruben}\}$ y $M = \{\text{Carmen, Patricia}\}$ y la función proposicional: "x es el hermano de y". Entonces:

$$\forall x \in H, \exists y \in M: p(x, y)$$

significa: "Para todo x de H existe un y de M tal que x es el hermano de y"
Es decir todo elemento de H es el hermano o bien de Carmen o bien de Patricia..

En cambio: $\exists y \in M, \forall x \in H: p(x, y)$

significa: "Existe un y de M para todo x de H tal que y es hermano de x"
Es decir, afirma que al menos una de las mujeres de Mes hermana de todos los hombres de H.

Como se puede observar, el orden diferente de los cuantificadores da lugar a una proposición diferente.

La negación de: $\forall x \in H, \exists y \in M: p(x, y)$

es: $\neg \forall x \in H, \exists y \in M: p(x, y) \equiv \exists x \in H, \forall y \in M: \neg p(x, y)$

significa: "Es falso que todo hombre de H es el hermano de al menos una mujer de M" y es equivalente a:

"Al menos uno de los hombres de H no es el hermano de ninguna mujer de M".

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Determinar por comprensión al conjunto:

$$A = \{3, 8, 15, 24, 35, 48\}$$

Solución. Emplearemos el método de las diferencias sucesivas que consiste en lo siguiente:

- Ordenar los elementos del conjunto dado en orden creciente.
- Efectuar las diferencias sucesivas entre dos elementos consecutivos hasta que resulten ser siempre iguales.
- Si estas diferencias resultan iguales en el primer, segundo o tercer in-

tento, entonces el polinomio que caracteriza a cada elemento del conjunto será de primer, segundo o tercer grado, respectivamente, esto es:

$$x = P(n) = an + b, \text{ en el primer intento}$$

$$x = P(n) = an^2 + bn + c, \text{ en el segundo intento}$$

$$x = P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d, \text{ en el tercer intento, etc.}$$

y donde: x es el elemento del conjunto dado.

$P(n)$ es el valor numérico de x para un $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario en términos de los coeficientes a, b, c , etc.

3	8	15	24	35	48
	5	7	9	11	13
	2	2	2	2	

La diferencia constante se obtuvo en el segundo intento, luego la propiedad común de cada elemento es: $x = P(n) = an^2 + bn + c$; $a \neq 0$

$$\text{Para } n=1 \rightarrow 3 = P(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$n=2 \rightarrow 8 = P(2) = 4a + 2b + c \quad (2)$$

$$n=3 \rightarrow 15 = P(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Resolviendo el sistema (1), (2) y (3), obtenemos: $a=1$, $b=2$, $c=0$

$$\text{Entonces: } x = n^2 + 2n \quad \therefore A = \{x | x = n^2 + 2n, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 6\}$$

Si asignamos otros valores para n , tales como $n=0$, $n=1$ y $n=2$, obtenemos:

$a=1$, $b=4$ y $c=3$ (verificar), luego, otra forma de definir por comprensión el conjunto A es: $A = \{x | x = n^2 + 4n + 3, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 5\}$

EJERCICIO 2. Cuántos de los conjuntos dados a continuación son vacíos.

$$a) A = \{x \in U | x = x, x \neq x\}$$

$$d) D = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 1 = 0\}$$

$$b) B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 + 3x + 2 = 0\}$$

$$e) E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 4 \wedge 2x - 3 = 0\}$$

$$c) C = \{x \in \mathbb{Q} | 3 < x < 5\}$$

$$f) F = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} | -x = x^{-1}\}$$

Solución. a) $A = \emptyset$, porque $\nexists x \in U | x = x$ y $x \neq x$ a la vez.

$$b) x^2 + 3x + 2 = 0 \leftrightarrow x = -1 \notin \mathbb{N} \text{ ó } x = -2 \notin \mathbb{N}. \text{ Luego } B = \emptyset$$

c) $C = \{7/2, 4, 9/2\}$. Todos son números racionales, entonces $C \neq \emptyset$

$$d) x^2 - 1 = 0 \leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1 \notin \mathbb{N}, \text{ luego: } D = \{1\} \neq \emptyset$$

e) No existe ningún número que satisfaga $(x^2 = 4) \wedge (2x - 3 = 0)$. $\therefore E = \emptyset$

$$f) -x = x^{-1} \leftrightarrow x^2 = -1 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{-1} = \pm i \notin \mathbb{R}, \text{ luego: } F = \emptyset$$

Por lo tanto, cuatro son conjuntos vacíos

EJERCICIO 3. Dada la proposición: "Si todos los números primos son impares, los números positivos son mayores que -1"

a) Expresarla simbólicamente

b) Negar oracionalmente la proposición.

Solución. Sea: $p(x)$ = números primos impares

$q(x)$ = números positivos mayores que -1

a) En símbolos se tiene: $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$

b) $\sim\{\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]\} \equiv \forall x[p(x)] \wedge \sim\forall x[q(x)]$ (Cond. E.7b)
 $\equiv \forall x[p(x)] \wedge \exists x[\sim q(x)]$

que se lee: "Todos los números primos son impares y algunos números no son mayores que -1 "

EJERCICIO 4. Dado el conjunto universal $U = \{-5, 6, 2/5, \sqrt{6}, \sqrt{-2}, 1+i, 0.2\}$

Determinar los siguientes conjuntos por extensión:

$A = \{x \in U | x \in R \leftrightarrow x \notin I\}$

$B = \{x \in U | x \in Q \rightarrow x \notin R\}$

$D = \{x \in U | x \notin N \vee x \notin Z\}$

$E = \{x \in U | x \in C \wedge x \notin N\}$

Solución. Conocidos los elementos de los conjuntos numéricos, construimos la siguiente tabla de valores de verdad:

U	A			B			D			E		
	$x \in R$	$\leftrightarrow$	$x \notin I$	$x \in Q$	$\rightarrow$	$x \notin R$	$x \notin N$	$\vee$	$x \notin Z$	$x \in C$	$\wedge$	$x \notin N$
-5	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V
6	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	F
2/5	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
$\sqrt{6}$	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
$\sqrt{-2}$	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
$1+i$	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
0.2	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V

Los elementos de los conjuntos A, B, D y E se eligen de los elementos del conjunto universal U, de la fila correspondiente con valores de verdad V. Esto es: $A = \{-5, 6, 2/5, 0.2\}$, $B = \{\sqrt{6}, \sqrt{-2}, 1+i\}$, $D = E = \{-5, 2/5, \sqrt{6}, \sqrt{-2}, 1+i, 0.2\}$

EJERCICIO 5. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las proposiciones:

$p = \exists x \in A | (x+2=6) \rightarrow (x-5=8)$, $q = \forall x \in A | (x+2 > 2) \vee (x+2 < 2)$ y

$r = \forall x \in A, \exists y \in A | x+y > 2$. Hallar el valor de verdad de: $s = \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \vee \sim r)]$

Solución. En p: para $x=4 \in A \rightarrow \begin{cases} (x+2=6) = (4+2=6) \text{ es V} \\ (x-5=8) = (4-5=8) \text{ es F} \end{cases}$

Luego: $V(p) = V(V \rightarrow F) = F$

En q se tiene: $(x > 0) \vee (x < 0)$. Todo elemento de A satisface $x > 0$, más no $x < 0$

Por tanto: $V(q) = V(V \vee F) = V$

En r , si $y=2\in A + x+2>2$ tiene como solución el conjunto A , o sea $V(r)=V$.

En consecuencia: $V(s) = \neg[(F + F) \wedge (V \vee F)] = \neg[V \wedge V] = F$

EJERCICIO 6. Hallar los valores de verdad de las negaciones de las proposiciones siguientes: $p=(\exists x \in \mathbb{N} | x+2=5) \wedge (\forall x \in \mathbb{N} | x^2 > x)$,

$q=(\forall x \in \mathbb{Z} | -x < 0) \vee (\exists x \in \mathbb{Z} | -x = x)$; $r=\exists x \in \mathbb{R} | \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$.

Solución. $\neg p = \neg[(\exists x \in \mathbb{N} | x+2=5) \wedge (\forall x \in \mathbb{N} | x^2 > x)]$
 $= \neg[(\exists x \in \mathbb{N} | x+2=5) \vee \neg(\forall x \in \mathbb{N} | x^2 > x)]$ (Morg. E.6a)
 $= [\neg(\exists x \in \mathbb{N} | x+2=5)] \vee [\neg(\forall x \in \mathbb{N} | x^2 > x)]$
 $= [\forall x \in \mathbb{N} | x+2 \neq 5] \vee [\exists x \in \mathbb{N} | x^2 \leq x]$ + $V(\neg p) = V(F \vee V) = V$

$\neg q = \neg[(\forall x \in \mathbb{Z} | -x < 0) \vee (\exists x \in \mathbb{Z} | -x = x)]$
 $= [\neg(\forall x \in \mathbb{Z} | -x < 0)] \wedge [\neg(\exists x \in \mathbb{Z} | -x = x)]$ (Morg. E.6b)
 $= (\exists x \in \mathbb{Z} | -x > 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{Z} | -x \neq x)$

En el primer paréntesis, si $x=-2 \in \mathbb{Z} + -(-2) > 0$, es V

En el segundo paréntesis, si $x=0 \in \mathbb{Z} + 0 \neq 0$, es F

Luego: $V(\neg q) = V(V \wedge F) = F$

$\neg r = \neg[\exists x \in \mathbb{R} | \sqrt{-x} \in \mathbb{R}] = \forall x \in \mathbb{R} | \sqrt{-x} \notin \mathbb{R}$

Si $x=-1 \in \mathbb{R} + \sqrt{-(-1)} = 1 \in \mathbb{R}$, luego: $V(\neg r) = F$

EJERCICIO 7. Negar la proposición: "Para todo número racional r existe un número entero n tal que $n \leq r < n+1$ "

Solución. Simbolizando la proposición, se tiene:

$$p = \forall r \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{Z} | n \leq r < n+1$$

Entonces: $\neg p = \neg[\forall r \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{Z} | n \leq r < n+1] = [\exists r \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z} | \neg(n \leq r \wedge n+1 > r)]$

$$\therefore \neg p = \exists r \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z} | (n > r) \vee (n+1 \leq r)$$

EJERCICIO 8. Negar oracionalmente el enunciado: "Para todo número real x , existe un número entero M tal que $x^2 < M+1$ siempre que $x < M$ "

Solución. Simbolizando el enunciado se tiene:

$$p = \forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{Z} | x < M + x^2 < M+1 \quad (q \text{ siempre que } p)$$

Entonces: $\neg p = \neg[\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{Z} | x < M + x^2 < M+1] = \exists x \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{Z} | \neg(x < M + x^2 < M+1)$
 $= \exists x \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{Z} | x < M \wedge \neg(x^2 < M+1)$ (Cond. E.7b)
 $= \exists x \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{Z} | x < M \wedge x^2 > M+1$

$\therefore$ "Existe un número real x , para todo número entero M , tal que $x < M$ y $x^2 > M+1$ "

EJERCICIOS: Grupo 6

1. Determinar por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0\}$$

$$C = \{(-1)^n (n-1) \mid n \in \mathbb{N}, n=3^0 < 13\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 0 \text{ y } x^2 < 20\}$$

2. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$$

$$D = \{1, 2/5, 1/4, 2/11, 1/7, \dots\}$$

$$B = \{-7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$E = \{-1, 1/2, 2, 7/2, 5, \dots\}$$

$$C = \{1, 3/5, 3/7, 1/3, 3/11\}$$

$$F = \{11/3, 9/2, 27/5, 19/3, 51/7\}$$

3. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{0, 3, 10, 21, 36, \dots\}$$

$$D = \{10, 15, 22, 31, 42, 55\}$$

$$B = \{2, 3, 6, 11, 18, \dots\}$$

$$E = \{-1, 2, -7/3, 5/2, -13/5, 8/3\}$$

$$C = \{-2, 7, 22, 43, 70, \dots\}$$

$$F = \{5, 95, 995, \dots, 9 \dots 95\}$$

7 veces

4. Dado el conjunto $A = \{4, 7, 12, 19, 28, 39, 52, 67\}$; determinar por comprensión un subconjunto de A cuyos elementos sean elementos del conjunto A que ocupen el lugar par.

5. Dado $U = \{1, \sqrt{3}, 6, -2/3, -1/5\}$, determinar por extensión los conjuntos:

$$A = \{x \in U \mid x+5 < 1 \wedge x-2 > 0\}$$

$$B = \{x \in U \mid x^2 > 0 \vee x=4\}$$

$$C = \{x \in U \mid x+1=5 \vee x-1=2\}$$

$$D = \{x \in U \mid x-1=0 \leftrightarrow x+1=0\}$$

6. Siendo el conjunto universal $U = \{-5, 2, 1/5, \sqrt{5}, \sqrt{-2}, 1+i, 0.\bar{3}\}$. Determinar los siguientes conjuntos por extensión:

$$A = \{x \in U \mid x \notin \mathbb{R} \vee x \in \mathbb{I}\}$$

$$D = \{x \in U \mid x \notin \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \in U \mid x \in \mathbb{I} \leftrightarrow x \in \mathbb{Q}\}$$

$$E = \{x \in U \mid x \notin \mathbb{C} \vee x \notin \mathbb{R}\}$$

7. Establecer la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 10x^2 - 13x - 3 = 0\} \text{ es un conjunto unitario}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 7\} \text{ es un conjunto vacío}$$

$$C = \{x \mid x \text{ es un punto de la recta } L\} \text{ es un conjunto finito}$$

$$D = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}, \text{ es un conjunto infinito}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^3 - 11x^2 - 4x + 4 = 0\}, \text{ es un conjunto unitario}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-2} + \sqrt{x-10} = 2\}, \text{ es un conjunto unitario}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 10x^3 + x^2 - 18x = 0\} \text{ y } H = \{x \mid x \text{ es una cifra del número } 1'106,360\} \text{ son iguales.}$$

8. Cuántas de las siguientes afirmaciones son falsas:

$$a) \phi = \{0\} \quad b) \{\phi\} = \{0\} \quad c) \phi = \{\phi\} \quad d) \phi \in \{\{\phi\}\}$$

9. Cuántos de los siguientes conjuntos son vacíos:

$$A = \{x \in U \mid x \neq U\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid (1/x) \in \mathbb{R}\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - x = 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0\}$$

10. Dada la proposición: "Si algunos números son impares, todos los triángulos son equiláteros". a) Expresar simbólicamente la proposición.
b) Negar oracionalmente la proposición.

11. Hallar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

$$a) (\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}, x+1 \nmid x)$$

$$b) (\neg \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \neq x) \vee (\neg \forall x \in \mathbb{Z}, x+1 \neq x-1)$$

$$c) (\neg \forall x \in \mathbb{N}, |x| \neq 0) \rightarrow (\neg \exists x \in \mathbb{Q}, |x| \neq 0)$$

$$d) (\exists x \in \mathbb{R}, x-3 \nmid |x|) \quad (\forall x \in \mathbb{R}, x-3 \nmid |x|)$$

12. Hallar la negación de las siguientes proposiciones:

$$a) \text{"Para todos los números enteros } a \text{ y } b, \text{ si } a < b \text{ entonces } b \nmid a"$$

$$b) \text{"Para todo número real } a, \text{ existe un número natural } n, \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } n > a"$$

$$c) \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}: ab = 0 \leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

$$d) \text{"Para todo entero } r, \text{ existe un número } b \text{ tal que, si } br \text{ es par, entonces } (b+1)r \text{ es par}"$$

$$e) \text{"Para todo número real } x \text{ existe un número entero } y, \text{ tal que } y \leq x < y+1"$$

13. Simbolizar usando cuantificadores y negar la proposición cuantificada:

$$a) \text{"Para todo número positivo } \epsilon, \text{ siempre existe un número } n, \text{ tal que para todo } n \text{ mayor que } n_0, \text{ se cumple } |a| \text{ es menor que } \epsilon"$$

$$b) \text{"Para todo } \epsilon > 0, \text{ hay un } y > 0 \text{ tal que para todo número } x, \text{ si } x \text{ está entre los números } a-y \text{ y } a+y \text{ entonces } f(x) \text{ está entre los números } L-\epsilon \text{ y } L+\epsilon"$$

14. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 5, 6\}$, establecer el valor de verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones:

$$a) \forall x \in A, \exists y \in B: x+y < 3$$

$$c) \forall x \in B, \forall y \in A: x < y \rightarrow x^2 < y^2$$

$$b) \exists ! y \in B, \forall x \in A: x-y > 1$$

$$d) \exists x \in A, \exists y \in B: (x-y) \in A$$

15. Sean $A = \{4, 2, 3, 1\}$, $B = \{5, 1, 4, 8\}$. Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

$$a) \exists x, y \in A \mid x+y > z, \forall z \in B$$

$$c) \forall x \in B, \exists y \in A \mid (x-y) \in A$$

$$b) \neg \{ \forall x \in A, \exists y \in B \mid x > y \}$$

$$d) \forall x \in A, \forall y \in B \mid x+y < 10$$

16. Dadas las proposiciones: $p = \forall x \in A, \exists y \in A: (x^2 > xy - 52)$, $q = \exists x \in A, \forall y \in A: \neg (x+y \neq 0)$,

$$r = \forall x \in A, \forall y \in A: \left(\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y \right), \text{ y el conjunto } A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -50 \leq x < 50\}. \text{ Hallar el valor de verdad de: } (p \wedge q) \leftrightarrow \neg (r \vee \neg p)$$

17. Sea $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 21\}$ y sean las proposiciones:

$$p: \forall x \in U, \forall y \in U \mid 40x - 3y > 15$$

$$r: \forall x \in U, \forall y \in U \mid 25x^2 + 17xy + 9y^2 > 204$$

$$q: \exists x \in U, \forall y \in U \mid xy + y = 3y$$

$$s: \exists x \in U \mid 311 < x^2 + 10 < 335$$

Determinar el valor de verdad de: $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(r \wedge s) \rightarrow q]$

18. Dado el conjunto universal: $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y dadas las proposiciones:

$$p: \exists x \in U, \forall y \in U \mid x + y = x ; q: \forall x \in U, y \in U \mid x + y = x ; r: \forall x \in U, y \in U \mid x + y = 0.$$

Hallar el valor de verdad de: $\{[p \wedge (x \wedge y)] \leftrightarrow [q \vee (m \wedge n)]\} \wedge (r \rightarrow q)$

19. Dadas las proposiciones $p: \forall x \in U \mid x > 3 \vee x < 2$; $q: \exists x \in U \mid x^2 = 2 + x > 1$

$r: \forall x \in U \mid \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$; donde $U = \{x \in \mathbb{A} \mid x > 2 + x < 2\}$ y $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Hallar los valores de verdad de s, t y v si se sabe que:

$$[(\neg p \vee s) \wedge (t \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge v) \equiv F$$

20. Dadas los conjuntos $U = \{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{-2}, 2, -2, 0\}$; $A = \{x \in U \mid x \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{x \in U \mid x \in \mathbb{A}\}$

sabiendo que $p: \exists x \in A \mid x^2 < 0$; $q: \forall x \in B \mid \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$; $r: \forall x \in U, \exists y \in U \mid x + y = 0$;

$s: \exists x \in U, \forall y \in U \mid x + y = x$. Hallar el valor de verdad de $M = (\neg p \vee \neg q) \vee (r \leftrightarrow \neg s)$

21. Sea $U = \{0, \sqrt{2}, \pi, -3, \sqrt{-1}\}$ y las proposiciones $p: \exists x \in U \mid x^2 = -1$; $q: \forall x \in U \mid x^0 = 1$;

$r: \forall x \in U \mid \frac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3$; $s: \exists x \in U \mid \pi + x = \pi$. Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones: $A = (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \leftrightarrow p)$;

$$B = (q \wedge \neg r) \vee (r \rightarrow \neg q) ; C = (r \leftrightarrow s) \wedge (r \rightarrow \neg p) ;$$

$$D = [(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow (s \wedge \neg p)$$

22. Dadas las siguientes proposiciones: $p = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$; $q = \{\exists x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1\}$;

$r = \forall x \in \{2, 4, 5, 6, 7\}, 3x + 1 > 22$; $s = \{\exists x \in \mathbb{N} \mid 4x - 6 = 20\}$; $t = \exists x \in \mathbb{I} \mid x + 1 = \pi$. Hallar el valor de verdad de: $P = [(s \wedge m) \rightarrow (t \vee n)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (r \vee \neg s)]$

23. Sea $U = \{-1, 0, 1, 2, 1/2, \sqrt{2}, \sqrt{-2}, \pi\}$ y las relaciones: $a * b = \neg a \rightarrow (b \wedge a)$;

$a \# b = a \leftrightarrow \neg b$; $a \Delta b = \neg a * b$; $a \Theta b = \neg(\neg a \# \neg b)$. Determinar el valor de verdad de:

a) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow [(s \vee \neg t) \wedge (m \vee n)]$; b) $(\neg s \rightarrow p) \leftrightarrow (q \wedge t)$, donde:

$$p: \forall x \in A, \exists y \in A \mid xy \neq 0 ; q: \neg \exists x \in B, \forall y \in B \mid x + y > 2x ; s: \forall x \in C, \forall y \in C \mid x^y = y^x ;$$

$$t: \neg [\forall x \in D, \exists y \in D \mid \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y] , \text{ siendo: } A = \{x \in U \mid (x^2 - 1/2) * (x \neq \pi)\}$$

$$B = \{x \in U \mid (x = 1) \# (x < 1)\}, C = \{x \in U \mid (\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1) \Delta (x^2 \in \mathbb{Z})\}; D = \{x \in U \mid (x^2 > 0) \Theta (x \neq 0)\}$$



2.11 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

2.11.1 CONJUNTOS IGUALES Dos conjuntos A y B , se dice que son iguales o idénticos si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos. Esto es, para un x :

$$A = B \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in A \rightarrow x \in B \\ \text{y si } x \in B \rightarrow x \in A \end{array} \right\} \quad x \in A \leftrightarrow x \in B$$

Si A y B no son iguales, entonces se denota: $A \neq B$

o bien: $A \neq B \leftrightarrow (\exists x \in A | x \notin B) \vee (\exists x \in B | x \notin A)$

Ejemplos:

a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 1, 3, 2, 3\}$

Los conjuntos A y B tienen los mismos elementos 1, 2, 3; aunque el orden y la repetición de los elementos en B no altera el conjunto, por tanto $A=B$

b) $C = \{-1/2, 3\}$ y $D = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$

D es el conjunto solución de la ecuación: $2x^2 - 5x - 3 = 0 \leftrightarrow x = -1/2$ ó $x = 3$ que son precisamente los elementos de C . Luego, $C=D$.

c) $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{x \in \mathbb{Z} | 1 < x \leq 4\}$

$F = \{2, 3, 4\}$, entonces: $E \neq F$, porque $1 \in E | 1 \notin F$

Propiedades de la Igualdad de Conjuntos

a) $A = A$ (Reflexividad)

b) $A = B \rightarrow B = A$ (Simétrica)

c) $A = B$ y $B = C \rightarrow A = C$ (Transitividad)

2.11.2 CONJUNTOS EQUIVALENTES Dos conjuntos no vacíos A y B se dice que son equivalentes o coordinables, si existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre todos sus elementos, es decir, que pueden formarse parejas de tal manera que cada pareja está formada por un elemento de cada conjunto empleando todos los elementos de ambos conjuntos una sola vez.

Si A y B son equivalentes se denota: $A \approx B$, y si no lo son se denota: $A \not\approx B$

Por ejemplo los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$ son equivalentes, ya que sus elementos están en correspondencia uno a uno, esto es:

$$\begin{array}{ll} 1 \leftrightarrow a & 1 \leftrightarrow b \\ 2 \leftrightarrow b & 2 \leftrightarrow a \end{array}$$

En cambio $\{1, 2, 3\} \not\approx \{a, b\}$, ya que podemos formar parejas: 1 con a y 2 con b

pero el conjunto $\{a, b\}$ no tiene otro elemento para formar parejas con 3.

Observación. Si A y B son conjuntos, entonces:

$$i) A = B \rightarrow A \subseteq B$$

$$ii) A \subseteq B \nrightarrow A = B$$

2.11.3 INCLUSION Y SUBCONJUNTOS

Un conjunto A está incluido o está contenido en un conjunto B , si todo elemento de A es elemento de B . Indicamos esto escribiendo $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$, es decir:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\leftrightarrow [x \in A \rightarrow x \in B] \\ &\leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B) \end{aligned}$$

que significa: " A está incluido en B " o " A está contenido en B "

" A es subconjunto de B " o " A es parte de B "

La negación de $A \subseteq B$ se escribe $A \not\subseteq B$ o $B \not\supseteq A$ y establece que existe un $x \in A$ tal que $x \notin B$, esto es:

$$A \not\subseteq B \leftrightarrow \exists x \in A | x \notin B$$

Ejemplos:

- (1) Consideremos los conjuntos: $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 3, 5, 6\}$ y $C = \{4, 6, 8\}$. Entonces $A \subseteq B$ ya que todo elemento de A está en B , pero $C \not\subseteq B$ porque $8 \in C$ y $8 \notin B$.
- (2) Si $A = \{\text{Triángulos equiláteros}\}$ y $B = \{\text{Polígonos regulares}\}$, entonces $A \subseteq B$ porque el triángulo equilátero es un polígono regular.
- (3) El conjunto $A = \{2, 3, 5\}$ es subconjunto del conjunto $B = \{5, 2, 3\}$, ya que cada número 2, 3 y 5, que pertenece a A también pertenece a B . Esto es: $A = B$. En este ejemplo vemos que $A \subseteq B$ no excluye la posibilidad de que $A = B$. En efecto, podemos dar una nueva definición de igualdad de conjuntos como sigue:

Definición. Dos conjuntos A y B se dice que son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Formalmente:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

En caso de que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se dice que A es un **subconjunto propio** de B .

Propiedades de la Inclusión

S.1: Reflexividad. Todo conjunto es subconjunto de si mismo.

$$A \subset A$$

En efecto, si A es un conjunto, la implicación: $\forall x \in A: x \in A \rightarrow x \in A$ es siempre verdadera (recordar que: $p \rightarrow p$ es una tautología)

En consecuencia, por definición, se tiene: $A \subset A$

S.2: Antisimetría. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte del primero entonces son iguales.

$$A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$$

es una consecuencia de la definición de igualdad.

En efecto, si $A \subset B$ y $B \subset A$, supongamos que: $A \neq B$

Entonces, por definición: $\exists x \in A | x \notin B$ ó $\exists x \in B | x \notin A$

es decir, $A \not\subset B$ ó $B \not\subset A$, que es lo contrario de la hipótesis.

Por lo tanto: $A=B$.

S.3: Transitividad. Si un conjunto es parte de otro y éste es parte de un tercero, entonces el primero está incluido en el tercero

$$A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$$

En efecto, si $x \in A$, por hipótesis se tiene:

$$x \in A \rightarrow x \in B \text{ es verdadera}$$

$$\text{y } x \in B \rightarrow x \in C \text{ es verdadera}$$

Entonces, por la ley del silogismo hipotético:

$$x \in A \rightarrow x \in C \text{ es verdadera}$$

y en consecuencia, por definición de inclusión: $A \subset C$

S.4: El conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto, excepto de si mismo: $\forall A, \emptyset \subset A$

En efecto, la siguiente proposición:

$\forall x: x \in \emptyset \rightarrow x \in A$, es verdadera $\forall A$ ($F \rightarrow p$, $\forall p$ es una tautología) pues, el antecedente $x \in \emptyset$ es falso.

Por tanto, según la definición de inclusión: $\emptyset \subset A$

2.11.4 CONJUNTOS DISJUNTOS. Se dice que dos conjuntos A y B son disjuntos si no tienen ningún elemento común. Se simboliza:

$$A \text{ disjunto con } B \leftrightarrow \neg \exists x | x \in A \wedge x \in B$$

Ejemplos: Son conjuntos disjuntos:

- a) $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{1,2,3\}$
 b) $A=\{x \in \mathbb{N} | x \text{ es par}\}$ y $B=\{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar}\}$
 c) En el sistema de los conjuntos numéricos: $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$

2.11.5 CONJUNTOS COMPARABLES

Se dice que dos conjuntos A y B son comparables si $A \subset B$ ó $B \subset A$. Esto es,

si uno de los conjuntos es subconjunto del otro. Si los conjuntos A y B no son comparables, entonces: $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

Ejemplos. a) Si $A=\{2,3,4\}$ y $B=\{1,2,3,4,5\}$, entonces A es comparable con B porque $A \subset B$.

b) En el sistema de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son conjuntos comparables porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

c) Si $A=\{3,4,5,6,7\}$ y $B=\{2,3,5,6\}$, entonces A y B no son comparables porque $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

2.11.6 CONJUNTO DE CONJUNTOS

Es el conjunto que tiene como elementos a otros conjuntos. Se le denomina

también: familia, colección o clase de conjuntos.

Si un conjunto tiene elementos que son conjuntos y otros que no son conjuntos, entonces este conjunto no es conjunto de conjuntos.

Ejemplos. $A=\{\{1\}, \phi, \{1,2\}, \{a,b\}\}$ es un conjunto de conjuntos.

$B=\{\phi, b, \{a,b\}, \{1,2\}\}$ no es un conjunto de conjuntos porque tiene un elemento b que no es conjunto.

2.11.7 CONJUNTO POTENCIA

Dado un conjunto A , se denomina conjunto potencia o conjunto de partes de A , al

conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A . Se denota: $P(A)$.

O sea, en símbolos: $P(A) = \{X | X \subset A\}$

Los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos, y en consecuencia, $P(A)$ es un conjunto de conjuntos.

Según la definición se tiene:

$$X \in P(A) \leftrightarrow X \subset A$$

Por ejemplo, si $A=\{a,b,c\}$, los subconjuntos propios de A son: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ y ϕ

Entonces, de aquí, el conjunto potencia de A es:

$$P(A) = \{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \phi\}$$

Observaciones. (1) El número de elementos de $P(A)$ es igual a 2^n , donde n es

el número de elementos del conjunto A .

(2) $\phi \in P(A)$, puesto que $\phi \subset A$

(3) $A \in P(A)$, puesto que $A \subset A$

Propiedades: P.1: $P(\phi) = \{\phi\}$

P.2: Si $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

P.3: Si $A=B \leftrightarrow P(A) = P(B)$

Demostración de P.2:

En efecto: (1) $A \subset B$

(Hipótesis)

(2) Supongamos que $X \in P(A) \rightarrow X \subset A$

(Def. Pot.)

(3) Como $A \subset B \rightarrow X \subset B$

(Transitividad)

(4) Entonces: $X \in P(B)$

(Def. Pot.)

(5) Luego, de (2) y (4): $X \in P(A) \rightarrow X \in P(B)$

(6) Por lo tanto: $P(A) \subset P(B)$

(Def. $\subset$)

2.12 REPRESENTACION GRAFICA DE CONJUNTOS

Con el objeto de mostrar los elementos de los conjuntos o para visualizar relaciones entre éstos, existen los llamados **diagramas de Venn Euler**, que son regiones del plano limitados por líneas geométricas. El conjunto universal U suele representarse por un rectángulo, y los subconjuntos de U por circunferencias, elipses, triángulos, etc, como se indica en el siguiente diagrama (Figura 1)

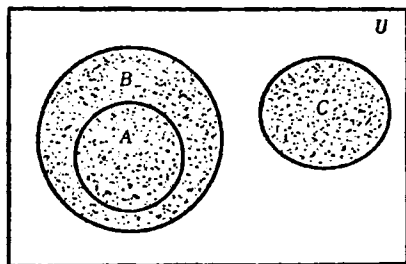


Figura 1

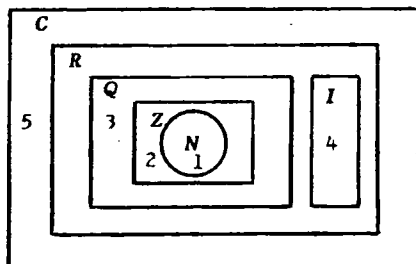


Figura 2

En la Figura 1 se puede observar que:

a) A es un subconjunto propio de B

b) A y B son disjuntos o no comparables respecto de C .

La Figura 2 es la representación gráfica de los Conjuntos Numéricos

Observaciones

- a) El conjunto de los números complejos C , es el conjunto universal.
 b) $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$
 c) El conjunto I es disjunto respecto de los conjuntos N , Z y Q
 d) Si enumeramos los recintos cerrados de los conjuntos numéricos, tendremos: $C=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{1,2,3,4\}$, $Q=\{1,2,3\}$, $Z=\{1,2\}$, $N=\{1\}$, $I=\{4\}$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Dado el conjunto $A=\{a,\{b,c\},d\}$; qué afirmaciones son incorrectas y porque?

Solución. Los elementos del conjunto A son: a , d y el conjunto $\{b,c\}$ y los subconjuntos propios de A son: $\{a\}$, $\{\{b,c\}\}$, $\{d\}$, $\{a,d\}$, $\{a,\{b,c\}\}$, $\{\{b,c\},d\}$

De estas consideraciones, se deduce que son incorrectas las afirmaciones: (1), (4), (5) y (6).

EJERCICIO 2. Dados los conjuntos $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ y $B=\{0,1,4,6,7,8,9\}$. sean m el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B y n el número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A . Hallar $m+n$.

Solución. Los elementos de A que no pertenecen a B son: $2, 3$ y 5 . Entonces el número de subconjuntos no vacíos, disjuntos con B , que se puede formar con estos tres elementos es: $m=2^3-1=7$. Análogamente, los elementos de B que no pertenecen a A son: $0, 7, 8$ y 9 . Luego: $n=2^4-1=15$
 Por lo tanto: $m+n = 22$

EJERCICIO 3. Sean $A=\{3,\{2,8\},5\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- a) $\exists X \in P(A) \mid 2 \in X$ b) $\exists X \in P(A) \mid \{3\} \subset X$ c) $\exists X \in P(A) \mid \{2,8\} \subset X$

Solución. $P(A)=\{A, \{3, \{2,8\}\}, \{\{2,8\}, 5\}, \{3, 5\}, \{3\}, \{\{2,8\}\}, \{5\}, \emptyset\}$

- a) En $P(A)$ observamos que ningún $X \in P(A)$ contiene al número 2 como elemento, es decir: $2 \notin X$. La afirmación es falsa.
 b) Si elegimos $X=\{3\} \in P(A)$ o $X=\{3,5\} \in P(A)$, se cumple que: $\{3\} \subset X$; luego, la afirmación es verdadera
 c) Si elegimos $X=\{\{2,8\}, 5\} \in P(A)$, entonces $\{\{2,8\}\} \subset X$, se tendría que: $2 \in X$ y $8 \in X$. De aquí: $2 \in A$ y $8 \in A$, lo cual es falso. LA afirmación es falsa.

EJERCICIO 4. Sea $A = \{\{a\}, b, \{b\}\}$ y supongamos que $n(X)$ representa el número de elementos de un conjunto X . Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- a) $\{\{b\}\} \subset P(A)$ c) $n[P(A)] = 8$
 b) $\{a, b\} \in P(A)$ d) $X \subset A \rightarrow P(X) \subset P(A)$

Solución. a) Si $\{b\} \in A \rightarrow \{\{b\}\} \subset P(A)$, la afirmación es V.

b) Vamos que $a \notin A$ y $b \in A \rightarrow \{a, b\} \notin P(A)$, la afirmación es F.

c) $n[P(A)] = 2^3 = 8$. La afirmación es V.

d) Según la propiedad P.2 del conjunto potencia, la afirmación es V.

EJERCICIO 5. Sean $\{a, c\} \subset \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $A = \{a+cx \mid x \in \mathbb{R}\}$, $b \in A$ y $B = \{b+cy \mid y \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $A=B$.

Demostración. Debemos probar que si $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A=B$ (Prop. S.2)

a) Demostración de: $A \subset B$

En efecto: (1) Si $b \in A \rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R} \mid b = a + cx_1 \rightarrow a = b - cx_1$

(2) Sea $k \in A \rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \mid k = a + cx$

(3) Sustituyendo (1) en (2): $k = (b - cx_1) + cx = b + c(x - x_1)$

(4) Como $x \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in \mathbb{R} \rightarrow (x - x_1) \in \mathbb{R}$, luego $k \in B$

(5) Si $B = \{b + cy \mid y \in \mathbb{R}\} \rightarrow k \in B$

(6) De (2) y (5) se tiene: $k \in A \rightarrow k \in B \rightarrow A \subset B$ (Def. $\subset$)

b) Demostración de $B \subset A$

En efecto: (1) Sea $k \in B \rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \mid k = b + cy$

(2) Como $b \in A \rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R} \mid b = a + cx_1$

(3) Sustituyendo (2) en (1): $k = (a + cx_1) + cy = a + c(x_1 + y)$

(4) Si $A = \{a + cx \mid x \in \mathbb{R}\} \rightarrow k \in A$

(5) De (1) y (4) se tiene: $k \in B \rightarrow k \in A \rightarrow B \subset A$ (Def. $\subset$)

Por lo tanto, queda demostrado que si $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A=B$

EJERCICIO 6. Sea $A = \{P(\{a\}), P(\emptyset)\}$. Hallar: a) $P(A)$

b) Analizar la verdad o falsedad de:

$b_1: [\emptyset \in P(A) \wedge \emptyset \subset P(A)] \rightarrow \{\{\emptyset\}\} \subset P(A)$; $b_2: \{\{\emptyset, \{a\}\}\} \in P(A) \rightarrow \{\emptyset\} \in P(A)$

c) Construir el circuito lógico correspondiente a la proposición: $b_1 \rightarrow b_2$

Solución a) $P(A) = \{\emptyset, \{P(\{a\})\}, \{P(\emptyset)\}, A\}$

b) En b_1 : $\emptyset \in P(A)$ es V, $\emptyset \subset P(A)$ es V y $\{\{\emptyset\}\} \subset P(A)$ es F

Entonces: $V(b_1) = (V \wedge V) \rightarrow F = F$

En b_2 se observa que: $\{\emptyset, \{a\}\} = P(\{a\}) \rightarrow \{P(\{a\})\} \in P(A)$ es V y $\{\emptyset\} \in P(A)$ es F

Luego: $V(b_2) = V \rightarrow F = F$

c) Sean: $p: \phi \in P(A)$; $q: \phi \subset P(A)$; $r: \{\{\phi\}\} \subset P(A)$; $s: \{\{\phi, \{a\}\} \in P(A)$
 $t: \{\phi\} \in P(A)$

Entonces, $b_1: (p \wedge q) \rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r$; $b_2: s \rightarrow t \equiv \neg s \vee t$

Luego: $b_1 \rightarrow b_2 \equiv [\neg(p \wedge q) \vee r] \rightarrow [\neg s \vee t] \equiv \neg[\neg(p \wedge q) \vee (\neg s \vee t)]$
 $\equiv [(p \wedge q) \wedge \neg r] \vee \neg s \vee t$

La construcción del circuito lógico queda como ejercicio.

EJERCICIOS: Grupo 7

- Sean $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$ y $C=\{3,4,5\}$. Al hallar un subconjunto X de U tal que $X \subset C$, $X \not\subset A$ y $X \not\subset B$, cuántas soluciones existe.
- Dado el conjunto $A=\{a, \{a\}, \{\phi\}, \phi\}$. Analizar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones: (1) $\{a\} \in A \wedge \{a\} \subset A$; (2) $\{a\} \subset A \wedge \{\{a\}\} \subset A$; (3) $\{\phi\} \subset A \wedge \{\{\phi\}\} \in A$; (4) $\phi \subset A \wedge \phi \in A$; (5) $\{a, \phi\} \subset A \wedge \{\{a\}, \{\phi\}\} \subset A$
- Dados los conjuntos $A=\{2,3,5,6,8\}$ y $B=\{0,1,2,4,5,7,9\}$; si m es el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B y n el número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A , hallar $m+n$.
- Dados los siguientes conjuntos: $A=\{7n+2 | n \in \mathbb{Z}\}$; $B=\{7n-26 | n \in \mathbb{Z}\}$; $C=\{4n+1 | n \in \mathbb{Z}\}$ y $D=\{2n+1 | n \in \mathbb{Z}\}$. Analizar y justificar debidamente su conclusión en los siguientes casos: a) $A=B$ y b) $C=D$
- Sean los conjuntos: $A=\{\{0,1\}, \{2,4,8\}, \phi\}$; $B=\{0,1,4,8\}$ y $C=\{\phi, \{\phi\}, \{0\}, \{1\}, 2, \{4\}, \{8\}\}$. Indicar la verdad o falsedad, justificando su respuesta, de cada una de las afirmaciones siguientes:
 a) $\phi \subset A$; $\phi \in A$; $C \subset B$; $B \subset A$; $\{1\} \in A$
 b) $\{1,8\} \in B$; $\{\{\phi\}, \{1\}\} \in C$; $\{0,1\} \subset C$; $\{\phi, \{\phi\}, \{1\}\} \subset C$
 c) $\{\phi\} \subset B$; $\{\phi, 1, 2, \{8\}\} \subset B$; $\phi = \{\phi\}$; $\{0,1\} \in A$; $\{0,1\} \subset A$
 d) $\{0,1\} \subset B$; $\{0,1\} \in C$; $\{1\} \subset \{0,1\}$; $\{1\} \in \{\{1\}\}$
- Sea $A=\{2, \{3,4\}, \{5\}, 6\}$. Analizar los valores de verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
 a) $\exists X \in P(A) | 4 \in X$ c) $\exists X \in P(A) | \{5\} \in X$
 b) $\exists X \in P(A) | \{6\} \subset X$ d) $\exists X \in P(A) | \{3,4\} \subset X$



OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

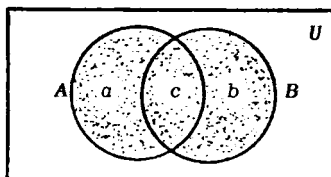
2.13 UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión o reunión de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A , a B o a ambos. Se denota por:

$$A \cup B$$

y se lee "A unión con B"

El diagrama de Venn Euler correspondiente a la unión de A y B es:



El rectángulo representa al conjunto universal U , en tanto que $A \cup B$ es la parte sombreada.

Nótese que si:

$$a \in A \rightarrow a \in (A \cup B)$$

$$b \in B \rightarrow b \in (A \cup B)$$

$$c \in A \text{ y } c \in B \rightarrow c \in (A \cup B)$$

Luego, si x es un término que puede ser de A , de B o de ambos, la unión de A y B se define:

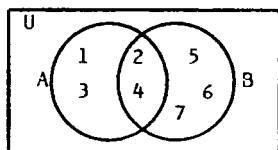
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

o sea: $A \cup B$ es el conjunto caracterizado por la proposición

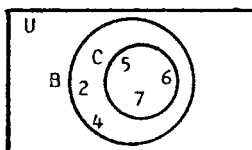
$$"x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B"$$

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$, hallar $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$. Trazar el diagrama de Venn de cada resultado.

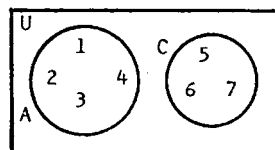
Solución. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



$A \cup B$



$B \cup C$



$A \cup C$

2.13.1 PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Para conjuntos A y B cualesquiera se cumplen:

U.1: $A \cup A = A$ (Idempotencia)

Demostración:

a) Demostraremos que: $(A \cup A) \subset A$

En efecto: (1) Sea $x \in (A \cup A) \rightarrow x \in A \vee x \in A$ (Def. $\cup$)

(2) Si hacemos $p = x \in A$, entonces: $p \vee p \equiv p$ (Idemp. E.2b)

(3) Luego, $x \in (A \cup A) \rightarrow x \in A$

(4) Por lo tanto: $(A \cup A) \subset A$ (Def. $\subset$)

b) Demostraremos que: $A \subset (A \cup A)$

En efecto: (5) Sea $x \in A$

(6) Se sigue entonces que $x \in A$ o $x \in A$

(7) Luego: $x \in A \rightarrow x \in (A \cup A)$

(8) Por lo tanto: $A \subset (A \cup A)$ (Def. $\subset$)

En consecuencia, de a) y b) queda demostrado que: $A \cup A = A$

U.2: $A \cup \emptyset = A$ (Propiedad del elemento neutro)

U.3: $A \cup U = U$

U.4: $A \cup B = B \cup A$ (Comutatividad)

U.5: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociatividad)

Demostración:

a) Demostraremos que: $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

En efecto: (1) Sea $x \in (A \cup B) \cup C$ (Hipótesis)

(2) Entonces: $x \in (A \cup B)$ o $x \in C$ (Def. $\cup$)

(3) $\rightarrow x \in A$ o $x \in B$ o $x \in C$ (Def. $\cup$)

(4) $\rightarrow x \in A$ o $(x \in B$ o $x \in C)$ (Asoc. E.4b)

(5) $\rightarrow x \in A$ o $x \in (B \cup C)$ (Def. $\cup$)

(6) $\rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ (Def. $\cup$)

(7) De (1) y (6): $x \in (A \cup B) \cup C \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

(8) Por lo tanto: $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ (Def. $\subset$)

b) Demostraremos que: $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

En efecto: (1) Sea $x \in A \cup (B \cup C)$ (Hipótesis)

(2) Entonces: $x \in A$ o $x \in (B \cup C)$ (Def. $\cup$)

(3) $\rightarrow x \in A$ o $x \in B$ o $x \in C$ (Def. $\cup$)

(4) $\rightarrow (x \in A$ o $x \in B)$ o $x \in C$ (Asoc. E.4b)

(5) $\rightarrow x \in (A \cup B)$ o $x \in C$ (Def. $\cup$)

(6) $\rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$ (Def. $\cup$)

(7) De (1) y (6): $x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

(8) Por lo tanto: $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cup C$ (Def. $\subset$)

Finalmente, de a) y b) queda probado que: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$

U.6: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributividad)

U.7: $A \subset (A \cup B)$, $\forall B$

$B \subset (A \cup B)$, $\forall A$

Demostración: En efecto, demostraremos que: $A \subset (A \cup B)$, $\forall B$

(1) Sea $x \in A$ (Hipótesis)

(2) Pero: $p \rightarrow (p \vee q)$, $\forall q$ (Adición: I.8)

(3) Si $p: x \in A$ y $q: x \in B$, se tiene: $x \in A \rightarrow (x \in A \vee x \in B)$

(4) Luego: $x \in A \rightarrow x \in (A \cup B)$ (Def. $\cup$)

(5) Por lo tanto: $A \subset (A \cup B)$, $\forall B$ (Def. $\subset$)

U.8: Si $A \cup B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset$ y $B = \emptyset$

Demostración: En efecto,

(1) Por U.7 sabemos que: $A \subset (A \cup B)$

(2) Si $A \cup B = \emptyset \rightarrow A \subset \emptyset$

(3) Pero $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto: $\emptyset \subset A$

(4) Luego, de (2) y (3): $A = \emptyset$

Análogamente se demuestra que: $B = \emptyset$

U.9: Si $A \subset B \rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$, $\forall C$ (Propiedad Monótona)

U.10: Si $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$

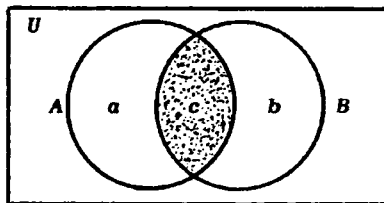
2.14 INTERSECCION DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de los elementos que son comunes a A y B , esto es, de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B . Se denota:

$$A \cap B$$

y se lee "A intersección con B".

El diagrama de Venn correspondiente a la intersección de A y B es:



donde el rectángulo representa el conjunto universal, en tanto que $A \cap B$ es la región sombreada.

Nótese que si:

$$a \in A \rightarrow a \notin (A \cap B)$$

$$b \in B \rightarrow b \notin (A \cap B)$$

$$c \in A \text{ y } c \in B \rightarrow c \in (A \cap B)$$

Luego, si x es un término que pertenece a A y B , entonces la intersección de A y B se define como:

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

Aquí, la coma tiene el significado de "y", por lo que se hace uso del conector lógico "y" para definir la intersección de A y B como:

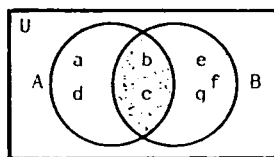
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

o sea: $A \cap B$ es el conjunto caracterizado por la proposición:

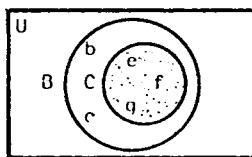
$$x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f, g\}$ y $C = \{e, f, g\}$; hallar $A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$. Trazar los diagramas de Venn correspondientes.

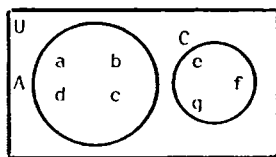
Solución. $A \cap B = \{b, c\}$; $B \cap C = \{e, f, g\} = C$; $A \cap C = \emptyset$



$A \cap B$



$B \cap C$



$A \cap C$

2.14.1 PROPIEDADES DE LA INTERSECCION

I.1: $A \cap A = A$

(Idempotencia)

I.2: $A \cap \emptyset = \emptyset$

Demostración: En efecto,

(1) Sea $x \in (A \cap \emptyset)$

(Hipótesis)

(2) Entonces: $x \in A$ y $x \in \emptyset$

(Def. $\cap$)

(3) Como $x \in A$ y $x \in \emptyset$, se tiene: $x \in A \wedge x \in \emptyset \rightarrow x \in \emptyset$

(4) De (1) y (3): $(A \cap \emptyset) \subset \emptyset$

(Def. $\subset$)

(5) Pero como $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto $\rightarrow \emptyset \subset (A \cap \emptyset)$

(6) Luego, de (4) y (5) se concluye: $A \cap \emptyset = \emptyset$

I.3: $A \cap U = A$

(Propiedad del elemento neutro)

I.4: $A \cap B = B \cap A$

(Commutatividad)

Demostración:

a) Demostraremos que: $(A \cap B) \subset (B \cap A)$ En efecto: (1) Sea $x \in (A \cap B)$

(Hipótesis)

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \in B$

(Def. $\cap$)

(3) $\rightarrow x \in B \wedge x \in A$

(Comm. E.3b)

(4) $\rightarrow x \in (B \cap A)$

(Def. $\cap$)

(5) De (1) y (4): $x \in (A \cap B) \rightarrow x \in (B \cap A)$

(6) Luego: $(A \cap B) \subset (B \cap A)$

(Def. $\subset$)b) Demostraremos que: $(B \cap A) \subset (A \cap B)$ En efecto: (1) Sea $x \in (B \cap A)$

(Hipótesis)

(2) $\rightarrow x \in B \wedge x \in A$

(Def. $\cap$)

(3) $\rightarrow x \in A \wedge x \in B$

(Comm. E.3b)

(4) $\rightarrow x \in (A \cap B)$

(Def. $\cap$)

(5) De (1) y (4): $x \in (B \cap A) \rightarrow x \in (A \cap B)$

(6) Luego: $(B \cap A) \subset (A \cap B)$

(Def. $\subset$)Por lo tanto, de a) y b), se ha demostrado que: $A \cap B = B \cap A$

I.5: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(Asociatividad)

I.6: $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$

I.7: Si $A \subset B \rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$, $\forall C$

Demostración: En efecto,

(1) Sea $x \in (A \cap C)$

(Hipótesis)

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \in C$

(Def. $\cap$)

(3) Si $A \subset B \leftrightarrow x \in A \rightarrow x \in B$

(Hipótesis y Def. $\subset$)

(4) $\rightarrow x \in B \wedge x \in C$

(Paso (3) en (2))

(5) $\rightarrow x \in (B \cap C)$

(Def. $\cap$)

(6) Luego: $x \in (A \cap C) \rightarrow x \in (B \cap C)$

(7) Por lo tanto: $(A \cap C) \subset (B \cap C)$

(Def. $\subset$)

I.8: Si $A \subset C$ y $B \subset D \rightarrow (A \cap B) \subset (C \cap D)$

I.9: Si $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$

I.10 $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

2.14.2 PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS DE LA UNION E INTERSECCION

I.11: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

I.12: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración de I.12:

a) Demostraremos que: $A \cap (B \cup C) \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

En efecto:

(1) Sea $x \in [A \cap (B \cup C)]$ (Hipótesis)

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ (Def. $\cap$)

(3) $\rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (Def. $\cup$)

(4) $\rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (Dist. E.5a)

(5) $\rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$ (Def. $\cap$)

(6) $\rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ (Def. $\cup$)

(7) De (1) y (6): $A \cap (B \cup C) \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ (Def. $\subset$)

b) Análogamente se demuestra que: $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subset A \cap (B \cup C)$

(Ejercicio para el lector)

Por lo tanto, de a) y b), según la propiedad S.2 de inclusión, queda de mostrado que: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.14.3 LEYES DE ABSORCION

A.1: $A \cap (A \cup B) = A$

A.2: $A \cup (A \cap B) = A$

En ambas propiedades A es el conjunto absorbente, $(A \cup B)$ y $(A \cap B)$ son los esquemas que se absorbe, que pueden ser la unión de A con varios conjuntos o la intersección de A con varios conjuntos. Por ejemplo:

$$A \cap (A \cup B \cup C \cup D \cup \dots) = A$$

$$A \cup (A \cap B \cap C \cap D \cap \dots) = A$$

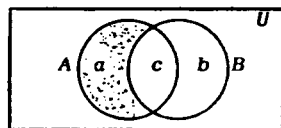
2.15 DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B. Se denota por:

$$A - B$$

y se lee: "A diferencia de B", o simplemente "A menos B".

El diagrama de Venn correspondiente a la diferencia de A y B es:



donde $A-B$ es la parte sombreada.

Nótese que si:

$$a \in A \rightarrow a \in (A-B)$$

$$b \in B \rightarrow b \notin (A-B)$$

$$c \in A \text{ y } c \in B \rightarrow c \notin (A-B)$$

Si x es un elemento que pertenece a $A-B$, entonces:

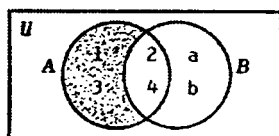
$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Esto es, $A-B$ es el conjunto caracterizado por la propiedad:

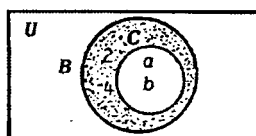
$$x \in (A-B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Ejemplo. Sean los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, a, b, 4\}$ y $C = \{a, b\}$, hallar: $A-B$, $B-C$ y $A-C$. Trazar los diagramas de Venn correspondientes.

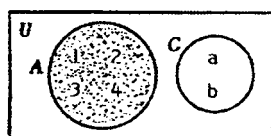
Solución. $A-B = \{1, 3\}$; $B-C = \{2, 4\}$; $A-C = \{1, 2, 3, 4\} = A$



$A-B$



$B-C$



$A-C$

2.15.1 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

D.1: $A-A = \phi$

Demostración. En efecto:

(1) Sea $x \in (A - A)$

(Hipótesis)

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \notin A$

(Def. Dif.)

(3) $\rightarrow x \notin \phi$ (Un elemento no puede pertenecer y no pertenecer al mismo conjunto a la vez)

(4) Por lo tanto, de (1) y (3): $A-A = \phi$

D.2: $A - \phi = A$

D.3: $\phi - A = \phi$

D.4: $(A - B) \subset A$

D.5: $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

D.6: $B \cap (A - B) = \phi$

Demostración. Probaremos que: $B \cap (A-B) \subset \phi$

En efecto: (1) Sea $x \in B \cap (A-B)$

(Hipótesis).

$$(2) \rightarrow x \in B \wedge x \in (A-B)$$

(Def. $\cap$)

$$(3) \rightarrow x \in B \wedge (x \in A \wedge x \notin B)$$

(Def. Dif.)

$$(4) \rightarrow (x \in B \wedge x \notin B) \wedge x \in A$$

(Asoc. E.4a)

$$(5) \rightarrow x \in (B-B) \wedge x \in A$$

(Def. Dif.)

La intersección de dos, cualesquiera de ellos, es vacío.

$$\left. \begin{array}{l} D.11: a) A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C) \\ b) A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C) \end{array} \right\} \text{Leyes de Morgan}$$

$$D.12: a) (A \cup B) - C = (A-C) \cup (B-C)$$

$$b) (A-B) - C = (A-C) - B$$

2.16 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, se define el complemento de A con respecto de B , y se denota ${}_B A'$, a la diferencia $B-A$. Esto es:

$${}_B A' = B - A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$

Conjunto que queda caracterizado por la propiedad:

$$x \in {}_B A' \leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$$

cuya representación en el diagrama de Venn es la parte sombreada de la figura 1.

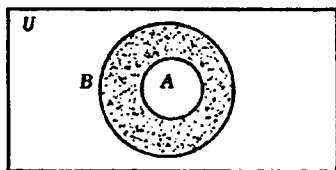


Figura 1

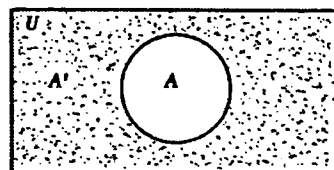


Figura 2

En particular, si $B=U$, el complemento de A con respecto de U , se denota por

$${}_U A' = A' = A^c = \bar{A}$$

y se define como el conjunto de elementos que no pertenecen a A ; esto es:

$$A' = U - A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\} = \{x | x \notin A\}$$

conjunto que queda caracterizado por la propiedad:

$$x \in A' \leftrightarrow x \notin A$$

y cuya representación en el diagrama de Venn es la parte sombreada de la figura 2.

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 5, 6, 7\}$; hallar:

a) $\mathcal{C}_B A$, b) $\mathcal{C}_A B$, c) $\mathcal{C}_A (A \cap B)$

Solución. a) $\mathcal{C}_B A = B - A = \{1, 6, 7\}$; b) $\mathcal{C}_A B = A - B = \{3, 4\}$

c) $A \cap B = \{2, 5\} \rightarrow \mathcal{C}_A (A \cap B) = A - (A \cap B) = \{3, 4\}$

2.16.1 PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO

Para conjuntos A y B en U se cumplen las siguientes propiedades:

C.1: $\mathcal{C}_B A \subset B$ y $\mathcal{C}_A B \subset A$

C.2: $A \cup A' = U$ ó $A \cup \mathcal{C}_A B = A$

C.3: $A \cap A' = \emptyset$ ó $A \cap \mathcal{C}_B A = \emptyset$

C.4: $U' = \emptyset$ ó $\mathcal{C}_A A = \emptyset$

C.5: $\emptyset' = U$ ó $\mathcal{C}_A \emptyset = A$

C.6: $(A')' = A$ ó $\mathcal{C}_B (\mathcal{C}_B A) = A$

C.7: $A - B = A \cap B'$ ó $A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

Demostración.

a) Demostraremos que: $(A - B) \subset A \cap B'$

En efecto: (1) Sea $x \in (A - B) \rightarrow x \in A \wedge x \notin B$ (Def. Dif.)

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \in B'$ (Def. Comp.)

(3) $\rightarrow x \in (A \cap B')$ (Def. $\cap$)

(4) Luego, de (1) y (3): $(A - B) \subset (A \cap B')$ (Def. $\subset$)

b) Demostraremos que: $(A \cap B') \subset (A - B)$

En efecto: (1) Sea $x \in (A \cap B') \rightarrow x \in A \wedge x \in B'$ (Def. $\cap$)

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \notin B$ (Def. Comp.)

(3) $\rightarrow x \in (A - B)$ (Def. Dif.)

(4) Luego, de (1) y (3): $(A \cap B') \subset (A - B)$ (Def. $\subset$)

Por lo tanto, de a) y b) queda demostrado que: $A - B = A \cap B'$

C.8: Si $A \subset B \rightarrow B' \subset A'$

Demostración.

- En efecto: (1) Sea $x \in B' \rightarrow x \notin B$ (Hip. Auxiliar)
 (2) Si $A \subset B$, entonces: $x \in A \rightarrow x \in B$ (Def. $\subset$)
 (3) Si $x \notin B$ y $A \subset B \rightarrow x \notin A$ (Pasos 1 y 2)
 (4) $x \notin A \rightarrow x \in A'$ (Def. Comp.)
 (5) Luego: $x \in B' \rightarrow x \in A'$ (Pasos 1 y 4)
 (6) Por lo tanto: $B' \subset A'$ (Def. $\subset$)

$$\left. \begin{array}{l} \text{C.9: } (A \cup B)' = A' \cap B' \\ \text{C.10: } (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array} \right\} \text{ Leyes de Morgan}$$

Demostración de C.10:

a) Demostraremos que: $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$

- En efecto: (1) Sea $x \in (A \cap B)'$ (Hipótesis)
 (2) $\rightarrow x \notin (A \cap B)$ (Def. Comp.)
 (3) $\rightarrow x \notin A \vee x \notin B$ [$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$]
 (4) $\rightarrow x \in A' \vee x \in B'$ (Def. Comp.)
 (5) $\rightarrow x \in (A' \cup B')$ (Def. $\cup$)
 (6) Luego de 1 y 5: $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ (Def. $\subset$)

b) Demostraremos que: $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$

- En efecto: (1) Sea $x \in (A' \cup B')$ (Hipótesis)
 (2) $\rightarrow x \in A' \vee x \in B'$ (Def. $\cup$)
 (3) $\rightarrow x \notin A \vee x \notin B$ (Def. Comp.)
 (4) $\rightarrow x \notin (A \cap B)$ (Morg. E.6a)
 (5) $\rightarrow x \in (A \cap B)'$ (Def. Comp.)
 (6) Luego de 1 y 5: $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$ (Def. $\subset$)

Por lo tanto, de a) y b), queda demostrado que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

2.17 DIFERENCIA SIMETRICA

Dado los conjuntos A y B, se define diferencia simétrica de A y B, que se denota por $A \Delta B$, al conjunto:

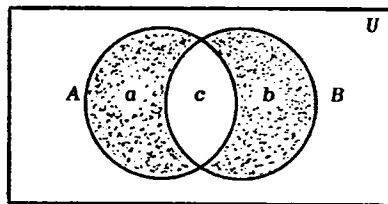
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$\text{o} \quad A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

En el diagrama de Venn Euler, la diferencia simétrica de A y B es la parte sombreada de la figura adjunta.

Nótese que si: $a \in A \rightarrow a \in (A \Delta B)$
 $b \in B \rightarrow b \in (A \Delta B)$

$$c \in A \text{ y } c \in B \rightarrow c \notin (A \Delta B)$$



Si x es un elemento que pertenece a $A \Delta B$, entonces:

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

Esto es, $A \Delta B$ es el conjunto caracterizado por la propiedad:

$$x \in (A \Delta B) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$$

Ejemplo. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 5, 6\}$, hallar $A \Delta B$.

Solución. $A \cap B = \{2, 3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\text{Entonces: } A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 4, 5, 6\}$$

Por la otra forma: $A - B = \{1, 4\}$ y $B - A = \{5, 6\}$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 4, 5, 6\}$$

2.17.1 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA SIMETRICA

DS.1: $A \Delta A = \emptyset$

DS.2: $A \Delta \emptyset = A$

(Propiedad del elemento neutro)

DS.3: $A \Delta B = B \Delta A$

(Commutatividad)

DS.4: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

(Asociatividad)

DS.5: $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

(Distributividad)

DS.6: $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Sea el conjunto universal $U = \{\emptyset, 2, 2/3, 5\}$ y los subconjuntos:

$A = \{x \in U \mid x \text{ es par} \vee x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in U \mid x \neq \emptyset \wedge x \text{ no es un entero}\}$, $C = \{x \in U \mid x \text{ es un número} \vee x = \emptyset\}$. Hallar:

- a) $B' - A$ b) $(A \cup B) - (B \cap C)$ c) $(C - B) \cap A$

Solución. Si x es par o x es primo $\rightarrow A = \{2, 5\}$

$x \neq \emptyset$ y x no es un entero $\rightarrow B = \{2/3\} \rightarrow B' = \{\emptyset, 2, 5\}$

x es un número o $x = \emptyset \rightarrow C = U = \{\emptyset, 2, 2/3, 5\}$

- a) $B' - A = \{\emptyset\}$; b) $(A \cup B) - (B \cap C) = \{2, 5, 2/3\} - \{2/3\} = \{2, 5\}$

- c) $(C - B) \cap A = \{\emptyset, 2, 5\} \cap \{2, 5\} = \{2, 5\}$

EJERCICIO 2. Si $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4 \wedge x = 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \wedge x \leq 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sim(x > 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3)\}$. Hallar: $M = (A \cap B) - (B \cap C)$.

Solución. Según E.7a: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \rightarrow A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4 \vee x = 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Por E.7b: $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \rightarrow C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1 \wedge x^2 = 4x - 3\} = \{3\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B \cap C = \{3\} \rightarrow M = \{1, 2, 4\}$

EJERCICIO 3. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 10x - 24 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 - x^2 = 0\}$ y $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 + 3x = 7 - 2x\}$. Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

- a) $(D \cup A) - C = \{1/3, 2\}$ c) $[(A \cap B) \cup D] \cap C \subset C$
b) $(A \cup B) - (D \cup \{12\}) \neq B$ d) $(D - A) \cap [(A \cup B) - (C \cup D)] = D$

Solución. En $A: x^2 - 10x - 24 = 0 \leftrightarrow x = -2 \vee x = 12 \rightarrow A = \{-2, 12\}$

$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$; $C = \{-2, 2\}$; $D = \{1\}$

- a) $(D \cup A) - C = \{1, -2, 12\} - \{-2, 2\} = \{1, 12\}$; la afirmación es falsa.

- b) $(A \cup B) - (D \cup \{12\}) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 12\} - \{1, 12\} = \{-3, -2, -1, 0, 2\} \neq B$

La afirmación es verdadera.

- c) $[(A \cap B) \cup D] \cap C = [\{-2\} \cup \{1\}] \cap \{-2, 2\} = \{-2\} \subset C$. La afirmación es verdad.

- d) $(D - A) \cap [(A \cup B) - (C \cup D)] = \{1\} \cap [\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 12\} - \{-2, 1, 2\}] = \emptyset \neq D$

La afirmación es falsa.

EJERCICIO 4. Cuales de las siguientes afirmaciones

- a) $x \notin [B \cap (A - C)]$ c) $x \in \mathcal{B} \vee x \in \mathcal{A} \vee x \in C$
b) $x \notin B \vee x \notin (A - C)$ d) $x \in \mathcal{B} (B \cap A) \wedge x \in C$

son equivalentes a la proposición: $x \in \mathcal{B} [B \cap (A - C)]$

Solución. Si $x \in \mathcal{B} [B \cap (A - C)] \rightarrow x \notin [B \cap (A - C)]$

(Def. Comp.)

- a) $x \notin [B \cap (A-C)] \equiv x \in [B \cap (A-C)] \quad \therefore$ Es equivalente
- b) $x \notin B \vee x \notin (A-C) \equiv x \notin [B \cap (A-C)] \quad \therefore$ Es equivalente
- c) $x \in B \vee x \in \bar{B} \vee x \in C \equiv x \notin B \vee (x \notin A \vee x \in C) \quad (\text{Def. Comp. y Asoc.})$
 $\equiv x \notin B \vee x \notin (x \in A \wedge x \notin C) \quad (\text{Morg. E.6a})$
 $\equiv x \notin [B \cap (A-C)] \quad \therefore$ Es equivalente
- d) $x \in \bar{B} \wedge x \in C \equiv x \notin (B \cap A) \wedge x \in C \quad (\text{Def. Comp.})$
 $\equiv x \in [C - (B \cap A)] \quad \therefore$ No es equivalente

EJERCICIO 5. Si $A \subset B$, simplificar: $\{[(B \cup A) \cap (\bar{B} \cap C)] \cup \bar{A}\} \cup \bar{B}$.

Solución. Si $A \subset B \rightarrow A \cup B = B \rightarrow \{[(B \cup A) \cap (\bar{B} \cap C)] \cup \bar{A}\} \cup \bar{B} \quad (U.10)$

$$\text{Pero: } B \cap \bar{B} = \emptyset, \text{ entonces: } \{[\emptyset \cap (\bar{B} \cap C)] \cup \bar{A}\} \cup \bar{B} \leftrightarrow \{\bar{A}\} \cup \bar{B} \\ \rightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$$

Como $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$, entonces: $\bar{A} \cup \bar{B} \equiv \bar{A} \equiv U-A$

EJERCICIO 6. Si $A \subset B$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, simplificar:

$$P = \bar{A} - (B \cap C) \cup \bar{A} \cup (A \cup C) - \bar{B} \cap \bar{A}$$

Solución. Si $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$ y $A \cup B = B \quad (I.9 \text{ y } U.10)$

$$\text{Si } (A \cup B) \cap C = \emptyset \rightarrow B \cap C = \emptyset$$

Entonces: $P \equiv \bar{A} - \emptyset \cup \bar{A} \cup (A \cup C) - \bar{B} \cap \bar{A} \equiv \bar{A} \cup \bar{A} \cup (A \cup C) \wedge x \notin \bar{A}$

$$\equiv \bar{A} \cup \bar{A} \cup (A \cup C) \wedge x \in A \equiv \bar{A} \cup \bar{A} \cup (A \cup C) \cap A \\ \equiv \bar{A} \cup \bar{A} \cup A \quad (\text{Abs. A.1}) \\ \equiv \bar{A} \quad (\text{Idemp. E.2b})$$

EJERCICIO 7. Para $a, b \in \mathbb{Q}$, A y B son conjuntos tales que $B \neq \emptyset$, $A \cup B$ es un conjunto unitario; $A = \{a^2 + 2b, b^2 + 1\}$ y $A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\}$. Hallar $A \cap B$.

Solución. Si $A \cup B$ es un conjunto unitario y $B \neq \emptyset$, entonces A y B son unitarios, esto es: $A = B = A \cup B$

$$A = \{a^2 + 2b, b^2 + 1\} \text{ es unitario} \rightarrow a^2 + 2b = b^2 + 1 \leftrightarrow a^2 = (b-1)^2 \\ \leftrightarrow a = \pm(b-1) \quad (1)$$

$$A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\} \text{ es unitario} \rightarrow a + 4b = b + 1 - 3a \leftrightarrow 4a = 1 - 3b \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $a_1 = -2$ ó $a_2 = -2/7$

$$b_1 = 3 \text{ ó } b_2 = 5/7$$

Ambas soluciones satisfacen la condición dada: $a, b \in \mathbb{Q}$

Pero, veamos si satisfacen la ecuación: $A = A \cup B$, es decir:

$$a^2 + 2b = a + 4b \text{ ó } b^2 + 1 = b + 1 - 3a$$

Basta comprobar en la primera ecuación:

Para $(-2, 3)$: $(-2)^2 + 2(3) = -2 + 4(3) \leftrightarrow 10 = 10$, es verdadero

Para $(-2/7, 5/7)$, verificar que es falso.

Luego, para $a=-2$ y $b=3$: $A=B=\{10, 10\}=\{10\}=A \cap B$

EJERCICIO 8. Si $A=\{\phi\}$, $B=P(A)$, $C=B-A$ y $D=P(C)$. Hallar $B \cap D$.

Solución. Si $B=P(A) \rightarrow B=\{A, \phi\}=\{\{\phi\}, \phi\}$

$$C = B - A = \{A, \phi\} - \{\phi\} = \{A\} \rightarrow D = P(C) = \{C, \phi\} = \{\{A\}, \phi\}$$

Luego: $B \cap D = \{A, \phi\} \cap \{\{A\}, \phi\} = \{\phi\} = A$

EJERCICIO 9. En el diagrama general de cuatro conjuntos, se tiene 16 zonas numeradas como sigue:

Si $A \subset C$, $B \supset D$ y $(B \cup C) - (B \cap C) = B \cup C$; qué zonas con seguridad no son vacías?

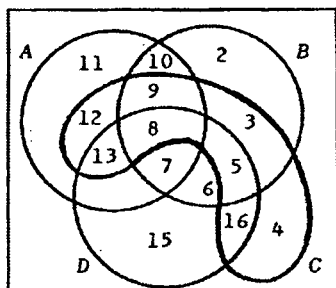
Solución. Si $A \subset C$, entonces las zonas vacías que no están incluidas en C son 7,

10, 11, 14. Si $D \subset B$, entonces las zonas vacías que no están incluidas en B son 13, 14, 15 y 16.

$(B \cup C) - (B \cap C) = B \cup C \rightarrow B \cap C = \phi$. Esto implica que son zonas vacías: 3, 5, 8 y 9.

Luego, son zonas vacías: 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15 y 16.

Por lo tanto, no son zonas vacías: 1, 2, 4, 6 y 12.



EJERCICIO 10. Dadas las siguientes definiciones entre conjuntos:

$A^*B = \{x \in U \mid x \notin A \wedge x \notin B\}$; $A \oplus B = \{x \in U \mid x \notin A \vee x \notin B\}$; $A \# B = \{x \in U \mid x \notin A \vee x \notin B\}$. Sombrear en el diagrama de los conjuntos numéricos la zona correspondiente a $S = [(Q^*N) * (C \# I)] \cup N$

Solución. Apliquemos las definiciones dadas a los conjuntos numéricos que corresponden a S :

$$Q^*N = \{x \in U \mid x \notin Q \wedge x \notin N\} = Q' \cap N'$$

$$= Q' \cap N' = Q' \cap N'$$

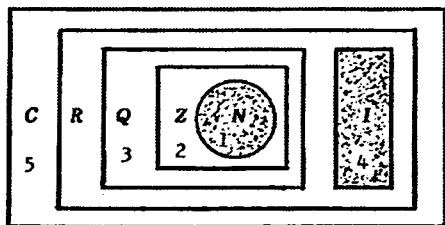
$$C \# I = \{x \in U \mid x \notin C \vee x \notin I\} = C' \cup I'$$

$$= C' \cup I' = I'$$

$$Q' \cap I' = \{x \in U \mid x \notin Q \wedge x \notin I\} = Q' \cap I' = I'$$

Por lo tanto, $S = I \cup N = \{1, 4\}$

Se sombrea las zonas 1 y 4 del diagrama de los conjuntos numéricos.



EJERCICIO 11. Se sabe que X es un conjunto tal que: $X \subset P(A)$, $\forall A$. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- a) $X \cap X = X, \forall A$ b) $X - A = X, \forall A$ c) $(A - X) \cup (X - A) = A, \forall A$

Solución. Si $X \in P(A)$, $\forall A + X = \emptyset$ (El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, excepto el suyo propio)

Entonces: a) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \quad \therefore$ Es verdadera (I.2)

b) $\emptyset - A = \emptyset, \forall A \quad \therefore$ Es verdadera (D.3)

c) $(A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = (A) \cup (\emptyset) = A \quad \therefore$ Es verdadera

EJERCICIO 12. De las siguientes afirmaciones para conjuntos, determinar cuáles son verdaderas.

- a) $F - (F - G) = F \cap G$ b) $(A - B) - C = A - (B - C)$ c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

Solución. a) $F - (F - G) = x \in F \wedge x \notin (F - G)$ (Def. Dif.)
 $= x \in F \wedge x \notin (x \in F \wedge x \notin G)$ (Def. Dif.)
 $= x \in F \wedge (x \notin F \vee x \in G)$ (Morg. E.6a)
 $= (x \in F \wedge x \notin F) \vee (x \in F \wedge x \in G)$ (Dist. E.5a)
 $= \emptyset \vee x \in (F \cap G)$ (Def. $\cap$)
 $= x \in (F \cap G) = F \cap G \quad \therefore$ Es verdadera

b) $(A - B) - C = x \in (A - B) \wedge x \notin C = (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$ (Def. Dif.)
 $= x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) = x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$ (Asoc. y Morg. E.6a)
 $= A \cap \mathcal{C}(B \cup C) \quad \therefore$ Es falsa

c) $A - (B \cup C) = x \in A \wedge x \notin (B \cup C) = x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$ (Def. Dif. y Morg. E.6b)
 $= (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$ (Dist. E.5a)
 $= (A - B) \cap (A - C) \quad \therefore$ Es falsa

EJERCICIO 13. Sea $A * B = (A \cup B) - \mathcal{C}A$. Entonces, de las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas.

- a) $A * B = B * A, \forall A, B \subset U$ b) $A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C), \forall A, B, C \subset U$
 c) $A \cap (B * C) = (A \cap B) * (A \cap C), \forall A, B, C \subset U$

Solución. a) $A * B = (A \cup B) - \mathcal{C}A$ y $B * A = (B \cup A) - \mathcal{C}B$

Luego: $A * B \neq B * A \quad \therefore$ Es falsa

b) $A * (B \cap C) = [A \cup (B \cap C)] - \mathcal{C}A = [(A \cup B) \cap (A \cup C)] - \mathcal{C}A$ (Def. * y Dist. E.5b)
 $= [(A * B) \cup \mathcal{C}A] \cap [(A * C) \cup \mathcal{C}A] - \mathcal{C}A$ (Def. *)
 $= [(A * B) \cup \mathcal{C}A] \cap [(A * C) \cup \mathcal{C}A] - \mathcal{C}A = [(A * B) \cap (A * C)] \cup \mathcal{C}A - \mathcal{C}A$
 $= [(A * B) \cap (A * C)] + \mathcal{C}A - \mathcal{C}A = (A * B) \cap (A * C) \quad \therefore$ Es verdadera

c) $A \cap (B * C) = A \cap [(B \cup C) - \mathcal{C}B] = A \cap (B \cup C) - A \cap \mathcal{C}B$ (Def. * y D.7)
 $= (A \cap B) \cup (A \cap C) - A \cap \mathcal{C}B = (A \cap B) * (B \cap C) + \mathcal{C}B(A \cap B) - A \cap \mathcal{C}B$

Luego: $A \cap (B * C) \neq (A \cap B) * (B \cap C) \quad \therefore$ Es falsa

Por lo tanto, sólo la afirmación b) es verdadera.

EJERCICIO 14. Si A, B y C son conjuntos no vacíos tales que A y C son disjuntos y que $A \cup C = B$. Simplificar $A \Delta B \Delta A \Delta C$.

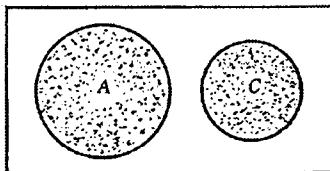
$$\begin{aligned}\text{Solución. } A \Delta B \Delta A \Delta C &= (A \Delta A) \Delta (B \Delta C) && (\text{Asoc. DS.4}) \\ &= (\emptyset) \Delta (B \Delta C) = B \Delta C && (\text{DS.1 y DS.2}) \\ &= (B-C) \cup (C-B)\end{aligned}$$

Dado que A y C son disjuntos y $A \cup C = B$

Entonces: $A \cup C = B \rightarrow A = B - C$

Además: $C - B = \emptyset$

Luego: $A \Delta B \Delta A \Delta C = (A) \cup (\emptyset) = A$



EJERCICIO 15. Simplificar:

$$P = [(A \cap B) \cup (C' \cup D' \cup E')] \cap [(A \cap B) \cup (C \cap D \cap E)]$$

$$\begin{aligned}\text{Solución. } P &= [(A \cap B) \cup (C \cap D \cap E)]' \cap [(A \cap B) \cup (C \cap D \cap E)] && (\text{Morg. C.9}) \\ &= (A \cap B) \cup [(C \cap D \cap E)' \cap (C \cap D \cap E)] && (\text{Dist. E.5b}) \\ &= (A \cap B) \cup \{\emptyset\} && (\text{Prop. C.3}) \\ &= A \cap B && (\text{Prop. U.2})\end{aligned}$$

EJERCICIO 16. Indicar cuál de las siguientes expresiones es verdadera o falsa. Justificando su respuesta en cada caso:

a) $B \subset A$ entonces $(A-B) \in P(A-B)$ y $(B-A) \in P(A-B)$

b) Sean $A = \{a\}$; $B = \{b\} \rightarrow P(A-B) = P(A)$

Solución. a) Si $B \subset A \rightarrow (A-B) \neq \emptyset$ (Prop. D.9)

(1) Sea $x \in (A-B) \rightarrow \{x\} \subset (A-B)$

(2) $\rightarrow x \in A \wedge x \notin B$ (Def. Dif.)

(3) $\rightarrow x \in A \wedge x \in B'$ (Def. Comp.)

(4) $\rightarrow x \in (A \cap B')$ (Def. $\cap$)

(5) $\rightarrow \{x\} \in P(A \cap B')$ (Def. Pot.)

(6) $\rightarrow \{x\} \in P(A-B)$ (Prop. C.7)

(7) Por lo tanto, de (1) y (6): $(A-B) \in P(A-B)$

(8) Si $B \subset A \rightarrow (B-A) = \emptyset$ (Prop. D.9)

(9) Como $\emptyset$ pertenece a todo conjunto potencia $\rightarrow (B-A) \in P(A-B)$

(10) Por lo tanto: $B \subset A \rightarrow (A-B) \in P(A-B)$ y $(B-A) \in P(A-B)$, es V.

b) Caso 1: Si $a \neq b$: (1) $A-B = \{a\} \rightarrow P(A-B) = \{\emptyset, \{a\}\}$

(2) Si $A = \{a\} \rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$

(3) Por lo tanto: $P(A-B) = P(A)$, es verdadera

Caso 2: Si $a=b$. (1) $A-B = \emptyset \rightarrow P(A-B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \neq P(A)$

(2) Por lo que: $P(A-B) = P(A)$ es falso para $a=b$.

EJERCICIO 17. Usando definiciones demostrar que:

$$a) A - (B \cap A') = A \quad y \quad b) P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

Demostración

a) En efecto: (1) Si $x \in [A - (B \cap A')]$ $\rightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap A')$ (Def. Dif.)
 (2) $\rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin A')$ (Morg. E.6a)
 (3) $\rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in A)$ (Prop. C.6)
 (4) $\rightarrow x \in A$ (Abs. A.1)
 (5) Por lo tanto, de 1 y 4: $A - (B \cap A') = A$

b) En efecto: (1) Si $X \subseteq P(A \cap B)$ $\rightarrow X \subseteq (A \cap B)$ (Def. Pot.)
 (2) $\rightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (def. $\cap$)
 (3) $\rightarrow X \subseteq P(A) \wedge X \subseteq P(B)$ (Def. Pot.)
 (4) $\rightarrow X \subseteq [P(A) \cap P(B)]$ (def. $\cap$)
 (5) Luego, de 1 y 4: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

EJERCICIO 18. Demostrar que para tres conjuntos cualesquiera A, B y C, se cumple: $(A \cap C) \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap C$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned} (A \cap C) \Delta (B \cap C) &= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] - [(A \cap C) \cap (B \cap C)] && \text{(Def. Dif. Sim.)} \\ &= [(A \cup B) \cap C] - [(A \cap B) \cap C] && \text{(Dist. E.5a)} \\ &= [(A \cup B) - (A \cap B)] \cap C && \text{(Prop. D.7)} \\ &= (A \Delta B) \cap C && \text{(Def. Dif. Sim.)} \end{aligned}$$

EJERCICIO 19. Usando propiedades de conjuntos, demostrar que:

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Demostración. Se trata de demostrar la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B.

En efecto: $(A-B) \cup (B-A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$ (Prop. C.7)
 $= [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$ (Dist. E.5b)
 $= [(A \cup B) \cap (B' \cup B)] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')]$
 $= [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (B' \cup A')]$ (Prop. C.2)
 $= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$ (Prop. I.3)
 $= (A \cup B) \cap (A \cap B)'$ (Morg. C.10)
 $= (A \cup B) - (A \cap B)$ (Prop. C.7)

EJERCICIO 20. Demostrar que: $B' \cap (A \cup B) = A \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Demostración. En efecto: $B' \cap (A \cup B) = (B' \cap A) \cup (B' \cap B)$ (Dist. E.5a)

$$= (B' \cap A) \cup (\emptyset) = B' \cap A \quad (\text{Prop. C.3 y U.2})$$

$$= A \cap B' = A - B \quad (\text{Prop. C.7})$$

Dado que: $A \cap B = \emptyset \rightarrow A - B = A$

Por lo tanto: $B' \cap (A \cup B) = A \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

EJERCICIO 21. Demostrar usando propiedades de conjuntos que para los conjuntos A, B y C : $[(A' - (B' - C))' \cap (C' - B)'] = A \cap (B \cup C)$

Demostración. En efecto:

$$[A' - (B' - C)]' \cap (C' - B)' = [A' \cap (B' - C')]' \cap (C' \cap B)' \quad (\text{Prop. C.7})$$

$$= [A' \cap (B' \cap C')]' \cap (C' \cap B')' \quad (\text{Prop. C.7})$$

$$= [A' \cap (B' \cup C')]' \cap (C \cup B) \quad (\text{Morg. C.10})$$

$$= [A \cap (B \cup C)]' \cap (B \cup C) \quad (\text{Morg. C.10})$$

$$= [A \cap (B \cup C)] \cup [(B \cup C)' \cap (B \cup C)] \quad (\text{Dist. E.5b})$$

$$= [A \cap (B \cup C)] \cup [\emptyset] \quad (\text{Prop. C.3})$$

$$= A \cap (B \cup C) \quad (\text{Prop. U.2})$$

EJERCICIO 22. Sean A, B y C tres conjuntos. Demostrar que si $B \cap C = \emptyset$, entonces: $[A - (B \cup C)] \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) = A$

Demostración. En efecto:

$$[A - (B \cup C)] \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) = [A \cap (B \cup C)]' \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{Prop. C.7})$$

$$= [A \cap (B \cup C)]' \cup A \cap (B \cup C) \quad (\text{Prop. I.12})$$

$$= A \cap [(B \cup C)' \cup (B \cup C)] \quad (\text{Dist. E.5a})$$

$$= A \cap [U] = A \quad (\text{Prop. C.2 e I.3})$$

EJERCICIO 23. Demostrar mediante definiciones:

$$(A \cap B) - (A \cap C)' = A \cap (B - C')$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sea } x \in [(A \cap B) - (A \cap C)']$$

$$(2) \rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C') \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(3) \rightarrow x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C') \quad (\text{Morg. E.6a})$$

$$(4) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C') \quad (\text{Def. } \cap)$$

$$(5) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C') \quad (\text{Dist. E.5a})$$

$$(6) \rightarrow [(x \in A \wedge x \notin A) \wedge x \in B] \vee [x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C')]$$

$$(7) \rightarrow [(\emptyset) \wedge x \in B] \vee [x \in A \wedge x \in (B - C')] \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(8) \rightarrow [\emptyset] \vee [x \in A \cap (B - C')] \quad (\text{Prop. I.2 y Def. } \cap)$$

$$(9) \rightarrow x \in A \cap (B - C) \quad (\text{Prop. U.2})$$

Por lo tanto, de 1 y 9: $(A \cap B) - (A \cap C)' = A \cap (B - C')$

EJERCICIO 24. Demostrar mediante definiciones (usando elementos) que:

$$a) B \subset [A \cup (B-A)]$$

$$b) P[(A \cap B) \cup C] = P(A \cup C) \cap P(B \cup C)$$

Demostración. a) Sea $x \in B$, entonces debemos probar que $x \in [A \cup (B-A)]$

Demostraremos por falsa suposición, esto es, supongamos:

$$(1) x \notin [A \cup (B-A)] \equiv \sim [x \in (A \cup (B-A))] \equiv \sim [x \in A \vee x \in (B-A)] \quad (\text{Def. } \cup)$$

$$(2) \equiv \sim [x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(3) \equiv \sim [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)] \quad (\text{Dist. E.5b})$$

$$(4) \equiv \sim [(x \in A \vee x \in B) \wedge (T)] \equiv \sim [(x \in A \vee x \in B)] \quad (T.3 \text{ y FNCb})$$

$$(5) \equiv x \notin A \wedge x \notin B \quad (\text{Morg. E.6b})$$

$$(6) \text{ Pero como por hipótesis, } x \in B \rightarrow x \in [A \cup (B-A)]$$

$$b) (1) \text{ Sea } x \in P[(A \cap B) \cup C] \rightarrow x \in [(A \cap B) \cup C] \quad (\text{Def. Pot.})$$

$$(2) \rightarrow x \in [(A \cup C) \cap (B \cup C)] \quad (\text{Dist. E.5b})$$

$$(3) \rightarrow x \in (A \cup C) \wedge x \in (B \cup C) \quad (\text{Def. } \cap)$$

$$(4) \rightarrow x \in P(A \cup C) \cap x \in P(B \cup C) \quad (\text{Def. Pot.})$$

$$(5) \rightarrow x \in [P(A \cup C) \cap P(B \cup C)] \quad (\text{Def. Pot.})$$

$$(6) \text{ Por lo tanto, de 1 y 5: } P[(A \cap B) \cup C] = P(A \cup C) \cap P(B \cup C)$$

EJERCICIO 25. Usando propiedades para conjuntos A, B y C, demostrar que:

$$(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$$

Demostración. En efecto, sea $E = (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$, entonces:

$$E = [(A \cup B) - (A \cap B)] \cup [(B \cup C) - (B \cap C)] = [(A \cup B) \cap (A \cap B)'] \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)']$$

$$= [(A \cap B)' \cap (A \cup B)] \cup [(B \cap C)' \cap (B \cup C)] \quad (\text{Conn. I.4})$$

$$= [(A \cap B)' \cap A] \cup [(A \cap B)' \cap B] \cup [(B \cap C)' \cap B] \cup [(B \cap C)' \cap C] \quad (\text{Dist. E.5a})$$

$$= [(A' \cup B') \cap A] \cup [(A' \cup B') \cap B] \cup [(B' \cup C') \cap B] \cup [(B' \cup C') \cap C] \quad (\text{Morg. C.10})$$

$$= [(A' \cap A) \cup (A \cap B')] \cup [(A' \cap B) \cup (B' \cap B)] \cup [(B' \cap B) \cup (C' \cap B)] \cup [(B' \cap C) \cup (C' \cap C)] \quad (\text{Dist. E.5a})$$

$$= [(\phi) \cup (A \cap B')] \cup [(A' \cap B) \cup (\phi)] \cup [(\phi) \cup (C' \cap B)] \cup [(B' \cap C) \cup (\phi)]$$

$$= (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (C' \cap B) \cup (B' \cap C) \quad (\text{Prop. U.2})$$

$$= [(A \cap B') \cup (C' \cap B')] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap C')] \quad (\text{Conn. U.4})$$

$$= [(A \cup C) \cap B'] \cup [B \cap (A' \cup C')] \quad (\text{Dist. E.5a})$$

$$= [(A \cup C) \cap B'] \cup [B \cap (A \cap C)'] \quad (\text{Morg. C.10})$$

$$= [(A \cup C) - B] \cup [B - (A \cap C)] \quad (\text{Prop. C.7})$$

$$= [(A \cup C) \cup B - B] \cup [B - B \cap (A \cap C)] \quad (\text{Prop. D.5})$$

$$= [(A \cup B \cup C) - B] \cup [B - (A \cap B \cap C)] \quad (A \cup B = A + B)$$

$$\therefore E = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$$

EJERCICIOS: Grupo 8

- Sea $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 10\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es primo}\}$, $B = \{x \in U \mid x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$, $C = \{x \in U \mid x \text{ es impar}\}$. Hallar:
 a) $(A \cup B)' - C$ b) $(A - C)' \cap B$ c) $(A \Delta B) - (A \Delta C)$ d) $(A \cap C)' - (B \cup C)'$
- Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sim [x \leq -2 \vee x > 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \sim (-1 < x \leq 3 \wedge x = 5)\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x < -2 \vee x > 2) \wedge x > 1\}$. Hallar el resultado de $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$.
- Sea el conjunto $E = \{\emptyset, a, \{a\}, \{a, \emptyset\}\}$ y los subconjuntos: $B = \{x \in E \mid x \neq \emptyset \wedge x \neq \{a, \emptyset\}\}$, $C = \{x \in E \mid x \neq a \vee x \neq \{a, \emptyset\}\}$, $D = \{x \in E \mid x \text{ es una letra del alfabeto}\}$. Hallar: a) $P(B - C)$ b) $(C \cap D) - B'$ c) $(C - B)' \cup (B \cap D')$
- Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 - x = 3 \vee x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 - x > 2 \wedge \frac{1}{5}(6x - 2) \geq 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es un cuadrado perfecto}, x \leq 10\}$. Hallar:
 a) $(A \cup B) \cap (C - A)$ b) $(A - B) \cup (B \cap C)$ c) $(A \cap B) - (A - C)$ d) $(A \Delta B) \cap (B \cap C)$
- Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 4\}$, $B = \{z \mid z = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es divisible de } 30\}$. Hallar la suma de los elementos de conjunto $(A \cap B) \cup (B \cup C)$
- De las siguientes afirmaciones, cuáles son verdaderas?
 a) $A \cap (A \cup B)' = A$ b) $(B \cap C) - A = B \cap (C - A)$
 c) $A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$
- Si $A \subset B$ y $C \cap A = \emptyset$, simplificar: $[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$
- Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 a) $(A \cap A') \cup A = A$ d) $A \subset B \leftrightarrow A' \subset B'$
 b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e) $A \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 c) $A - B = A \cap B'$ f) $(A \cup B) - (B \cap A) = (A - B) \cup (B - A)$
- Si $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 11\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \in U \mid x = 2k, k \in U\}$. Cuáles de las afirmaciones siguientes son falsas?
 a) $(A' \cap B') \neq U - \{9\}$ c) $(A - B)' \neq A' \cup (A \cap B)$
 b) $(A \cup B)' = \{x \in U \mid x^2 - 16x + 63 = 0\}$ d) $B - A \neq \{8, 10\}$
- Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{1}{2}(k^2 - 1), k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 8x\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 32x + 192 = 0\}$. Hallar el resultado de $(B - A) \cap C$.
- Si $A = \{a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$; cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?
 a) $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, \emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$
 b) El número de elementos de $P(A) = 8$ c) $P(A) \cap P(B) = \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset\}$
- Cuántas de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

- a) $(A-B)-C=A-(B \cup C)$ b) $((A')')'=U-A$ c) $(A \cap B') \cup A=A$
 d) $(A' \cup B') \cap A=B$ e) $[(A') \cup B]-C=(A \cup C)' \cup (B-C)$

13. Dada la proposición: $(x \notin A \wedge x \in B) \vee x \in C$. Su negación equivale a:

- a) $x \in (A \cup B') \cap C'$ b) $x \in (A-C) \cup (B \cup C)'$ c) $(x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin (B \cup C)$

Cuáles son verdaderas?

14. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- (1) $A \cap (C-B)'$ es lo mismo que: $A \cap (B \cup C)'$
 (2) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 10x^2 = 13x + 3\}$ es un conjunto unitario o
 $B = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid -x = x^{-1}\}$ es un conjunto vacío
 (3) Si $x \in \mathbb{R}$ y $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 2ax + 3a, \text{ es un trinomio cuadrado perfecto}\}$, entonces $A \subset \{a \in \mathbb{Z} \mid a^3 + 24 = 6a^2 + 4a\}$

15. Para conjuntos tenemos las afirmaciones:

- a) $A \subset C \rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ c) $B=A' \leftrightarrow A \cup B=U$ y $A \cap B=\emptyset$
 b) $A \cup (B \cap A) = A \cap (B \cup A) = A$ d) $A \cup [B \cap (A \cup C)] = A \cup (B \cap C)$

Demostrar que tales afirmaciones son verdaderas.

16. Cuáles de las siguientes proposiciones para conjuntos son siempre verdaderas?

- a) $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$ c) $A \cap B = \emptyset \rightarrow A \subset B'$
 b) $A \subset B' \leftrightarrow B \subset A'$ d) $(A \cup B)' = B-A$

17. Si $U = \{a, b, c, d, e\}$; $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{a, c\}$ y $A-B = \{b\}$; hallar A y B .

18. Demostrar que la proposición $p: x \in [A - (C-B)]'$, es equivalente a:

$$q: x \notin [A \cap (C' \cup B)].$$

19. Dados los siguientes conjuntos: $M = \{-3, -2/3, 0, 1/2, 2, \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 2i\}$, $A = \{x \in M \mid x \notin M \rightarrow x \notin Z\}$, $B = \{x \in M \mid x \in R \leftrightarrow x \in I\}$, $D = \{x \in M \mid x \in C \wedge x \notin Q\}$. Hallar $(A \cap C) \cup (B-A)$.

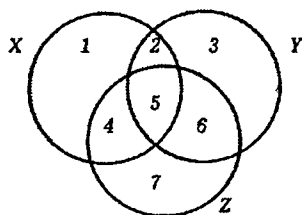
20. Sea el conjunto universal $U = \{-6, -3, 0, 0.4, 0.\bar{3}, 3/5, \sqrt{6}, 4, 1-i\}$ y los subconjuntos: $A = \{x \in U \mid x \in C \wedge x \in I\}$, $B = \{x \in U \mid x \in N \wedge x \in Q\}$, $D = \{x \in U \mid x \in Z \vee x \in N\}$. Determinar $M \cap P$, por extensión, si: $M = \{x \in U \mid x \in A \rightarrow x \in B\}$; $P = \{x \in U \mid x \in D \leftrightarrow x \in B\}$.

21. Si se sabe que: $p \wedge q \Rightarrow p \rightarrow \neg q$; $p \wedge q \Rightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$, y se dan los conjuntos: $A = \{-9, -\sqrt{2}, 0.\bar{3}, \pi, 6, 3i\}$, $B = \{x \in A \mid x \in Z \neq x \in R\}$, $D = \{x \in A \mid x \in Q \neq x \in I\}$, $E = \{x \in A \mid x \in C \neq x \in N\}$. Hallar $(A \cup B) \cap (D-E)$.

22. Presentar cuatro diagramas de los conjuntos numéricos y en cada uno de estos diagramas sombree la zona correspondiente a cada uno de los siguientes conjuntos: $A = \{x \in C \mid x \notin I \leftrightarrow x \in R\}$, $B = \{x \in C \mid x \in N \vee x \in R\}$, $D = \{x \in C \mid x \notin C \vee x \notin R\}$, $E = \{x \in C \mid x \notin Z \wedge x \in R\}$

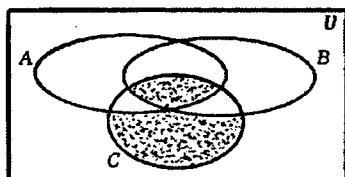
23. Dados los conjuntos: $L = \{x \in C \mid x \notin N \wedge x \notin I\}$, $S = \{x \in R \mid x \notin Z \vee x \notin N\}$, $D = \{x \in R \mid x \notin Q \leftrightarrow x \notin I\}$. Sombrear en el diagrama de los conjuntos numéricos la zona correspondiente a $M = \{x \in C \mid x \notin (L \cap S) \wedge x \in (S - D)\}$

24. Dados los conjuntos X, Y, Z y su representación en el diagrama adjunto:
 $X = \{\text{Polígonos regulares}\}$; $Y = \{\text{Cuadriláteros}\}$
 $Z = \{\text{Triángulos equiláteros}\}$. Cuáles de las regiones enumeradas en el diagrama son vacías?



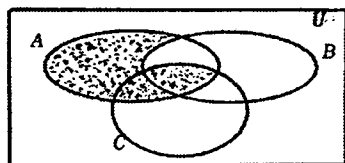
25. La parte sombreada del diagrama representa a:

- a) $C - [(A-B) \cap (B-A)]$ c) $C - [(A-B) \cup (B-A)]$
 b) $[C \cap (A-B)'] \cap (B-A)$ d) $[C \cap (B-A)'] \cap (A-B)$



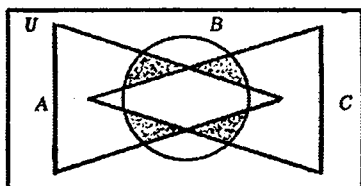
26. La región sombreada representa a:

- a) $A - (B \cap C)$ c) $(A-B) \cap (C-A)'$
 b) $A \cap (B \cup C)'$ d) $A \cap (B-C)'$



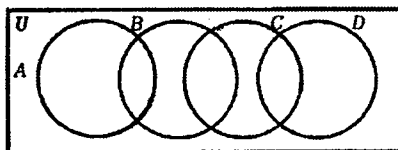
27. En el siguiente diagrama, las regiones sombreadas se identifican como la expresión:

- a) $(B \cap A) \cup (B \cap C)$ b) $(A \cup C) - (A \cap B \cap C)$
 c) $[B \cap (A \cup C)] - (A \cap B \cap C)$
 d) $(A \cap C) \cup [(A \cap B) - (B \cap C)]$

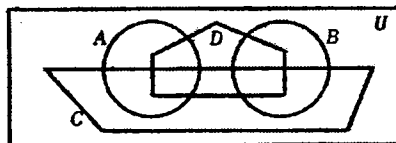


28. Sombrear en el siguiente diagrama la zona correspondiente a la siguiente operación:

$$[(A \cap B)' \cap C'] \cap [(A-B')' \cap D']$$



29. Sombrear en el diagrama adjunto:
 $[(A \cup B) - (C \cap D)] \cup [(C-D)' \cap (B-A)]$



30. Cuáles de las siguientes proposiciones:

$$a) x \in [(B-A)' - C] \quad b) x \in [(A-C) \cup (B \cup C)'] \quad c) x \in [A \cup (B \cup C)']$$

equivalen a la negación de la proposición: $x \in [C \cup (B-A)]$?

31. Sea $A*B = (A-B') \cup B$. Demostrar que las afirmaciones siguientes son verdaderas:

$$a) A*B = B*A \rightarrow A=B \quad b) (A*B)*C = A*(B*C)$$

$$c) A*(B \cup C) = (A*B) \cup (A*C)$$

32. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 6\}$, $D = C - (A \cap B)$. Cuántos elementos tiene el conjunto $P(P(D))$?

33. Si A, B, C son conjuntos y $C \subset A'$, entonces, demostrar que:

$$\{[(C \cup B) \cap A] \cup C'\} \cap B \equiv B \cap C'$$

34. Dados los conjuntos A y B . Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$a) A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \quad b) A \cap B = A \Delta (A \cup B)$$

$$c) A \cap B = (A \cup B) - (A \Delta B)$$

35. Si A, B y C son conjuntos, simplificar usando propiedades:

$$a) [(A \cap B) \cup C']' \cup (B \cup C)$$

$$b) \{[C \cup (B-A')]\} \cap [B - (C \cup A)']' \cup B$$

36. Dados los conjuntos A, B y C en U , simplificar la expresión:

$$[A \Delta (B \Delta C)] \Delta [C \Delta B']$$

37. Si $A \subset B$, simplificar: $A \cap \{(B \cup A) \cap C \cap B'\} \cup A' \cup B'$

38. Sean $A = \{3, \phi\}$, $B = \{\{3\}, \phi, \{3, \phi\}\}$ y $C = \{\{\phi\}, \{3\}\}$. Determinar $P(A) - [B \cap P(C)]$.

39. Simplificar: $[(A \cup B) - (C - A)] \cap [(A \cap B) - (A \cap C)]$

40. Si A, B, C y D son conjuntos tales que: $C \subset A'$, $A \subset B'$ y $C \cup D = D$. Simplificar: $[(A' \cup B') \cap (C' \cup D')] \cup \{[(C \cup B) \cap A] \cup C'\} \cap B$

41. Si para conjuntos A, B, C se tiene: $A \subset B$ y $C \cap A = \phi$, simplificar la expresión: $\{[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]\} \cup \{(A - B) \Delta C\}$

42. Si $A \cap B \cap C = \phi$, simplificar: $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$

43. Sean A, B, C conjuntos no vacíos, tales que: $(B \cap C) \subset \phi$, $(B \cup C) - A = \phi$. Justificando el desarrollo, hallar: $Z = (A \Delta B) \cup (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

44. Usando propiedades de conjuntos, hallar $R \cup S$, donde:

$$R = [A - (B - D)]' \cap [A' \Delta (B - D)] \text{ y } S = [(B - A) \cup (D - A)] \cup [A \cup (B \Delta D)]$$

45. Si A y B son conjuntos, demostrar que:

$$\text{si } (A \cup B) \subset [B' - (A - B)], \text{ entonces } A = \phi \wedge B = \phi$$

46. Demostrar usando propiedades sobre conjuntos que:

$$(B \cap C) \cup (B - C) \cup (B - A) = B - A' \leftrightarrow B \subset A$$

47. Demostrar, usando elementos, que: $A' \Delta B' = A \Delta B$

48. Usando elementos demostrar que:

$$[A \cap B \cap C] \cup [(A - B) - C] = [A - (B - C)] \cap [A - (C - B)]$$

49. Dados los conjuntos A y B. Demostrar que:

$$a) \text{ Si } A - B = \emptyset \text{ y } B - A = \emptyset \rightarrow A = B$$

$$b) \text{ Si } A \Delta B = \emptyset \rightarrow A = B$$

50. Dados los conjuntos A, B, C y D, demostrar:

$$a) \text{ Por elementos que: si } B = C \cap D \rightarrow B \subset C$$

$$b) \text{ Por elementos que: si } (A \subset C \wedge B \subset D) \rightarrow (A \cap B) \subset (C \cap D)$$

$$c) \text{ Usando propiedades que: si } A \Delta B' = B \rightarrow B \subset A$$

51. Demostrar, por definición, que: $P[(A \cap B) \cup C] = P(A \cup C) \cap P(B \cap C)$

52. Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Usando elementos, demostrar que:

$$B \in P(A) \text{ y } A \Delta B = A \cup B - A \cap B \rightarrow A \Delta B = A - B$$

53. Dados los conjuntos A, B y C, usando propiedades para conjuntos, demostrar que: $[A' - (B' - C)] \subset [A \Delta (B - C)'] \rightarrow (A \cup B \cup C) \subset (A \cup B' \cup C')$

54. Usando propiedades y justificando el desarrollo, demostrar que para conjuntos A, B y C, se verifica las siguientes proposiciones:

$$a) [(A \cup B) - C] \cup [A - (B \cap C)] = A - C$$

$$b) \{[(A - B') \cup (B' - A)] - B\} \cup \{B - [(A \cap B) \cup (A \cup B)']\} = A'$$

55. Usando elementos y justificando el desarrollo, demostrar que para conjuntos A, B y C, se verifica la siguiente proposición:

$$[A' - (B' - A')] \cup [(A' - B') - A'] \subset (A \cap B)'$$

56. Demostrar, usando elementos, que: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

57. Demostrar las siguientes propiedades de conjuntos, justificando cada paso: a) $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$ b) $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$

58. Para conjuntos A y B, demostrar las leyes de absorción:

$$a) A.1: A \cap (A \cup B) = A$$

$$b) A.2: A \cup (A \cap B) = A$$

59. Sombrear en el diagrama de los conjuntos numéricos, la operación:

$$S = [(R - N') \cap (C - I)] \cup [(I \cap R) \cup (Q - R)]$$



2.18 NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto A , la familia de elementos de este conjunto se llama **número cardinal** de A y se denota por:

$$\text{Card}(A) \text{ o } n(A)$$

y se lee: "cardinal de A " o "número de elementos de A ".

Por ejemplo, si $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b,c,d,\{a,b\}\}$, entonces el número de elementos de dichos conjuntos es: $n(A)=3$ y $n(B)=5$. También: $n[P(A)]=2^3=8$ y $n[P(B)]=2^5=32$.

2.18.1 PROPIEDADES

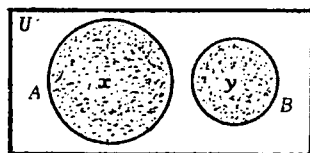
N.1: Si A y B son dos conjuntos mutuamente excluyentes (disjuntos), esto es

$$A \cap B = \emptyset \quad + \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

En efecto, sean x e y los números cardinales de A y B respectivamente, tales que:

$$x = n(A) \text{ e } y = n(B)$$

Como $A \cap B = \emptyset$, es decir, A y B no tienen elementos comunes, entonces: $n(A \cup B) = x + y$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

N.2: Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces:

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$$

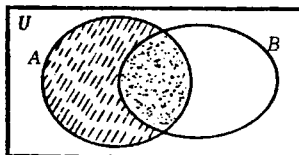
En efecto, los conjuntos $(A-B)$ y $(A \cap B)$ son disjuntos, entonces, por la propiedad N.1:

$$n[(A-B) \cup (A \cap B)] = n(A-B) + n(A \cap B)$$

$$\text{Pero } A = (A-B) \cup (A \cap B) \quad + \quad n(A) = n(A-B) + n(A \cap B)$$

de donde:

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$$



N.3: Si A y B son conjuntos tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

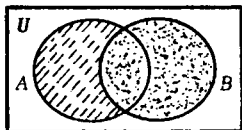
En efecto, $A \cup B = (A-B) \cup B$

Entonces, por N.1: $n(A \cup B) = n(A-B) + n(B)$

y por N.2: $n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B)$

de donde:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



N.4: Si A, B y C son conjuntos tales que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, entonces:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n[A \cup (B \cup C)] \\ &= n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad (N.3) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \quad (N.3 \text{ e } I.12) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)] \end{aligned}$$

de donde:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Nota. Tres conjuntos A, B y C que en un diagrama de Venn Euler se representan secantes mutuamente, quedan divididos en siete regiones. El número de elementos de cada región en que queda dividido dichos conjuntos, puede calcularse del modo siguiente:

Sólo A : $n_1 = n(A) - n(B \cup C) = n(A\bar{B}\bar{C})$

Sólo B : $n_2 = n(B) - n(A \cup C) = n(B\bar{A}\bar{C})$

Sólo C : $n_3 = n(C) - n(A \cup B) = n(C\bar{A}\bar{B})$

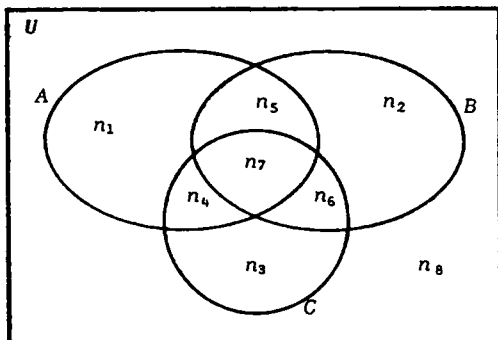
Sólo A y C : $n_4 = n(A \cap C) - n(B) = n(AC\bar{B})$

Sólo A y B : $n_5 = n(A \cap B) - n(C) = n(AB\bar{C})$

Sólo B y C : $n_6 = n(B \cap C) - n(A) = n(BC\bar{A})$

A, B y C en conjunto: $n_7 = n(A \cap B \cap C) = n(ABC)$

Ni A , ni B , ni C : $n_8 = n(U) - n(A \cup B \cup C)$



EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Si los conjuntos A y B son tales que: $n(A \cup B) = 30$, $n(A - B) = 12$ y $n(B - A) = 10$; hallar $n(A) + n(B)$.

Solución. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow 30 = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (1)

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \rightarrow 12 = n(A) - n(A \cap B)$ (2)

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \rightarrow 10 = n(B) - n(A \cap B)$ (3)

Restando (1)-(2): $n(B) = 18$, y restando (1)-(3): $n(A) = 20$

$\therefore n(A) + n(B) = 38$

EJERCICIO 2. Si $n[P(A)] = 128$, $n[P(B)] = 16$ y $n[P(A \cap B)] = 8$, hallar $n[P(A \cup B)]$

Solución. Para un conjunto X : $n[P(X)] = 2^n$

Entonces, para el conjunto A : $2^n = 128 = 2^7 \leftrightarrow n = 7$

Para el conjunto B : $2^n = 16 = 2^4 \leftrightarrow n = 4$, y para $A \cap B$: $2^n = 8 = 2^3 \leftrightarrow n = 3$

Según N.3: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 4 - 3 = 8$

$\therefore n[P(A \cup B)] = 2^8 = 256$

EJERCICIO 3. En un grupo de 100 estudiantes, 49 no llevan el curso de Sociología y 53 no siguen el curso de Filosofía. Si 27 alumnos no siguen Filosofía ni Sociología, cuántos alumnos llevan exactamente uno de tales cursos.

Solución. Sean: S = El número de alumnos que siguen el curso de Sociología.

F = El número de alumnos que siguen Filosofía

x = El número de alumnos que siguen sólo Sociología

y = " " " " " " " Filosofía

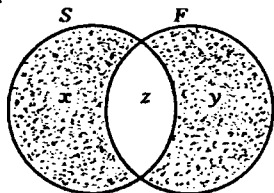
Entonces: $n(S) = x + y = 100 - 49 = 51$ (1)

$n(F) = z + y = 100 - 53 = 47$ (2)

Sumando (1) y (2): $x + y + 2z = 98$ (3)

Pero: $n(S \cup F) = 100 - 27 = 73 \rightarrow x + y + z = 73$ (4)

Restando (3)-(4), obtenemos: $z = 25 \rightarrow x + y = 48$



EJERCICIO 4. Dada la siguiente información: $n(U) = 360$, $n(A) = 120$, $n(B) = 150$, $n(C) = 100$; $n(AC) = 20$, $n(AB) = 30$, $n(BC) = 25$, $n(ABC) = 10$. Hallar $n(L \cap S)$, sabiendo que: $L = \{x \in U | x \in A \leftrightarrow x \in B\}$, $S = \{x \in U | x \in A \vee x \in C\}$.

Solución. En el diagrama de Venn Euler se tiene:

$n(A \cap B \cap C) = 10 \rightarrow e = 10$

$$n(AC) = n(A \cap C) = 20 + e + f = 20 + f = 10$$

$$n(BC) = n(B \cap C) = 25 + e + d = 25 + d = 15$$

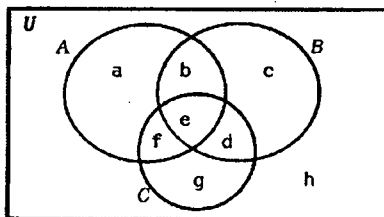
$$n(AB) = n(A \cap B) = 30 + b + e = 30 + b = 20$$

$$n(A) = 120 + a + b + e + f = 120 + a = 80$$

$$n(B) = 150 + c + b + d + e = 150 + c = 105$$

$$n(C) = 100 + d + e + f + g = 100 + g = 65$$

$$n(U) = 360 + a + b + c + d + e + f + g + h = 360 + h = 55$$



Los elementos de L y S se determinan por la siguiente tabla de valores de verdad:

Estos se eligen de los elementos de U que corresponden a las filas con valor de verdad V.

Entonces: $L = \{b, e, g, h\}$

$S = \{c, d, e, f, g, h\}$

$L \cup S = \{b, c, d, e, f, g, h\}$

$$\therefore n(L \cup S) = b + c + d + e + f + g + h = 280$$

U	L			S		
	$x \in A$	$\leftrightarrow$	$x \in B$	$x \in A$	$\rightarrow$	$x \in B$
a	V	F	F	V	F	F
b	V	V	V	V	F	F
c	F	F	V	F	V	F
d	F	F	V	F	V	V
e	V	V	V	V	V	V
f	V	F	F	V	V	V
g	F	V	F	F	V	V
h	F	V	F	F	V	F

EJERCICIO 5. Sean tres conjuntos A, B y C que tienen respectivamente n, 3n y n-1 elementos. A y B tienen n/2 elementos comunes, A y C tienen n/4 y C y B tienen 2. Además se sabe que hay un único elemento común a los tres conjuntos. Determinar el número de elementos que tiene el conjunto $K = [(A \cup B) - (A \cap B)] - C$.

Solución. Las zonas sombreadas representan al conjunto K.

$$+ n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(ABC)$$

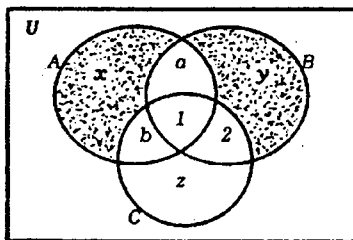
$$= n + 3n + (n-1) - \frac{n}{2} - \frac{n}{4} - 2 + 1$$

$$\text{de donde: } n(A \cup B \cup C) = -2 + (17/4)n \quad (1)$$

$$a + 1 = n(A \cap B) \quad + \quad a = \frac{n}{2} - 1 \quad (2)$$

$$n(K) = x + y = n(A \cup B \cup C) - n(C) - a \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) obtenemos: $n(K) = (11/4)n$



EJERCICIO 6. El número de personas que toman la bebida A es 190

" " " " " " " " B es 110

" " " " " " " " C es 150

El número de personas que sólo toma C es la mitad de los que sólo toman B y

1/3 de las que sólo toman A. El número de personas que sólo toman B y C es la mitad de las que sólo toman A y B. Si el número de personas que toman las tres bebidas es 1/3 de las que sólo toman A y C. Cuántas personas toman una bebida solamente?

Solución. Como datos tenemos:

$$n(A)=190, n(B)=110, n(C)=150$$

$$\text{Además: } n(\overline{CAB}) = \frac{1}{2}n(\overline{BAC}) = \frac{1}{3}n(\overline{ABC})$$

$$n(\overline{BCA}) = \frac{1}{2}n(\overline{ABC}) \text{ y } n(ABC) = \frac{1}{3}n(\overline{ACB})$$

$$\text{Si } n(\overline{CAB})=x, n(\overline{BCA})=y, n(ABC)=z$$

La distribución en el diagrama de Venn se hizo en el siguiente orden:

$$n(\overline{BAC})=2x, n(\overline{ABC})=3x, n(\overline{ABC})=2y, n(\overline{ACB})=3z$$

$$\text{Luego, si } n(A)=190 \rightarrow 3x+2y+4z = 190 \quad (1)$$

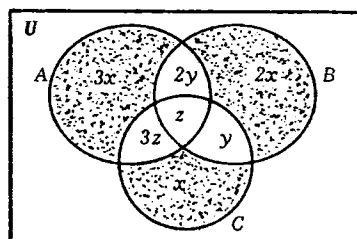
$$n(B)=110 \rightarrow 2x+3y+z = 110 \quad (2)$$

$$n(C)=150 \rightarrow x+y+4z = 150 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema (1), (2) y (3) obtenemos: $x=10, y=20, z=30$

Por lo tanto, el número de personas que toman una bebida solamente es:

$$N = x+2x+3x = 6x = 60$$



EJERCICIO 7. De una encuesta hecha a 135 personas para establecer preferencias de lectura de las revistas A, B y C se obtienen los siguientes resultados. Todos leen alguna de las tres revistas; todos menos 40, leen A; 15 leen A y B pero no C; 6 leen B y C pero no A; 10 leen sólo C. El número de los que leen A y C es el doble del número de los que leen las tres revistas. El número de los que leen sólo B es el mismo que el total de los que leen A y C. Según todo esto, hallar el número de los que leen A solamente.

Solución. Sea x el número de personas que sólo leen la revista A. La distribución en el diagrama de

Venn Euler es como sigue:

$$n(A)=135-40=95, n(\overline{ABC})=15, n(\overline{BCA})=6$$

$$n(\overline{CAB})=10. \text{ Sea } y=n(ABC), \text{ pero como:}$$

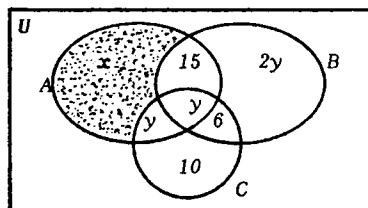
$$n(AC)=2n(ABC) \rightarrow n(\overline{ABC})=y, \text{ luego:}$$

$$n(\overline{BAC})=y+y=2y. \text{ Por tanto, en el digrama}$$

$$\text{tenemos: } n(A)=95 \rightarrow x+y+y+15=95 \rightarrow x+2y=80$$

$$n(A \cup B \cup C)=135 \rightarrow x+4y+15+6+10=135 \rightarrow x+4y=104$$

Del sistema obtenemos: $x=56$



EJERCICIO 8. De una encuesta efectuada a 120 personas sobre el consumo de los productos A, B y C se obtuvo el siguiente resultado. El número de personas que consumen sólo A y C es la mitad de las que consumen sólo A. El número de personas que consumen sólo B es el doble de las de las personas que consumen sólo A y B más sólo B y C. El número de personas que consumen sólo C más los que consumen los tres productos es 30. Si se sabe que todas las personas por lo menos consumen un producto, hallar el número de personas que consumen dos productos.

Solución. Sean x, y, z el número de personas que consumen dos productos.

Luego, la distribución en el diagrama de Venn Euler es:

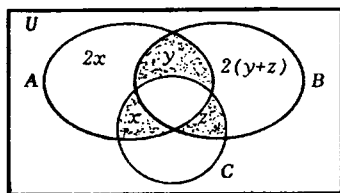
$$n(AC\bar{B}) = \frac{1}{2}n(A\bar{B}\bar{C}) \rightarrow n(A\bar{B}\bar{C}) = 2x$$

$$n(B\bar{A}\bar{C}) = 2[n(AB\bar{C}) + n(BC\bar{A})] = 2(y+z)$$

$$\text{Además: } n(\bar{C}A\bar{B}) + n(ABC) = 30 \quad (\text{dato})$$

$$+ n(A \cup B \cup C) = x + 2x + y + z + 2(y+z) + 30$$

$$+ 120 = 3x + 3y + 3z + 30 \rightarrow x + y + z = 30, \text{ es el número de personas que consumen dos productos.}$$



EJERCICIO 9. De 55 alumnos que estudian en una Universidad se obtuvo la siguiente información:

32 alumnos estudian el curso A

22 " " " " B

45 " " " " C

10 " " los tres cursos

Cuántos alumnos estudian simultáneamente dos cursos?

Solución. Sean x, y, z el número de alumnos que estudian dos cursos.

La distribución en el diagrama de Venn Euler muestra que:

$$n(A) = a + x + y + 10 \rightarrow a + x + y = 22$$

$$n(B) = b + y + z + 10 \rightarrow b + y + z = 12$$

$$n(C) = c + x + z + 10 \rightarrow c + x + z = 35$$

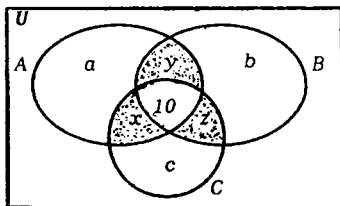
Sumando estas tres ecuaciones se tiene:

$$a + b + c + x + y + z + (x + y + z) = 69 \quad (1)$$

$$\text{Pero } a + b + c + x + y + z + 10 = 55$$

$$\text{Luego, en (1): } 45 + (x + y + z) = 69 \rightarrow x + y + z = 24$$

Por lo tanto, 24 alumnos estudian simultáneamente dos cursos.



EJERCICIO 10. En una investigación efectuada a 370 personas se determinó que: 20 personas leen solamente la revista A.

10 personas leen solamente las revistas A y B

40 " " " " " B y C

El número de personas que leen las revistas A, B y C es el doble de las que leen solamente la revista B, el cuádruplo de las que leen solamente la revista C y es 8 veces mayor de las que leen solamente las revistas A y C. Hallar: a) El número de personas que leen solamente la revista B y la revista C. b) El número de personas que leen al menos dos revistas.

Solución. Sea x el número de personas que leen solamente la revista C.

La distribución en el diagrama de Venn se efectúa así:

$$n(\overline{A}\overline{B}C)=20, \quad n(AB\overline{C})=10, \quad n(BC\overline{A})=40$$

$$n(AC\overline{B})=x \rightarrow n(ABC) = 8n(AC\overline{B}) = 8x$$

$$n(ABC) = 4n(\overline{C}AB) + 8x = 4n(\overline{C}AB) + n(\overline{C}AB) = 2x$$

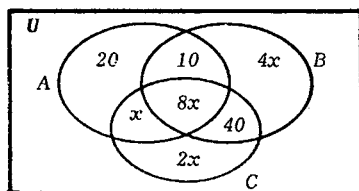
$$n(ABC) = 2n(\overline{B}AC) \rightarrow n(\overline{B}AC) = 4x$$

$$\rightarrow n(A \cup B \cup C) = 20 + 10 + 40 + x + 2x + 4x + 8x = 370$$

de donde: $x=20$

$$\text{Luego: a) } n(\overline{B}AC) = 4x = 80; \quad n(\overline{C}AB) = 2x = 40$$

$$\text{b) } n(AB\overline{C}) + n(BC\overline{A}) + n(AC\overline{B}) + n(ABC) = 10 + 40 + x + 8x = 230$$



EJERCICIO 11. En una encuesta a 100 televidentes, sobre los programas de TV, se obtuvieron los siguientes resultados: 45 ven el programa A, 50 ven el programa B, 20 ven solamente los programas B y C, y 10 ven solamente el programa C. Además el número de encuestados que ven los 3 programas es igual a la mitad de los que sólo ven los programas A y B, y un tercio de los que sólo ven el programa B. También el número de televidentes que ven sólo los programas A y C es el doble de los que sólo ven el programa A. Determinar:

a) El número de encuestados que ven sólo el programa B.

b) " " " " " no ven ninguno de los tres programas.

Solución. Datos: $n(A)=45$, $n(B)=50$, $n(BC\overline{A})=20$, $n(\overline{C}AB)=10$

Sea x el número de personas que ven los tres programas

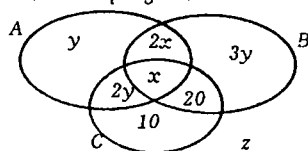
y " " " " " sólo el programa A

De modo que la distribución en el diagrama

de Venn se efectúa como sigue:

$$n(ABC) = \frac{1}{2}n(AB\overline{C}) \rightarrow n(AB\overline{C}) = 2x$$

$$n(ABC) = (1/3)n(\overline{B}AC) \rightarrow n(\overline{B}AC) = 3x$$



$$n(AC\bar{B})=2n(\bar{A}BC) + n(AC\bar{B})=2y$$

$$\text{Si } n(A)=45 \rightarrow y+2y+x+2x = 45 \leftrightarrow x+y=15 \quad (1)$$

$$n(B)=50 \rightarrow x+2x+3x+20=50 \leftrightarrow x=5, \text{ en (1): } y=10$$

$$a) n(\bar{B}\bar{A}\bar{C}) = 3x = 15$$

$$b) \text{ No ven ningún programa: } z = n(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 100 - (6x+3y+30) = 10$$

EJERCICIO 12. En una encuesta sobre preferencia de jugos de fruta de fresa, papaya y naranja, se encontró que:

El número de personas que gustan de jugo surtido de fruta es:

1/4 de las que solamente jugo de fresa

1/2 " " " " " " papaya

1/5 " " " " " " naranja

1/2 " " " " " " fresa y naranja

1/3 " " " " " " papaya y naranja

igual al número de personas que gustan solamente de jugo de fresa y naranja

1/3 de las que no gustan de ninguno de los tres jugos señalados. Si se sabe que el número de encuestados fué de 420, hallar:

- Cuántas personas gustan solamente jugo de una sola de las frutas mencionadas.
- Cuántas personas gustan al menos jugo surtido de dos de las frutas mencionadas.

Solución. Sean F, P y N el número de personas que gustan jugos de fruta de fresa, papaya y naranja, respectivamente.

Si $n(FPN)=x$, la distribución en el diagrama de Venn Euler es:

$$n(FPN) = (1/4)n(F\bar{P}\bar{N}) \rightarrow n(F\bar{P}\bar{N})=4x$$

$$\text{Análogamente: } n(P\bar{F}\bar{N})=2x, n(\bar{N}\bar{F}\bar{P})=5x, n(FP\bar{N})=2x$$

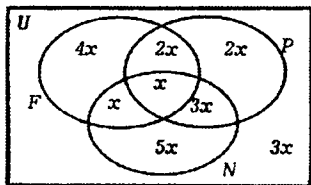
$$n(PN\bar{F})=3x, n(\bar{F}PN)=x, n(\bar{F}\bar{P}N)=3x$$

$$\text{Si } n(F \cup P \cup N)=420 \rightarrow 4x+2x+5x+x+2x+3x+x+3x=420$$

de donde: $x=20$

$$a) n(F\bar{P}\bar{N})+n(P\bar{F}\bar{N})+n(\bar{N}\bar{F}\bar{P}) = 4x+2x+5x = 11x = 220$$

$$b) n(FPN)+n(PN\bar{F})+n(FN\bar{P})+n(F\bar{P}N) = 2x+3x+x+x = 7x = 140$$



EJERCICIO 13. De 320 personas consultadas acerca de sus actividades, se obtuvo el siguiente resultado: 40 personas se desenvuelven como carpinteros solamente. El número de personas que realizan las tres actividades es el séxtuplo tanto de los que son solamente albañiles y bodegueros, como de los que son solamente carpinteros y bodegueros, y es el triple

de los que se desenvuelven solamente como albañiles y carpinteros.

El número de personas que son solamente bodegueros es igual al número de carpinteros. El número de albañiles solamente es la mitad de los que realizan las tres actividades más 6 personas. 14 personas declaran no participar en ninguna de las actividades señaladas. Indicar: a) Cuántos son solamente bodegueros? b) Cuántos son solamente albañiles? c) Cuántos son carpinteros? d) Cuántos no son ni albañiles ni carpinteros?

Solución. Sean A, B y C el número de personas consultadas que son albañiles bodegueros y carpinteros, respectivamente. Si x es el número de personas que realizan las tres actividades, la distribución en el diagrama de Venn Euler se realiza del modo siguiente:

$$n(ABC)=x \rightarrow n(AB\bar{C})=n(BC\bar{A})=x/6, \quad n(AC\bar{B})=x/3$$

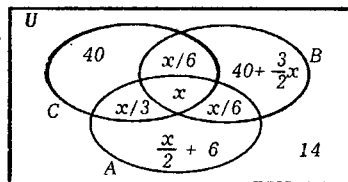
$$n(\bar{C}AB)=6+x/2$$

$$n(\bar{B}\bar{A}\bar{C})=n(C)=40+x+x/6+x/3 = 40 + \frac{3}{2}x$$

$$n(A \cup B \cup C) = 320 - 14 = 306 \rightarrow 40 + x + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{6} + 6 + 40 + \frac{3}{2}x = 306, \text{ de donde: } x=60$$

$$a) n(\bar{B}\bar{C}A)=40 + \frac{3}{2}x=130; \quad b) n(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=6+x/2=36; \quad c) n(C)=40 + \frac{3}{2}x=130$$

$$d) \text{ No son ni albañiles ni carpinteros } = n(\bar{B}\bar{A}\bar{C}) + 14 = 130 + 14 = 144$$



EJERCICIO 14. En una encuesta realizada a 290 estudiantes de una Universidad sobre las marcas de cigarrillos que gustan fumar, se obtuvo el siguiente resultado: 140 estudiantes gustan fumar Ducal, 90 gustan fumar Premier y 115 gustan fumar Winston. El número de estudiantes que fuman las tres marcas de cigarrillos es $1/5$ de los que fuman sólo Ducal y $1/3$ de los que fuman sólo Premier. El número de estudiantes que sólo fuma Ducal y Premier es $1/4$ de los que fuman sólo Winston. El número de estudiantes que sólo fuma Premier y Winston es $1/2$ de los que sólo fuman Ducal y Winston. Determinar:

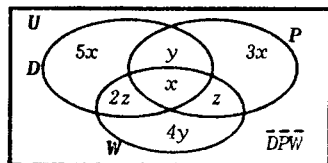
- Cuántos estudiantes gustan fumar una sola marca de cigarrillos
- Cuántos prefieren fumar sólo Ducal y Winston y sólo Premier y Winston.
- Cuántos estudiantes no gustan fumar ninguna de las 3 marcas de cigarrillos.

Solución. Sean $n(D)=140$, $n(P)=90$, $n(W)=115$

$$n(DPW)=x, \quad n(DPW)=y, \quad n(PWD)=z$$

La distribución en el diagrama de Venn se hizo en el orden siguiente:

$$n(DPW)=5x, \quad n(PDW)=3x, \quad n(WDP)=4y, \quad n(D\bar{W}\bar{P})=2z$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Luego, si: } n(D)=140 \rightarrow 6x+y+2z=140 \\ n(P)=90 \rightarrow 4x+y+z=90 \\ n(W)=115 \rightarrow x+4y+3z=115 \end{array} \right\} \leftrightarrow x=15, y=10, z=20$$

$$a) n(\overline{D}\overline{P}\overline{W}) + n(\overline{D}\overline{P}W) + n(\overline{D}P\overline{W}) = 5x+3x+4y = 160$$

$$b) n(D\overline{W}\overline{P}) + n(P\overline{W}\overline{D}) = 2z+z = 60$$

$$c) n(D \cup P \cup W) = (5x+y+2z) + (3x+z) + 4y = 245 \rightarrow n(\overline{D}\overline{P}\overline{W}) = 290-245 = 45$$

EJERCICIOS: Grupo 9

- Sean A y B dos conjuntos tales que: $n(A \cup B)=24$, $n(A-B)=10$, $n(B-A)=6$, hallar: $5n(A)-4n(B)$.
- Para un conjunto X , el número de elementos de X denotamos por $n(X)$. Si $n(A)=4$, $n(B)=3$ y $n(A \cap B)=2$, hallar la suma: $n[P(A) \cup P(B)] + n[P(A \cup B)]$.
- Dado el conjunto U y los subconjuntos A, B y C ; se tiene como datos: $n(U)=44$, $n(A)=21$, $n(B)=17$, $n(A \cap B)=14$, $n(B \cap C)=12$, $n(A \cap B \cap C')=3$, $n(A \cap B \cap C)=5$ y $n(A \cup B \cup C)'=6$. Hallar $n(C)$.
- Si $n(A)=8$ y $n(B)=8$; $n(C)=5$ y $n(D)=5$; en número máximo de elementos de $A \cup C=K$ y el número máximo de elementos de $B \cap D$ es h . Hallar: $h.k$
- Si A, B y C son conjuntos finitos demostrar que:

$$n[(A \Delta B) \cup C] = n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + 2n(A \cap B \cap C)$$
- Si A, B y C son conjuntos no disjuntos dos a dos, demostrar que:

$$n[(A \Delta B) \Delta C] = n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(A \cap C) - 2n(B \cap C) + 3n(A \cap B \cap C)$$
- Sean A, B y C tres conjuntos tales que: $A \subset C$, $B \subset C$, $n(C)=120$, $n(A \cup B)=90$, $n(A \cap B)=30$ y $n(A)=n(B)+30$. Determinar:
 - $n[(C-B) \cap A]$
 - $n[(A \cup B) - n(A \cap B)]$
 - $n[(C-A) \cup (A \cap B)]$
 - $n[(A \cup B) - (A-B)]$
- Un club consta de 78 personas. De ellas 50 juegan fútbol, 32 basket y 23 voley. Además 6 figuran en los tres deportes y 10 no practican ningún deporte. Si x es el total de personas que practican exactamente un deporte, " y " el total de personas que practican exactamente dos deportes; hallar $x-y$.
- Supóngase que Juan come huevos o tocino en el desayuno cada mañana durante el mes de enero (31 días). Si come tocino durante 25 mañanas y huevos durante 18 mañanas, cuántas mañanas come solamente huevos?

10. De 120 personas de cierta Universidad se obtuvo la información:

72 alumnos estudian el curso A

64 " " " " B

36 " " " " C

12 " " los tres cursos

Cuántos alumnos estudian exclusivamente dos cursos?

11. Un club deportivo consta de 79 socios, de los cuales 52 practica fútbol, 36 basquet, 49 voley, 63 fútbol o basket. Si 15 practican solamente fútbol y basket, y 16 solamente voley:

a) Cuántos socios practican los tres deportes.

b) Cuántos socios practican por lo menos dos de los tres deportes.

12. En una encuesta entre alumnos de una Universidad, se obtuvieron los siguientes resultados:

El 55% de los encuestados aprobaron Química Básica

El 30% " " " " Matemática Básica

El 50% " " " " Lengua

El 10% " " " " los tres cursos

El 40% de los que aprobaron Química no aprobaron ningún otro curso y el 20% de los que aprobaron Química también aprobaron MBI pero no Lengua.

El 14% de los encuestados no aprobó ninguno de los tres cursos. Si se sabe que 256 de los encuestados aprobaron MBI y Lengua, determinar:

a) Cuántos aprobaron los tres cursos?

b) Cuántos aprobaron MBI o Lengua pero no Química.

13. En una encuesta realizada sobre un determinado número de profesionales se observa que: El 72% son matemáticos, el 52% físicos, el 37% químicos, el 32% físico-matemáticos, el 12% físico-químicos, el 22% matemático-químicos y el 2% físico-matemático-químicos. Hallar:

a) El porcentaje de encuestados que siguen una carrera

b) El porcentaje de encuestados que tienen otras carreras.

14. El registro central de una Universidad proporcionó los siguientes datos respecto a un grupo de 300 estudiantes del primer ciclo. 155 están inscritos en el curso A, 170 en el curso B y 110 en el curso C. 85 están inscritos en A y B, 70 en B y C, 50 en A y C, y 35 en los tres cursos. Determinar el número de inscritos en: a) El curso A pero no en C.

b) Ninguno de los tres cursos.

15. De 150 personas consultadas sobre el deporte que practican manifestaron lo siguiente: 82 juegan fútbol, 54 juegan basket, 50 sólo juegan fútbol, 30 sólo juegan basket. Además, el número de personas que juegan sólo basket y tenis es la mitad de las que juegan sólo fútbol y tenis; el número de personas que juegan sólo fútbol y basket es el triple de las que juegan los 3 deportes; las personas que no practican ningún deporte son tantas como las que practican sólo tenis. Hallar:

- El número de personas que practican sólo dos deportes.
- El número de personas que no practican ninguno de los tres deportes.

16. En una encuesta realizada en un Super Mercado a 400 amas de casa sobre sus preferencias de 3 productos A, B y C, se obtuvo el siguiente resultado: El número de amas de casa que consume los tres productos es:

1/4 de los que consumen solamente el producto A

1/5 " " " " " " " B

1/3 " " " " " " " C

1/2 " " " " los productos A y B

1/3 " " " " " " B y C

1/3 " " " " " " A y C

Si 40 amas de casa declararon no consumir ninguno de los 3 productos hallar

- Cuántas amas de casa consumen sólo un producto
- Cuántas amas de casa consumen al menos dos productos.

17. En una encuesta realizada en un Instituto de Idiomas, se obtuvieron los siguientes resultados: El número de personas que estudian inglés es 60, alemán 48 y francés 28. El número de personas que estudian sólo francés es 1/3 de los que estudian sólo inglés y 1/2 de los que estudian sólo alemán. El número de personas que estudian los tres idiomas es 1/2 de los que sólo estudian inglés y francés. El número de personas que sólo estudian alemán y francés es 1/3 de los que sólo estudian inglés y alemán. Hallar:

- Cuántas personas estudian un solo idioma.
- Cuántas personas estudian sólo dos idiomas.

18. En un edificio de departamentos, se sabe que: en el primer piso viven el 20% de las familias, de las que la mitad tiene refrigerador. En el segundo piso viven el 40% de las familias, de las que la mitad tiene refrigerador. En el tercer piso viven el 30% de las familias, de las que la tercera parte tiene refrigerador. En el cuarto piso viven el 10% de las familias, ninguna de las cuales tiene refrigerador. a) Entre las familias con refrigerador, que porcentaje viven en el segundo piso?

CAPITULO 3

RELACIONES Y FUNCIONES

3.1 INTRODUCCION

Como concepto fundamental, la palabra *relación* significa una conexión o correspondencia de un determinado ente con otro.

Así por ejemplo, las expresiones "esposo de", "hermano de", designan relaciones entre miembros de una familia (seres vivos); las expresiones "menor que", "mayor que" denotan relaciones entre números (seres abstractos). Expresiones como estas y muchas más, llevan a entender que *relación* es un conjunto de parejas que satisfacen una propiedad.

Para fijar esta idea consideremos el siguiente ejemplo:

Sean los conjuntos $A=\{2,4,6\}$ y $B=\{1,3,5\}$ y sea la propiedad, para $x \in A$ y $y \in B$ expresada por el enunciado abierto $p(x): x < y$. Vamos a relacionar elementos de A con los elementos de B de modo que satisfagan la propiedad p .

Como $2 \in A$ y $3 \in B$ y $2 < 3 \rightarrow$ "2 está relacionado con 3 por p "

$2 \in A$ y $5 \in B$ y $2 < 5 \rightarrow$ "2 está relacionado con 5 por p "

$4 \in A$ y $5 \in B$ y $4 < 5 \rightarrow$ "4 está relacionado con 5 por p "

En cambio: $6 \in A$ y $5 \in B$ y $6 \nless 5 \rightarrow$ "6 no está relacionado con 5 por p " es decir, $6 \nless p(x,y)$.

Estas situaciones nos llevan a entender que cuando dos elementos se relacionan por alguna propiedad, estos se distinguen en un orden establecido.

3.2 PAR ORDENADO

Intuitivamente, un par ordenado es un conjunto de dos elementos en el cual cada elemento tiene un lugar fijo. Si los elementos son a y b , el par ordenado se simboliza por:

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

donde $\{a\}$ determina que a es el primer elemento, componente o coordenada

del par y $\{a,b\}$ determina que b es el segundo elemento, componente o coordenada del par.

Teorema 3.1 Dos pares ordenados son iguales si y sólo si son iguales sus primeros y segundos elementos, respectivamente. Se simboliza:

$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

Demostración. i) Probaremos en primer lugar que:

$$(a,b) = (c,d) \rightarrow a=c \wedge b=d$$

Para ello consideremos dos casos:

a) Si $a=b \rightarrow (a,b) = \{\{a\}, \{a,a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

$$\text{Luego: } \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\} \rightarrow \{a\} = \{c\} = \{c,d\} \rightarrow a=c \wedge c=d$$

b) $(a,b) = (c,d) \rightarrow \{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\} \quad (1)$

$$\text{Si } a \neq b \rightarrow \{a\} \neq \{a,b\} \wedge \{c\} \neq \{c,d\}$$

$$\text{Además como } \{a\} \in \{\{c\}, \{c,d\}\} \rightarrow \{a\} = \{c\} \rightarrow a=c$$

$$\text{También en (1): } \{a,b\} \in \{\{c\}, \{c,d\}\} \rightarrow \{a,b\} = \{c,d\}$$

Siendo $a=c$, se concluye que: $b=d$

ii) Probaremos que: $a=c \wedge b=d \rightarrow (a,b) = (c,d)$

$$\text{En efecto, si } a=c \wedge b=d \rightarrow \{a\} = \{c\} \wedge \{a,b\} = \{c,d\}$$

$$\rightarrow \{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$$

$$\rightarrow (a,b) = (c,d)$$

Por lo tanto, de i) y ii): $(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a=c \wedge b=d$

Ejemplo. Determinar los valores de x e y de modo que:

$$(x^2, 9y-1) = (6y-x, x^3)$$

Solución. Según el Teorema 3.1:

$$(x^2, 9y-1) = (6y-x, x^3) \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6y-x & \rightarrow x(x+1)=6y & (1) \\ 9y-1 = x^3 & \rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=9y & (2) \end{cases}$$

$$\text{Dividiendo (1) entre (2): } \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3} \rightarrow 2x^2-3x+2=0 \leftrightarrow x_1=2 \text{ o } x_2=1/2$$

$$\leftrightarrow y_1=1 \text{ o } y_2=1/8$$

Luego, el conjunto solución para x e y es: $S=\{(2,1), (1/2, 1/8)\}$

Comprobar que para cada uno de estos pares, se verifica la igualdad.

3.3 PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS



Dados dos conjuntos A y B , se llama producto cartesiano de A por B , en ese orden, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b) tales

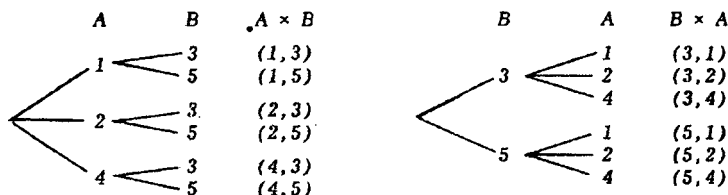
que $a \in A$ y $b \in B$. Se denota por $A \times B$ y simbólicamente se representa:

$$A \times B = \{(a,b) \in A \times B \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\text{ó } (a,b) \in A \times B \leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$$

Ejemplo 1. Dados los conjuntos: $A = \{1, 2, 4\}$ y $B = \{3, 5\}$, hallar $A \times B$ y $B \times A$ empleando un "diagrama de árbol"

Solución. El método del "diagrama de árbol" nos permite visualizar el conjunto de pares ordenados y consiste en disponer los elementos de los conjuntos A y B del modo siguiente:



Luego: $A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5)\}$

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}$

Ejemplo 2. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 3\}$, hallar:

a) $(A \times B) \cap B^2$ b) $(A - B) \times (A \cap B)$

Solución. Por extensión: $A = \{-1, 0, 1\}$ y $B = \{1, 2\}$

+ $A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

+ $B \times B = B^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

a) $(A \times B) \cap B^2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$

b) $A - B = \{-1, 0\}$ y $A \cap B = \{1\}$ + $(A - B) \times (A \cap B) = \{(-1, 1), (0, 1)\}$

Observaciones:

(1) $A \times B \neq B \times A$ (Ejemplo 1)

(2) Si A y B son conjuntos finitos, el número de elementos de $A \times B$ es igual al número de elementos de A por el número de elementos de B , es decir,
 $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

(3) Cuando $A = B$, el producto $A \times A$ se denota por: A^2 .

3.3.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

Para el producto cartesiano de conjuntos A, B y C , se cumplen las siguientes propiedades:

PC.1: Si $A \neq B \rightarrow A \times B \neq B \times A$ (No conmutatividad)

PC.2: $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

PC.3: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

PC.4: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

PC.5: $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

(Prop. Distributivas)

Demostración de PC.4

a) Demostraremos que: $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

(1) En efecto, supongamos que: $(a, b) \in [A \times (B \cup C)]$ (Hipótesis)

(2) $\rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C)$ (Def. Prod. Cart.)

(3) $a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C)$ (Def. $\cup$)

(4) $\rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C)$ (Dist. E.5a)

(5) $\rightarrow [(a, b) \in (A \times B)] \vee [(a, b) \in (A \times C)]$ (Def. Prod. Cart.)

(6) $\rightarrow (a, b) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]$ (Def. $\cup$)

(7) Por tanto, de 1 y 6: $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ (Def. $\subseteq$)

b) Demostraremos ahora que: $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

(1) En efecto, supongamos que: $(a, b) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]$ (Hipótesis)

(2) $\rightarrow (a, b) \in (A \times B) \vee (a, b) \in (A \times C)$ (Def. $\cup$)

(3) $\rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C)$ (Def. Prod. Cart.)

(4) $\rightarrow (a \in A) \wedge (b \in B \vee b \in C)$ (Dist. E.5a)

(5) $\rightarrow (a \in A) \wedge [b \in (B \cup C)]$ (Def. $\cup$)

(6) $\rightarrow (a, b) \in [A \times (B \cup C)]$ (Def. Prod. Cart.)

(7) Luego, de 1 y 6: $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$ (Def. $\subseteq$)

Por lo tanto, de a) y b), queda demostrado que: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

PC.6: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (No asociatividad)

PC.7: Si $A \subseteq B \rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times C), \forall C$ (Monotonía)

Demostración

(1) En efecto, si $A \subseteq B \rightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ (Hipótesis)

(2) Supongamos que: $(x, y) \in (A \times C)$ (Hip. Auxiliar)

(3) $\rightarrow x \in A \wedge y \in C$ (Def. Prod. Cart.)

(4) $\rightarrow x \in B \wedge y \in C$ (Pasos 1, 3 y Def. $\subseteq$)

(5) $\rightarrow (x, y) \in (B \times C)$ (Def. Prod. Cart.)

(6) Luego: $(x, y) \in (A \times C) \rightarrow (x, y) \in (B \times C)$ (Pasos 2 y 5)

(7) Por lo tanto: $(A \times C) \subseteq (B \times C)$ (Def. $\subseteq$)

PC.8: Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D \rightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$ (Monotonía)

PC.9: $(A' \times B') \subseteq (A \times B)'$

Demostración:

- (1) En efecto, supongamos que $(a,b) \in (A' \times B')$ (Hipótesis)
 (2) $\rightarrow a \in A' \wedge b \in B'$ (Def. Prod. Cart.)
 (3) $\rightarrow a \notin A \vee b \notin B$ (Def. Comp.)
 (4) $\rightarrow \neg[a \in A \wedge b \in B]$ (Morg. E. 6b)
 (5) $\rightarrow \neg[(a,b) \in (A \times B)]$ (Def. Prod. Cart.)
 (6) $\rightarrow (a,b) \notin (A \times B)$ (Negación)
 (7) $\rightarrow (a,b) \in (A \times B)'$ (Def. Comp.)
 (8) Luego, de 1 y 7: $(A' \times B') \subseteq (A \times B)'$ (Def. $\subseteq$)

$$\text{PC.10: } (A \times C = B \times C \text{ y } C \neq \emptyset) \rightarrow A = B$$

$$\text{PC.11: } (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$\text{PC.12: } (A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

3.3.2 DIAGONAL DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto A , la diagonal del producto $A \times A$ que se denota $D(A)$ se define por:

$$D(A) = \{(a,b) \in (A \times A) \mid a=b\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$

entonces: $D(A) = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$$D(B) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

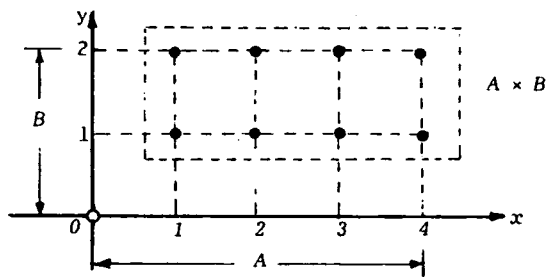
3.3.3 REPRESENTACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO CARTESIANO

Cada uno de los conjuntos A y B del conjunto producto $A \times B$, puede representarse linealmente sobre dos rectas perpendiculares, lo que nos permite establecer un sistema de coordenadas en el plano. Los elementos del conjunto A se representan sobre el eje horizontal (eje de abscisas) y los de B sobre el eje vertical (eje de ordenadas), de modo que las líneas verticales que pasan por los elementos de A y las horizontales que pasan por los elementos de B , al intersectarse, determinan los pares ordenados de $A \times B$, que representan los puntos P del plano. En este caso se dice que el punto P tiene como coordenadas x e y , o que $x \in A$ es la abscisa de P y que $y \in B$ es la ordenada de P .

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 2\}$. Representar gráficamente el producto $A \times B$.

Solución. Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{1,2\}$, entonces identificamos los elementos de A en el eje X , los de B en el eje Y del sistema de coordena-

das de un plano, el producto $A \times B$ representamos por puntos en dicho plano.



Como se puede observar las líneas horizontales y verticales trazadas por los elementos de A y B determinan 8 puntos, esto es evidente ya que: $n(A)=4$ y $n(B)=2$, entonces $n(A \times B)=4 \times 2=8$

$$\therefore A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Dados los conjuntos $A=\{2,3,5\}$, $B=\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $C=\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\}$
Establecer la validez de las siguientes afirmaciones:

- $(A \times B) \cup (B \times A)$ tiene 24 pares ordenados
- $(A \cap B)^2$ tiene 4 pares ordenados.
- $A^2 \cap B^2 \cap C^2$ tiene sólo un par ordenado.

Solución. Si $A=\{2,3,5\}$, $B=\{0,1,2,3\}$ y $C=\{-1,0,1,2\}$, entonces:

a) $n(A \times B)=3 \times 4=12$ y $n(B \times A)=4 \times 3=12$. Los conjuntos A y B tienen como elementos comunes a 2 y 3, luego, los productos $A \times B$ y $B \times A$

tienen como elementos comunes a: $(2,2), (3,3), (2,3), (3,2)$, entonces:

$n[(A \times B) \cup (B \times A)] \neq n(A \times B) + n(B \times A) \neq 24$. La afirmación es falsa.

b) $A \cap B = \{2,3\} \rightarrow n(A \cap B)^2 = 2 \times 2 = 4$. $\therefore$ Es verdadera

c) $A \cap B \cap C = \{2\} \rightarrow (A \cap B \cap C)^2 = \{(2,2)\}$ $\therefore$ Es verdadera.

EJERCICIO 2. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Si se cumple que:

- $n(C - B') \leq 0$; b) $n[A \times (B \cup C)] = 60$; c) $n(A \times B) = 2n(A \times C)$

Hallar $n(A \times C)$.

Solución. a) Si $n(C - B') \leq 0 \rightarrow n(C) \leq n(B')$. Entonces B y C son disjuntos.

b) $n[A \times (B \cup C)] = 60 \rightarrow n[(A \times B) \cup (A \times C)] = 60$ (PC.4)

Como B y C son disjuntos $\rightarrow n(A \times B) + n(A \times C) = 60$

c) Si $n(A \times B) = 2n(A \times C) \rightarrow$ En b): $3n(A \times C) = 60 \rightarrow n(A \times C) = 20$

EJERCICIO 3. Sean $U=\{1,2,3,4\}$ el conjunto universo, $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4\}$; hallar el número de elementos de $\mathcal{L}_{U \times U}(A \times B)$

Solución. Si $B=\{2,4\} \rightarrow B'=\{1,3\}=A \rightarrow n(A \times B')=n(A^2)=2 \times 2=4$ y $n(U \times U)=4 \times 4=16$
Luego: $n[\mathcal{L}_{U \times U}(A \times B')] = 16 - 4 = 12$

EJERCICIO 4. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Establecer la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $(A \times B) \subset (C \times D) \rightarrow [B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$

b) $A' \times B' = (A \times B)'$; c) $A \subset B \subset C \rightarrow [(B-D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$

Solución. Si $A \subset C$ y $B \subset D \rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$ (PC.8)

$$A \subset C \rightarrow C \cup A = C \quad \text{y} \quad B \subset D \rightarrow B \cap D = B$$

Entonces: $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B) \quad \therefore$ Es verdadera

b) Sea $x \in (A' \times B') \rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

Si $x \in (A \times B)' \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)' \rightarrow x \notin A \vee x \notin B$. Entonces: $(A' \times B') \neq (A \times B)'$

La afirmación es falsa.

c) Si $B \subset C \rightarrow B - C = \emptyset$ y según a): $B \subset D \rightarrow B - D = \emptyset$

Entonces: $[(B-D) \times C] \cap (A \times C) = (\emptyset \times C) \cap (A \times C) = \emptyset$ (PC.2)

La afirmación es falsa.

EJERCICIO 5. Dados los conjuntos A, B, C y D tal que $A \subset C$ y $B \subset D$ demostrar por definición (usando elementos) que: $(A \times B) \subset (C \times D)$.

Demostración. En efecto:

(1) Sea $(x, y) \in (A \times B)$ (Hipótesis)

(2) Entonces: $x \in A \wedge y \in B$ (Def. Prod. Cart.)

(3) Por condición dada: $A \subset C \wedge B \subset D \rightarrow x \in C \wedge y \in D$ (Def. $\subset$)

(4) Entonces: $(x, y) \in (C \times D)$ (Def. Prod. Cart.)

(5) Por lo tanto, de 1 y 4: $(A \times B) \subset (C \times D)$ (Def. $\subset$)

EJERCICIO 6. Dada la propiedad PC.12 para conjuntos cualesquiera A, B, C y D : $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

a) Ilustrarla gráficamente, considerando intervalos de modo que:

$$A \cap C \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B \cap D \neq \emptyset$$

b) Demostrar la propiedad dada.

Solución. b) Empezaremos por demostrar la propiedad dada.

(1) En efecto, sea $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$ (Hipótesis)

(2) $\rightarrow (x, y) \in (A \times B) \vee (x, y) \in (C \times D)$ (Def. $\cup$)

(3) $\rightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D)$ (Def. Prod. Cart.)

$$(4) \rightarrow (\underline{x \in A} \vee \underline{x \in C}) \wedge (\underline{x \in A} \vee \underline{y \in D}) \wedge (\underline{y \in B} \vee \underline{x \in C}) \wedge (\underline{y \in B} \vee \underline{y \in D}) \quad (\text{Dist. E.5a})$$

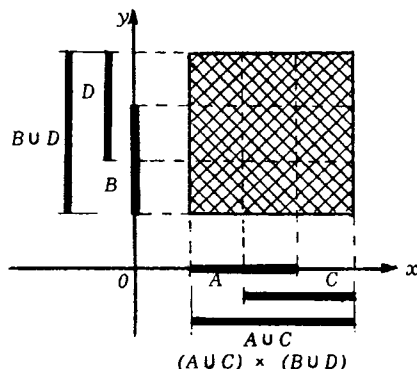
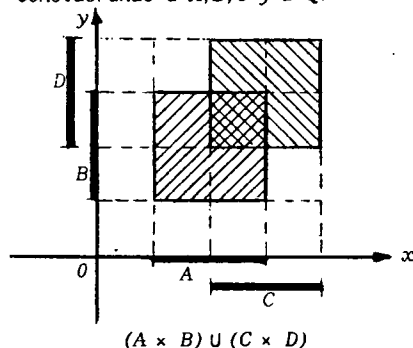
$$(5) \rightarrow (\underline{x \in A} \vee \underline{x \in C}) \wedge (\underline{y \in B} \vee \underline{y \in D}) \quad (\text{Abs. A.1})$$

$$(6) \rightarrow x \in (A \cup C) \wedge y \in (B \cup D) \quad (\text{Def. } \cup)$$

$$(7) \rightarrow (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \quad (\text{Def. Prod. Cart.})$$

$$(8) \text{ Por lo tanto, de 1 y 7: } (A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D) \quad (\text{Def. } \subset)$$

a) En un sistema coordenado, tracemos los intervalos (conjunto de puntos) considerando a A, B, C y $D \in \mathbb{Q}$.



EJERCICIOS: Grupo 10

1. Determinar los valores de x e y , de modo que se cumpla la igualdad en cada caso.

$$a) (x-7y, 2x-6y) = (15, -10)$$

$$c) (5x+2y, -4) = (-1, 2x-y)$$

$$b) (3x-8y, 4x+3y) = (4-2x-10y, 2x+4y+7)$$

$$d) (x^3-19, x^2y-6) = (y^3, xy^3)$$

2. Si $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{1}{3}(2k-1), k \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2+1 \leq 12\}$; hallar $(A \cap B) \times (B-A)$.

3. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{1}{4}(3k+1), k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2-14x+40=0\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2-1=0\}$. Hallar el número de elementos de $P = [(A \cap B) \cup C] \times (B-C)$.

4. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. De las siguientes afirmaciones cuáles son verdaderas?

$$a) (A \times B) \subset (C \times D) \rightarrow [B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$$

$$b) A = B \cap C \rightarrow A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$$

$$c) A \subset B \subset C \rightarrow [(B-D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$$

5. De las proposiciones siguientes, cuáles son verdaderas?

$$a) \text{ Si } A \subset B \text{ y } (B \times C) \subset (A \times C) \rightarrow B=A$$

$$b) \forall A, B \text{ conjuntos no vacíos: } n[(A \cup B) \times C] = n(A \times C) + n(B \times C)$$

- c) $(A \triangle B) \times C \subset (A \cup B) \times C, \forall A, B, C$
 d) $\exists A \neq B \neq F \neq G, (A \cup B) \times (G) = (A \times F) \cup (B \times G)$
6. Sean $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $F = {}_E(A \times B)$, $G = {}_E A \times {}_E B$. Hallar $F \cap G$.
7. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. De las siguientes afirmaciones, cuáles son verdaderas.
 a) ${}_{{}_X \times Y}(A \times B) = ({}_X A) \times ({}_Y B)$
 b) $(X \times Y) - (A \times B) = [(X - A) \times Y] \cup [X \times (Y - B)]$
 c) ${}_X(X \times Y) \subset {}_X(A \times B)$
8. Para conjuntos A, B y C contenidos en U , cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 a) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 c) $({}_U A) \times ({}_U B) \subset {}_{U \times U}(A \times B)$
9. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 a) $A \cap C = \emptyset \wedge B \cap D = \emptyset \rightarrow (B \times C) \subset (D' \times A')$
 b) $A \cap B = \emptyset \wedge C \subset B \rightarrow [(A - B) \times C] \cap [A \times (C \cup B)] = A \times C$
 c) $A \cap B = \emptyset \rightarrow (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$
10. Usando elementos demostrar que: $P[A \times (B \cap C)] = P(A \times B) \cap P(A \times C)$
11. Si $n(A) = 3$, $n(B) = 8$, $n(C) = 9$ y $n(B \cap C) = 2$, hallar $n[P(A \times B) \cap P(A \times C)]$.
12. Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Usando elementos demostrar que:
 $A \subset B' \wedge C \subset B \rightarrow [(A - B) \times C] \cap [A \times (C \cup B)] = A \times C$
13. Sean X, Y conjuntos no vacíos. Si A_1 y B_1 son subconjuntos de X y A_2 y B_2 son subconjuntos de Y , demostrar por definición que:
 $A_1 \times B_1 - A_2 \times B_2 = (A_1 - A_2) \times (B_1 - B_2) \cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2) \cup (A_1 - A_2) \times (B_1 - B_2)$.
14. Si se cumple que: $A \cap C' = \emptyset \wedge D \cap B' = \emptyset$, demostrar por elementos que:
 $[A \times (B - D)] \cup (A \times D) \cup [(C - A) \times D] \subset C \times B$
15. Usando propiedades sobre conjuntos demostrar que:
 $({}_E A \times {}_E B) \cup (A \times {}_E B) \cup [({}_E A) \times B] = (E \times E - E \times B) \cup (E \times B - A \times B)$
16. Use el ejercicio 15 y la identidad siguiente sobre conjuntos:
 $(X - Y) \cup (Y - Z) = X - [(Z - X) \cup (Z \cap Y)]$, para probar que:
 $({}_E A \times {}_E B) \cup (A \times {}_E B) \cup [({}_E A) \times B] = {}_{E \times E}(A \times B)$



3.4 RELACIONES BINARIAS

Se llama **relación binaria** entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B , a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$, esto es, una relación binaria R consiste en lo siguiente:

- Un conjunto A (conjunto de partida)
- Un conjunto B (conjunto de llegada)
- Un enunciado abierto $p(x,y)$ tal que $p(a,b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado.

Formalmente:

$$R = \{(x,y) \in A \times B \mid p(x,y)\} \subset A \times B$$

$$R: A \rightarrow B \leftrightarrow R \subset A \times B$$

Si $(a,b) \in A \times B$, tal que $(a,b) \in R$, la proposición $p(a,b)$ es verdadera y se escribe aRb , se lee: **a está relacionado con b** . Si para $p(a,b)$ es falso, se escribe $a \nabla b$ y se lee: **a no está relacionado con b** .

Ejemplos:

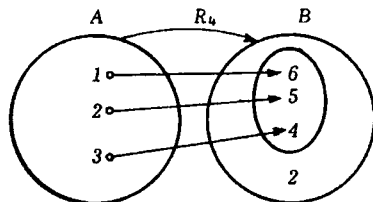
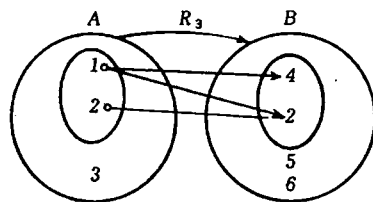
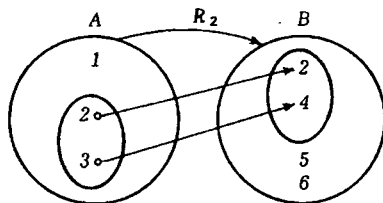
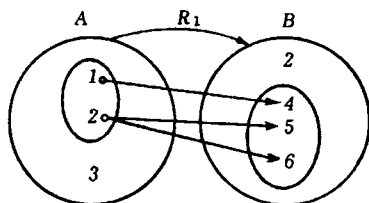
- (1) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6\}$ dos conjuntos, entonces las siguientes son relaciones entre A y B , por ser subconjuntos de $A \times B$:

$$R_1 = \{(1, 4), (2, 5), (2, 6)\} \subset (A \times B); \quad R_2 = \{(2, 2), (3, 4)\} \subset (A \times B)$$

$$R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid 2x+y \leq 6\} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2)\} \subset A \times B$$

$$R_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid x+y=7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\} \subset A \times B$$

Sus respectivos diagramas son:



(2) Si L es el conjunto de todas las rectas del plano, el paralelismo y la perpendicularidad de rectas son relaciones definidas en L .

$R_1 = \{(L_1, L_2) \in L \times L \mid L_1 \parallel L_2\}$, es la relación de paralelismo entre rectas.

$R_2 = \{(L_1, L_2) \in L \times L \mid L_1 \perp L_2\}$, es la relación de perpendicularidad entre rectas.

3.4.1 DOMINIO DE UNA RELACION

Se llama dominio de una relación R de A en B al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación. Se denota $\text{Dom}(R)$ y se simboliza:

$$R: A \rightarrow B, \text{ entonces: } \text{Dom}(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B, (x, y) \in R\}$$

esto es:

$$x \in \text{Dom}(R) \leftrightarrow \exists y \in B \mid (x, y) \in R$$

3.4.2 RANGO DE UNA RELACION

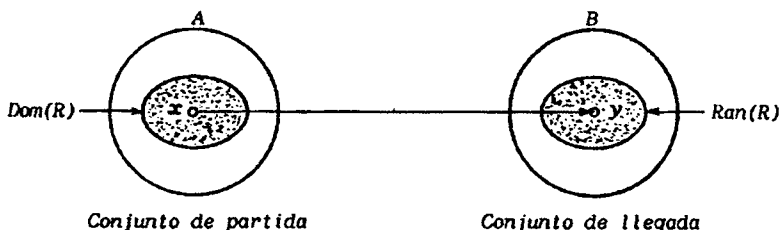
Se llama rango de una relación R de A en B al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de la relación. Se denota $\text{Ran}(R)$ y se simboliza:

$$R: A \rightarrow B, \text{ entonces: } \text{Ran}(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\}$$

esto es:

$$y \in \text{Ran}(R) \leftrightarrow \exists x \in A \mid (x, y) \in R$$

En un diagrama de Venn Euler, el dominio y rango de una relación se representa del modo siguiente:



Ejemplo 1. Si $A = \{1, 2, 5, 6\}$ y $B = \{3, 5, 7, 9\}$, hallar el dominio y rango de las relaciones $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 8\}$.

Solución. Para definir R_1 y R_2 por extensión confeccionamos las siguientes tablas para obtener los pares ordenados que satisfagan los enunciados dados.

R_1		R_2	
x	$x \geq y$	x	$x+y=8$
3	3	1	7
5	3, 5	3	5
6	3, 5	5	3

 $\rightarrow \begin{cases} \text{Dom}(R_1)=\{3, 5, 6\} \text{ y } \text{Ran}(R_1)=\{3, 5\} \\ \text{Dom}(R_2)=\{1, 3, 5\} \text{ y } \text{Ran}(R_2)=\{3, 5, 7\} \end{cases}$

$$\therefore R_1 = \{(3, 3), (5, 3), (5, 5), (6, 3), (6, 5)\} \subset A \times B$$

$$R_2 = \{(1, 7), (3, 5), (5, 3)\} \subset A \times B$$

Ejemplo 2. En el conjunto de los números naturales se definen las relaciones $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 3x - 2y = 6\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y \leq 8\}$. Hallar el dominio y rango de cada relación.

Solución. Para R_1 : $(x, y) \in R_1 \leftrightarrow 3x - 2y = 6 \leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$, con $x, y \in \mathbb{N}$

Si $y \in \mathbb{N} + x$ es un número par: $x > 2$, o sea, $x = 4, 6, 8, \dots$

Para hallar el rango, despejamos x en términos de y , esto es:

$(x, y) \in R_1 \leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + 2$. Si $x \in \mathbb{N} + y$ es múltiplo de 3 ($y \geq 3$), o sea: $y = 3, 6, 9, \dots$

$$\therefore \text{Dom}(R_1) = \{4, 6, 8, \dots\}, \text{Ran}(R_1) = \{3, 6, 9, \dots\}$$

Para R_2 : $(x, y) \in R_2 \leftrightarrow 2x + y \leq 8 \leftrightarrow y \leq 8 - 2x$, con $x, y \in \mathbb{N}$

Dado que $y \in \mathbb{N} + x < 4$, esto es: $x = 1, 2, 3$

Del mismo modo: $x \leq 4 - (1/2)y$, si $x \in \mathbb{N} + y < 8$, o sea: $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$\therefore \text{Dom}(R_2) = \{1, 2, 3\} \text{ y } \text{Ran}(R_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

3.4.3 PROPIEDADES DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION

Sean R_1 y R_2 dos relaciones entre A y B , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$D.1: \text{Dom}(R_1 \cup R_2) = \text{Dom}(R_1) \cup \text{Dom}(R_2)$$

$$D.2: \text{Dom}(R_1 \cap R_2) \subset \text{Dom}(R_1) \cap \text{Dom}(R_2)$$

$$D.3: \text{Dom}(R_1 - R_2) \supset \text{Dom}(R_1) - \text{Dom}(R_2)$$

$$R.1: \text{Ran}(R_1 \cup R_2) = \text{Ran}(R_1) \cup \text{Ran}(R_2)$$

$$R.2: \text{Ran}(R_1 \cap R_2) \subset \text{Ran}(R_1) \cap \text{Ran}(R_2)$$

$$R.3: \text{Ran}(R_1 - R_2) \supset \text{Ran}(R_1) - \text{Ran}(R_2)$$

Ejemplo. Si $R_1: A \rightarrow B$ y $R_2: A \rightarrow B$, demostrar la propiedad D.2.

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Supongamos que: } x \in \text{Dom}(R_1 \cap R_2)$$

(Hipótesis)

$$(2) \rightarrow \exists y \in B \mid (x, y) \in (R_1 \cap R_2)$$

(Def. Dom(R))

$$(3) \rightarrow (\exists y \in B \mid (x, y) \in R_1) \wedge (\exists y \in B \mid (x, y) \in R_2)$$

(Def. $\cap$)

$$(4) \rightarrow x \in \text{Dom}(R_1) \wedge x \in \text{Dom}(R_2)$$

(Def. Dom(R))

$$(5) \rightarrow x \in [\text{Dom}(R_1) \wedge \text{Dom}(R_2)]$$

(Def. $\cap$)

(6) Luego, de 1 y 5: se deduce que: $\text{Dom}(R_1 \cap R_2) \subset \text{Dom}(R_1) \cap \text{Dom}(R_2)$

3.5 RELACION INVERSA O RECÍPROCA

Dada una relación directa de A en B: $R = \{(x, y) \in A \times B \mid p(x, y)\}$, se denomina relación inversa o recíproca de R, al conjunto definido por:

$$R^* = R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

esto es:

$$(y, x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in R$$

Nótese que: $\text{Dom}(R^*) = \text{Ran}(R)$

$$\text{y } \text{Ran}(R^*) = \text{Dom}(R)$$

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ y la relación de A en B:

$$R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, b)\} \subset A \times B, \text{ entonces la relación inversa de R es:}$$

$$R^* = \{(a, 1), (c, 1), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\} \subset B \times A$$

en donde: $(a, 1) \in R^*$ pues, $(1, a) \in R$; $(b, 2) \in R^* \rightarrow (2, b) \in R$, etc.

Además: $\text{Dom}(R^*) = \text{Ran}(R) = \{a, b, c\} \subset B$

$$\text{Ran}(R^*) = \text{Dom}(R) = \{1, 2, 3\} \subset A$$

3.5.1 PROPIEDADES DE LA RELACION INVERSA

Sean $R \subset A \times B$ y $S \subset A \times B$ dos relaciones, entonces se cumple:

$$RI.1: (R \cup S)^* = R^* \cup S^*$$

$$RI.2: (R \cap S)^* = R^* \cap S^*$$

$$RI.3: (R - S)^* = R^* - S^*$$

Ejemplo. Sean las relaciones: $R \subset A \times B$ y $S \subset A \times B$, demostrar la propiedad RI.2

Demostración. a) Demostraremos que: $(R \cap S)^* \subset (R^* \cap S^*)$

En efecto:

$$(1) \text{ Sea } (x, y) \in (R \cap S)^*$$

(Hipótesis)

$$(2) \rightarrow (y, x) \in (R \cap S)$$

(Def. Rel. Inv.)

$$(3) \rightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in S$$

(Def. $\cap$)

$$(4) \rightarrow (x, y) \in R^* \wedge (x, y) \in S^*$$

(Def. Rel. Inv.)

$$(5) \rightarrow (x, y) \in (R^* \cap S^*)$$

(Def. $\cap$)

$$(6) \text{ Entonces de 1 y 5: } (R \cap S)^* \subset (R^* \cap S^*)$$

(Def. $\subset$)

b) Demostraremos que: $(R^* \cap S^*) \subset (R \cap S)^*$

En efecto:

$$(1) \text{ Sea } (y, x) \in (R^* \cap S^*)$$

(Hipótesis)

$$(2) \rightarrow (y, x) \in R^* \wedge (y, x) \in S^* \quad (\text{Def. } \cap)$$

$$(3) \rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \quad (\text{Def. Rel. Inv.})$$

$$(4) \rightarrow (x, y) \in (R \cap S) \quad (\text{Def. } \cap)$$

$$(5) \rightarrow (y, x) \in (R \cap S)^* \quad (\text{Def. Rel. Inv.})$$

$$(6) \text{ Luego, de 1 y 5: } (R^* \cap S^*) \subseteq (R \cap S)^* \quad (\text{Def. } \subseteq)$$

Por lo tanto, de a) y b) y la igualdad de conjuntos: $(R \cap S)^* = R^* \cap S^*$

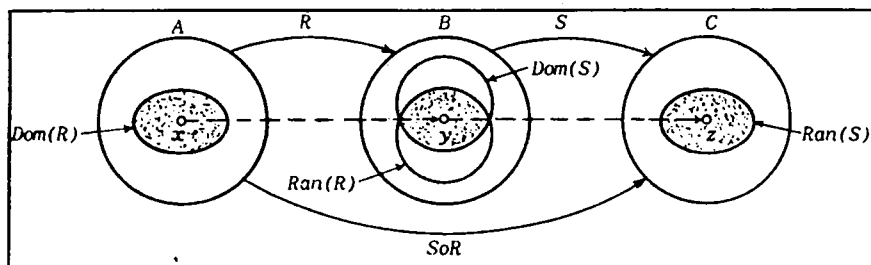
3.6 COMPOSICION DE RELACIONES

Dadas las relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, se denomina la relación compuesta de R y S , que se simboliza " SoR ", a la relación:

esto es:

$$\begin{aligned} \text{SoR} &= \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\} \\ (x, z) \in (\text{SoR}) &\leftrightarrow \exists y \in B \mid (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \end{aligned}$$

En un diagrama de Venn Euler, esta definición se ilustra como sigue:



En el diagrama se observa claramente que si:

$$\text{Dom}(S) \cap \text{Ran}(R) \neq \emptyset \rightarrow (\text{SoR}) \neq \emptyset$$

Ejemplo 1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 8\}$, $C = \{1, 2, 6, 7\}$ y las relaciones $R = \{(1, 3), (2, 5), (6, 4)\}$ de A en B , $S = \{(3, 2), (5, 1), (8, 6), (3, 7)\}$ de B en C . Hallar SoR y RoS .

Solución. SoR se determina intersectando las segundas componentes de los pares de R con las primeras componentes de los pares de S :

$$(1, 3) \in R \wedge (3, 2) \in S \rightarrow (1, 2) \in (\text{SoR})$$

$$(1, 3) \in R \wedge (3, 7) \in S \rightarrow (1, 7) \in (\text{SoR})$$

$$(2, 5) \in R \wedge (5, 1) \in S \rightarrow (2, 1) \in (\text{SoR})$$

$$\therefore \text{SoR} = \{(1, 2), (1, 7), (2, 1)\}$$

Para hallar RoS , intersectamos las segundas componentes de los pares de S

con las primeras componentes de los pares de R :

$$(3,2) \in S \wedge (2,5) \in R \rightarrow (3,5) \in (RoS)$$

$$(5,1) \in S \wedge (1,3) \in R \rightarrow (5,3) \in (RoS)$$

$$(8,6) \in S \wedge (6,4) \in R \rightarrow (8,4) \in (RoS)$$

$$\therefore RoS = \{(3,5), (5,3), (8,4)\}$$

Nótese que: $RoS \neq SoR$

Ejemplo 2. Si $R = \{(2,1), (3,4), (5,6), (6,2)\}$, $S = \{(1,4), (5,1), (6,5), (2,3)\}$. Hallar $A = (R \circ S^*) - (S^* \circ R^*)$

Solución. Las inversas de R y S son:

$$R^* = \{(1,2), (4,3), (6,5), (2,6)\}; S^* = \{(4,1), (1,5), (5,6), (3,2)\}$$

Determinación de $R^* \circ S^*$: $(4,1) \in S^* \wedge (1,2) \in R^* \rightarrow (4,2) \in (R^* \circ S^*)$

$$(5,6) \in S^* \wedge (6,5) \in R^* \rightarrow (5,5) \in (R^* \circ S^*)$$

$$(3,2) \in S^* \wedge (2,6) \in R^* \rightarrow (3,6) \in (R^* \circ S^*)$$

Determinación de $S^* \circ R^*$: $(4,3) \in R^* \wedge (3,2) \in S^* \rightarrow (4,2) \in (S^* \circ R^*)$

$$(6,5) \in R^* \wedge (5,6) \in S^* \rightarrow (6,6) \in (S^* \circ R^*)$$

$$\text{Luego: } A = \{(4,2), (5,5), (3,6)\} - \{(4,2), (6,6)\} = \{(5,5), (3,6)\}$$

3.6.1 PROPIEDADES

La composición de relaciones admite las siguientes propiedades:

CR.1: $RoS \neq SoR$ (No conmutatividad)

CR.2: $(RoS) \circ T = Ro(S \circ T)$ (Asociatividad)

CR.3: $(RoS)^* = S^* \circ R^*$

3.7 RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea la relación $R \subset A \times B$, tal que $A=B$. En este caso la relación está definida en A , y se identifica como un subconjunto de $A^2 = A \times A$, esto es:

$$R \text{ es una relación definida en } A \leftrightarrow R \subset A^2$$

Dado que todo subconjunto de A^2 es un elemento de las partes de A^2 , podemos decir también:

$$R \text{ es una relación definida en } A \leftrightarrow R \in P(A^2)$$

Es evidente que el conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo A^2 son relaciones definidas en todo el conjunto A , ya que son subconjuntos de A^2 .

Si A tiene n elementos, entonces A^2 tiene n^2 elementos y el conjunto potencia de A^2 tiene 2^{n^2} elementos, es decir, existen 2^{n^2} subconjuntos de A^2 , o

lo que es lo mismo, relaciones en A .

Ejemplo. Formar todas las relaciones que es posible definir en el conjunto $A=\{a,b\}$.

Solución. El producto cartesiano $A^2=A \times A$, es: $A=\{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$

Como $n(A^2)=4$, existen 2^4 relaciones en A , y son las siguientes:

$R_1=\emptyset$, $R_2=\{(a,a)\}$, $R_3=\{(a,b)\}$, $R_4=\{(b,a)\}$, $R_5=\{(b,b)\}$, $R_6=\{(a,a), (a,b)\}$,
 $R_7=\{(a,a), (b,a)\}$, $R_8=\{(a,a), (b,b)\}$, $R_9=\{(a,b), (b,a)\}$, $R_{10}=\{(a,b), (b,b)\}$,
 $R_{11}=\{(b,a), (b,b)\}$, $R_{12}=\{(a,a), (a,b), (b,a)\}$, $R_{13}=\{(a,a), (a,b), (b,b)\}$,
 $R_{14}=\{(a,a), (b,a), (b,b)\}$, $R_{15}=\{(a,b), (b,a), (b,b)\}$, $R_{16}=A^2$.

3.8 CLASES DE RELACIONES

3.8.1 RELACION REFLEXIVA

Dado un conjunto A para el cual se define una relación R en A , se dice que R es reflexiva si, para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$; es decir, si todo elemento de A está relacionado consigo mismo mediante la relación R .

Formalmente:

$$R: A \rightarrow A, \text{ es reflexiva} \leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow (x,x) \in R$$

Como toda relación reflexiva R en A contiene al conjunto diagonal; es decir $D(A)$ es un subconjunto de R , entonces:

$$R: A \rightarrow A, \text{ es reflexiva} \leftrightarrow D(A) \subset R$$

Ejemplos:

(1) Dado el conjunto $A=\{2,3,4\}$ y las relaciones en A :

$$R_1=\{(2,2), (2,3), (3,3), (4,4)\}; \quad R_2=\{(2,2), (2,4), (3,3), (4,3)\}$$

Establecer si son o no reflexivas.

En R_1 se observa que $\forall x \in A \rightarrow (x,x) \in R$, esto es:

$2 \in A \rightarrow (2,2) \in R$, $3 \in A \rightarrow (3,3) \in R$, $4 \in A \rightarrow (4,4) \in R$; es decir, $D(A) \subset R$.

Por lo tanto, R_1 es reflexiva.

En R_2 se observa que $4 \in A$, sin embargo $(4,4) \notin R_2$, luego, R_2 no es reflexiva.

(2) La relación de inclusión es reflexiva, toda vez que: $A \subset A$, $\forall A$.

(3) En geometría, la congruencia de figuras permite tener un ejemplo de relación reflexiva en el sentido de que "toda figura es congruente a si

misma"

- (4) La relación de paralelismo entre dos rectas en el plano es una relación reflexiva en el sentido de que "toda figura es congruente a si misma". La relación de perpendicularidad entre dos rectas en el plano no es una relación reflexiva, ya que "una recta no puede ser perpendicular a si misma".
- (5) La relación " $x \leq y$ " en los números naturales es una relación reflexiva, pues como $x \leq x$, $\forall x \in \mathbb{N} \rightarrow (x, x) \in R$.

3.8.2 RELACION SIMETRICA

Dado un conjunto A para el cual se define una relación R en A , se dice que R es simétrica, si y sólo si, $(x, y) \in R$ implica que $(y, x) \in R$.

Formalmente:

$$R: A \rightarrow A \text{ es simétrica} \leftrightarrow (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R, \forall (x, y) \in R$$

Ejemplos:

- (1) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones en A :

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}, \quad R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 5)\},$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 6\}. \text{ Establecer si son o no simétricas.}$$

En R_1 vemos que: $(1, 2) \in R_1$ y $(2, 1) \in R_1$, también $(3, 4) \in R_1$ $(4, 3) \in R_1$. Entonces, R_1 es simétrica.

En R_2 : $(4, 5) \in R$, pero $(5, 4) \notin R$, entonces, R_2 no es simétrica.

R_3 es simétrica, pues: $(x, y) \in R_3 \rightarrow x + y = 6$, $(y, x) \in R_3 \rightarrow y + x = 6$, ya que por la conmutatividad de la adición: $x + y = y + x$.

- (2) La congruencia de triángulos es una relación simétrica pues si un triángulo X es congruente con un triángulo Y , entonces Y es congruente con X .

- (3) La perpendicularidad entre rectas de un plano es una relación simétrica porque si $L_1 \perp L_2 \rightarrow L_2 \perp L_1$.

- (4) La relación definida por " x es hermano de y " es simétrica, porque si x es hermano de y , entonces, y es hermano de x .

3.8.3 RELACION TRANSITIVA

Dado un conjunto A para el cual se define una relación R en A , se dice que R es transitiva, si y sólo si, " $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, implica que

$(x, z) \in R$ ". Formalmente:

$$R: A \rightarrow A \text{ es transitiva} \leftrightarrow [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \rightarrow (x, z) \in R$$

Si comparamos esta definición con la definición 3.6, se puede afirmar también que:

$$R: A \rightarrow A \text{ es transitiva} \leftrightarrow (R \circ R) \subset R$$

Ejemplos:

(1) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones:

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}, \quad R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$$

Establecer si son o no transitivas.

En R_1 se tiene: $(1, 1) \in R_1 \wedge (1, 2) \in R_1 \rightarrow (1, 2) \in R_1$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad \quad} \\ (1, 2) \in R_1 \wedge (2, 2) \in R_1 \rightarrow (1, 2) \in R_1 \end{array}$$

$$(3, 1) \in R_1 \wedge (1, 1) \in R_1 \rightarrow (3, 1) \in R_1$$

$$(4, 3) \in R_1 \wedge (3, 1) \in R_1 \rightarrow (4, 1) \in R_1$$

$$(4, 2) \in R_1 \wedge (2, 2) \in R_1 \rightarrow (4, 2) \in R_1$$

Entonces R_1 es transitiva.

En R_2 : $(2, 1) \in R_2 \wedge (1, 3) \in R_2$, pero $(2, 3) \notin R_2$; luego, R_2 no es transitiva.

En R_3 apliquemos la segunda definición de 3.8.3. Vemos que: $R_3 \circ R_3 = \emptyset$ y como $\emptyset \subset R_3 \rightarrow (R_3 \circ R_3) \subset R_3$, luego R_3 es transitiva.

(2) La inclusión de conjuntos es una relación transitiva, pues si:

$$A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C.$$

(3) La implicación en Lógica es también una relación transitiva (Principio del silogismo hipotético): $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(4) La relación " $x < y$ " es también transitiva. En efecto, si:

$$a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$$

3.8.4 RELACION DE EQUIVALENCIA

Toda relación R definida en un conjunto A es una relación de equivalencia, si y sólo si, se verifica:

a) $(x, x) \in R, \forall x \in A$, es decir, R es reflexiva.

b) Si $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$, es decir, R es simétrica.

c) Si $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$, es decir, R es transitiva.

Ejemplos:

(1) Para el conjunto $A = \{1, 3, 5\}$, definimos la relación:

$R = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$, verificar si es de equivalencia.

En efecto, en R observamos que;

a) Tiene entre sus elementos a todos los pares de la forma (x, x) , donde $x \in A$.
Es decir, R es reflexiva.

b) Tiene como elementos dos pares de la forma (x, y) , (y, x) , donde $x \in A$, $y \in A$.
Es decir, R es simétrica.

c) R también es transitiva, puest que:

$(1, 1) \in R \wedge (1, 3) \in R \rightarrow (1, 3) \in R$, es V

$(3, 3) \in R \wedge (3, 1) \in R \rightarrow (3, 1) \in R$, es V

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

(2) La relación de "igualdad": $R = \{(x, y) | x = y\}$, es una relación de equivalencia, pues se verifica siempre:

a) $a = a$ b) $a = b \rightarrow b = a$ c) $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$

(3) Son también relaciones de equivalencia:

- a) El paralelismo de rectas
- b) La igualdad de conjuntos.

(4) La relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ es una relación de equivalencia.

En efecto:

a) Reflexividad: Si $x = y \rightarrow x - x = 0 \rightarrow x - x = 2(0)$, $0 \in \mathbb{Z}$

Luego, $(x, x) \in R \rightarrow R$ es reflexiva

b) Simetría: Se tiene: $x - y = 2k$, multiplicando por -1 ,

$y - x = -2k \rightarrow y - x = 2(-k)$, $-k \in \mathbb{Z}$. Luego, $(y, x) \in R \rightarrow R$ es simétrica

c) Transitividad: Si $(x, y) \in R$ $(y, z) \in R$, entonces:

$\exists k_1 \in \mathbb{Z} | x - y = 2k_1$ y $\exists k_2 \in \mathbb{Z} | y - z = 2k_2$

Es decir, si $x - y = 2k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z} \wedge y - z = 2k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, entonces, sumando se tiene:

$x - z = 2(k_1 + k_2) = 2k_3$, $k_3 \in \mathbb{Z}$. Luego: $(x - z) \in R \rightarrow R$ es transitiva.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

3.8.5 RELACION ANTISIMETRICA



Una relación R , definida en un conjunto A , se dice que es antisimétrica, si y sólo si, $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$. Formalmente:

$R: A \rightarrow A$ es antisimétrica $\leftrightarrow [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \rightarrow x = y$

o también:

$$R:A \rightarrow A \text{ es antisimétrica} \leftrightarrow (R \cap R^*) \subset D(A)$$

Ejemplos:

(1) La relación de inclusión de conjuntos es una relación antisimétrica, ya que si: $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A=B$

(2) Dado el conjunto $A=\{a,b,c\}$ y las relaciones en A

$$R=\{(a,a), (a,b), (b,c), (b,b)\} ; \quad S=\{(a,b), (c,c), (a,c), (b,a)\}$$

Determinar si son o no antisimétricas.

En R aplicamos la segunda definición: $R^*=\{(a,a), (b,a), (c,b), (b,b)\}$

Entonces: $R \cap R^* = \{(a,a), (b,b)\} \subset D(A)$. Luego, R es antisimétrica.

En S : $(a,b) \in S$ y $(b,a) \in S$, pero $a \neq b$; luego, S no es antisimétrica.

(3) La relación " $x \leq y$ " es antisimétrica, pues si: $a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a=b$

(4) La relación " x divide a y " es antisimétrica, pues si c divide a d y d divide a $c \rightarrow c=d$.

3.8.6 RELACION DE ORDEN



Dado un conjunto A , para el cual se define una relación R en A , se dice que R es una **relación de orden**, si y sólo si, se verifican las siguientes propiedades:

- a) $(x,x) \in R, \forall x \in A$, R es reflexiva.
- b) Si $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \rightarrow x=y$; R es antisimétrica
- c) Si $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$, R es transitiva.

Observaciones:

- (1) La relación R toma el nombre de relación de orden u orden parcial.
- (2) Al conjunto A , en el cual se ha definido una relación de orden R , se denomina conjunto ordenado o parcialmente ordenado por la relación R .
- (3) Para designar las relaciones de orden se usan especialmente los signos: $\geq, \leq, >, <$, etc.
- (4) En general, dar un conjunto A provisto de una relación cualquiera R , significa considerar un nuevo conjunto $\{A,R\}$ cuyos elementos son el conjunto A y la relación R (Conjunto ordenado).

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS



EJERCICIO 1. Sea $M = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Si $R = \{(x, y) \mid 2x - y = 5\} \subset M \times N$ y si m es la suma de todos los elementos del dominio de R y n es la suma de los elementos del rango, hallar $m \cdot n$.

Solución. Definamos R por extensión:

$$\text{Si } x=1 \rightarrow y=2-5=-3 \notin M \rightarrow (1, -3) \notin R$$

$$x=2 \rightarrow y=4-5=-1 \notin M \rightarrow (2, -1) \notin R$$

$$x=3 \rightarrow y=6-5=1 \in M \rightarrow (3, 1) \in R$$

Verificar que para $x=4, 5, 6, 7$ se obtiene: $y=3, 5, 7, 9$, respectivamente.

Luego: $R = \{(3, 1), (4, 3), (5, 5), (6, 7), (7, 9)\}$.

Entonces: $m=25$ y $n=25 \quad \therefore m \cdot n = 625$

EJERCICIO 2. Sea $A = \{x \in \mathbb{Z}_9^+ \mid x \leq 9\}$ y definimos: $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x^2\}$, $S = \{(x, y) \in A^2 \mid y = 2x\}$, $T = \{(x, y) \in A^2 \mid x < 4 \wedge y > 7\}$, hallar: $n(R) + n(S) + n(T)$.

Solución. Si $A = \{x \in \mathbb{Z}_9^+ \mid x \leq 9\} \rightarrow A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$\text{Si } y=x^2 \rightarrow R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \rightarrow n(R)=4$$

$$y=2x \rightarrow S = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\} \rightarrow n(S)=5$$

Para $(x < 4) \wedge (y > 7)$, se tiene:

$$T = \{(0, 8), (1, 8), (2, 8), (3, 8), (0, 9), (1, 9), (2, 9), (3, 9)\} \rightarrow n(T)=8$$

$$\therefore n(R) + n(S) + n(T) = 17$$

EJERCICIO 3. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define una relación R por: $(x, y) \in R \leftrightarrow x^2 - 2 \leq y$. Si m es la suma de los elementos del dominio de R y n es la suma de los elementos del rango de R , hallar $m + n$.

Solución. Identifiquemos R por extensión, sabiendo que: $y \geq x^2 - 2$

$$\text{Si } x=1 \in A \rightarrow y \geq -1 \rightarrow (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) \in R$$

$$x=2 \in A \rightarrow y \geq 2 \rightarrow (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5) \in R$$

$$x=3 \in A \rightarrow y \geq 7 \rightarrow \nexists (x, y) \in R \mid y \geq x^2 - 2$$

Luego: $\text{Dom}(R) = \{1, 2\}$ y $\text{Ran}(R) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow m+n=3+15=18$

EJERCICIO 4. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, sea: $R \subset A \times B$, donde $(x, y) \in R \leftrightarrow x < y$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $\text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(R^*) = \emptyset$

b) $R \cap R^*$ tiene 12 elementos

c) La relación T definida por: $(x, y) \in T \leftrightarrow \exists s \in A \mid (x, s) \in R^* \wedge (s, y) \in R$, es simétrica.

Solución. $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

$$R^* = \{(3,1), (5,1), (3,2), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

- a) $\text{Dom}(R)=A$ y $\text{Dom}(R^*)=\{3,5\} \rightarrow \text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(R^*)=\{3,5\} \neq \emptyset$ $\therefore$ Es falsa
 b) $n(R)=6$ y $n(R^*)=6$, como R y R^* son conjuntos disjuntos ($R \cap R^* = \emptyset$), entonces: $n(R \cup R^*)=6+6=12$. La afirmación es verdadera

- c) $(x,y) \in T \leftrightarrow \exists s \in A [(x,s) \in R^* \wedge (s,y) \in R]$

$$(3,1) \in R^* \wedge (1,3) \in R \rightarrow (3,3) \in T \qquad (5,1) \in R^* \wedge (1,5) \in R \rightarrow (5,5) \in T$$

$$(3,1) \in R^* \wedge (1,5) \in R \rightarrow (3,5) \in T \qquad (5,1) \in R^* \wedge (1,3) \in R \rightarrow (5,3) \in T$$

Luego, $T=\{(3,3), (3,5), (5,5), (5,3)\}$

Vemos que: $T=T^* \rightarrow T$ es simétrica. La afirmación es verdadera.

EJERCICIO 5. En el conjunto $A=\{a,b,c,d,e\}$ se definen las relaciones:

$$R=\{(a,b), (b,c), (d,e), (e,d), (a,c), (d,d), (e,e), (c,c)\},$$

$S=\{(a,d), (d,e), (e,a), (e,e)\}$ y $T=\{(b,a), (a,b)\}$. Cuáles son transitivas?. En aquellos que no son, completar elementos de manera que se obtengan relaciones transitivas.

Solución. En R : $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$, es V.

$$(b,c) \in R \wedge (c,c) \in R \rightarrow (b,c) \in R, \text{ es V.}$$

$$(d,e) \in R \wedge (e,d) \in R \rightarrow (d,d) \in R, \text{ es V.}$$

$$(e,d) \in R \wedge (d,d) \in R \rightarrow (e,d) \in R, \text{ es V}$$

$$(d,e) \in R \wedge (e,e) \in R \rightarrow (d,e) \in R, \text{ es V.}$$

Luego, R es transitiva.

En S se tiene: $(a,d) \in S \wedge (d,e) \in S \rightarrow (a,e) \in S$, es F.

$$(d,e) \in S \wedge (e,a) \in S \rightarrow (d,a) \in S, \text{ es F.}$$

Entonces, S no es transitiva. Debemos agregar los pares (a,e) , (d,a) y (a,a) , (d,d) . Entonces: $S_1=\{(a,d), (d,e), (e,a), (e,e), (a,e), (d,a), (a,a), (d,d)\}$

Ahora en S_1 : $(e,a) \in S_1 \wedge (a,d) \in S_1 \rightarrow (e,d) \in S_1$, es F.

Por último, completamos con (e,d) y obtenemos una relación transitiva:

$$S_2=\{(a,d), (d,e), (e,a), (e,e), (a,e), (d,a), (a,a), (d,d), (e,d)\}$$

En T se tiene: $(b,a) \in T \wedge (a,b) \in T \rightarrow (b,b) \in T$, es F.

Luego, T no es transitiva. Agregando (b,b) y (a,a) obtenemos:

$$T_1=\{(b,a), (a,b), (b,b), (a,a)\}$$

Verificar que T_1 es transitiva.

EJERCICIO 6. Si R es una relación definida en A , se afirma:

$$a) R \text{ es reflexiva} \rightarrow \text{Dom}(R)=\text{Dom}(R^*)$$

- b) R es simétrica y transitiva $\rightarrow R$ es reflexiva. c) Si $A=\{a,b,c\}$ y $R=\{(a,a), (b,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$, entonces R es una relación de equivalencia. Hallar el valor de verdad de cada afirmación.

Solución. a) Sabemos que si $R: A \rightarrow A$ es reflexiva $\forall x \in A \rightarrow (x, x) \in R$. Entonces:

$$\text{Dom}(R) = \text{Ran}(R) = A \text{ y como } \text{Ran}(R) = \text{Dom}(R^*) \rightarrow \text{Dom}(R) = \text{Dom}(R^*).$$

La afirmación es verdadera.

b) Supongamos que $A = \{1, 2, 3\}$, entonces una relación en A es:

$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ y $R^* = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2)\}$. Vemos que $R = R^*$, entonces R es simétrica. Además: $(1, 2) \in R \wedge (2, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$, R es transitiva. Sin embargo, $(3, 3) \notin R \rightarrow R$ no es reflexiva. La afirmación es F

c) Analicemos si R es reflexiva, simétrica y transitiva:

i) Vemos que $\forall x \in A$, $(x, x) \in R \rightarrow R$ es reflexiva.

ii) $(a, c) \in R$, pero $(c, a) \notin R \rightarrow R$ no es simétrica

No se cumple la segunda condición, entonces R no es de equivalencia. La afirmación es falsa.

EJEMPLO 7. Si $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x - y \leq 3, y - x \leq 4\}$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- a) R es reflexiva b) R es simétrica c) R no es transitiva
d) R es de equivalencia

Solución. a) Si hacemos $y = x \rightarrow x - x \leq 3, x - x \leq 4$, es verdadera $\forall x \in \mathbb{Q}$, entonces: $(x, x) \in R$. Luego R es reflexiva. La afirmación es verdadera.

b) R no es simétrica porque: $x - y \leq 3$ no equivale a $y - x \leq 3$

$y - x \leq 4$ no equivale a $x - y \leq 4$. La afirmación es F.

c) Si R es transitiva: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Esto es: $(x - y \leq 3, y - z \leq 4) \wedge (y - z \leq 3, z - x \leq 4) \rightarrow (x - z \leq 3, z - x \leq 4)$

Veamos si sumando las desigualdades del antecedente se logra implicar el consecuente: $x - y + y - z \leq 6, y - x + z - y \leq 4 \rightarrow x - z \leq 6, z - x \leq 4$. No se logra implicar el consecuente, entonces R no es transitiva. La afirmación es verdadera.

Otra forma de comprobar si R es o no transitiva es la siguiente: Los pares, $(1, 4)$ y $(4, 7)$ satisfacen el antecedente, pero el par $(1, 7)$ no satisface el consecuente, esto es: $(1, 4) \in R \wedge (4, 7) \in R \rightarrow (1, 7) \notin R$. $\therefore R$ no es transitiva.

d) Por a, b y c se deduce que R no es de equivalencia. La afirmación es F.

Por lo tanto, son verdaderas las afirmaciones a y c.

EJERCICIO 8. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy \text{ es par}\}$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- a) S es reflexiva en $\mathbb{N}$ b) S es simétrica en $\mathbb{N}$ c) S es transitiva en $\mathbb{N}$

Solución. a) Vemos que $(1, 1) \notin S, (3, 3) \notin S$, etc, es decir, $(x, x) \notin S, \forall x \in \mathbb{N}$. Luego S no es reflexiva. La afirmación es falsa.

b) Si xy es par $\rightarrow yx$ es par, entonces S es simétrica. La afirmación es V.

c) Veamos un ejemplo: $(3,4) \in S \wedge (4,5) \in S \rightarrow (3,5) \in S$

El antecedente es verdadero, sin embargo, el consecuente es falso, (el producto es impar), luego S no es transitiva. La afirmación es falsa.

Por lo tanto, sólo la afirmación b es verdadera.

EJERCICIO 9. En el conjunto $A=\{1,2,3,4,5\}$ se definen las relaciones R y

T por: $R=\{(1,3), (2,4), (3,5), (1,1), (2,2), (4,2), (3,1)\}$ y

$T=\{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?

a) R es transitiva pero no simétrica

b) $R \cap T = \{(1,1), (2,2)\}$

c) $\text{Dom}(R) - \text{Dom}(T) \neq \emptyset$

Solución. a) En R : $(1,3) \in R \wedge (3,5) \in R \rightarrow (1,5) \notin R$, luego, R no es transitiva.
 $(3,5) \in R \wedge (5,3) \notin R$, entonces R no es simétrica.

La afirmación es falsa.

b) $T=\{(3,1), (4,2), (5,3), (1,1), (2,2), (4,2)\} \rightarrow R \cap T=\{(1,3), (3,1), (1,1), (2,2), (2,4), (4,2)\}$. La afirmación es falsa.

c) $\text{Dom}(R)=\{1,2,3,4\}$ y $\text{Dom}(T)=\{1,2,3,4,5\} \rightarrow \text{Dom}(R) - \text{Dom}(T) = \emptyset$

La afirmación es falsa. ($\therefore$ Todas las afirmaciones son falsas)

EJERCICIO 10. En $\mathbb{Z}$ se definen las siguientes relaciones:

$R_1=\{(x,y) \mid x^2+y^2=x\}$, $R_2=\{(x,y) \mid xy=n^2, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}$,

$R_3=\{(x,y) \mid x \leq |y|\}$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Las tres son reflexivas

b) R_1 y R_2 son simétricas, pero no R_3

c) R_1 y R_3 son transitivas, pero no R_2

Solución. a) Haciendo $y=x$ en cada una de las relaciones se tiene:

En R_1 : $x^2+x = x^2+x \quad \therefore R_1$ es reflexiva

En R_2 : $x \cdot x = n^2 \rightarrow x=n$, R_2 es reflexiva.

En R_3 : $x \leq |x|$, la igualdad se cumple para $x \geq 0$, pero no $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Luego, la afirmación es falsa.

b) En R_1 : $x^2+y^2=x$, es equivalente a: $y^2+x^2=y$; R_1 es simétrica.

En R_2 : $xy=n^2$, es equivalente a $yx=n^2$, luego R_2 es simétrica.

En R_3 : $x \leq |y|$ no es equivalente a $y \leq |x|$, luego, R_3 no es simétrica.

Luego, la afirmación es verdadera.

c) Como toda relación reflexiva es transitiva, por a) se deduce que R_1 y R_2 son transitivas y R_3 no es transitiva. Luego, la afirmación es falsa.

Por lo tanto, sólo la afirmación b) es verdadera.

EJERCICIO 11. Para las siguientes relaciones en Z : $R_1 = \{(x, y) | x - y = 3k, k \in Z\}$
 $R_2 = \{(x, y) | x + y = 2h, h \in Z\}$, $R_3 = \{(x, y) | x \leq y\}$.Cuál de las alternativas es la correcta?

- a) R_1 no es transitiva
 b) R_2 es reflexiva pero no simétrica
 c) R_3 es reflexiva y simétrica
 d) R_1 y R_2 son de equivalencia

Solución. Analicemos cada una de las relaciones en cuanto a reflexividad, simetría y transitividad.

1) Reflexividad: En R_1 , si $x = y \rightarrow x - x = 0 \rightarrow x - y = 3(0)$, $0 \in Z$

Luego, $(x, x) \in R_1$, entonces, R_1 es reflexiva.

En R_2 : si $x = y \rightarrow x + x = 2h \rightarrow x = h$ ($x \in Z \rightarrow h \in Z$), luego, $(x, x) \in R_2$, es reflexiva.

En R_3 : si $x = y \rightarrow x \leq x \rightarrow (x, x) \in R_3$, luego, R_3 es reflexiva.

2) Simetría: En R_1 , $x - y = 3k \rightarrow y - x = 3(-k)$, $-k \in Z \rightarrow (y, x) \in R_1$. $\therefore R_1$ es simétrica

En R_2 : si $(x, y) \in R_2$ y $(y, x) \in R_2 \rightarrow \exists h_1 \in Z | x + 2y = 2h_1$ y $\exists h_2 \in Z | y + 2x = 2h_2$
 esto es, $x + 2y = 2h_1$ y $y + 2x = 2h_2$. Restando: $y - x = 2(h_1 - h_2) = 2h_3$ ($h_3 \in Z$)

Entonces, $(y, x) \in R_2$, luego, R_2 es simétrica.

En R_3 : $x \leq y$ no es equivalente a $y \leq x$, por lo que R_3 no es simétrica.

3) Transitividad: Como todas las relaciones son reflexivas, éstas también son transitivas, en efecto:

En R_1 , si $(x, y) \in R_1$ y $(y, z) \in R_1 \rightarrow \exists k_1 \in Z | x - y = 3k_1$ y $\exists k_2 \in Z | y - z = 3k_2$. Sumando se tiene: $x - z = 3(k_1 + k_2) = 3k_3$, $k_3 \in Z$. Entonces $(x, z) \in R_1$. $\therefore R_1$ es transitiva

En R_2 , si $(x, y) \in R_2$ y $(y, z) \in R_2 \rightarrow \exists h_1 \in Z | x + 2y = 2h_1$ y $\exists h_2 \in Z | 2y + z = 2h_2$. Restando: $(x - z) = 2(h_1 - h_2) = 2h_3$, $h_3 \in Z$. Entonces $(x, z) \in R_2$. $\therefore R_2$ es transitiva

En R_3 : si $x \leq y$ y $y \leq z \rightarrow x \leq z$, lo cual es cierto. Entonces $(x, z) \in R_3$.

Luego, R_3 es transitiva.

Por lo tanto, R_1 y R_2 son de equivalencia. La alternativa d) es la correcta.

EJERCICIO 12. En Z se definen las relaciones $R_1 = \{(x, y) | 2x + y = 5\}$,

$R_2 = \{(x, y) | x - 3y = 12\}$. Si la relación R en Z es tal que:

$(x, y) \in R \leftrightarrow \exists u \in Z | (x, u) \in R_1 \wedge (u, y) \in R_2$; entonces, hallar la relación R .

Solución. Vemos que un elemento del rango de R_1 debe ser igual a un elemento del dominio de R_2 .

Luego, en R_1 , haciendo $u = y = 5 - 2x$ y en R_2 , $u = x - 3y + 12$, se tiene por transitividad que: $5 - 2x = x - 3y + 12$, de donde: $2x + 3y = -7 \rightarrow R = \{(x, y) | 2x + 3y = -7\}$

EJERCICIO 13. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación en A : $R = \{(2, 2), (2, 1), (1, 1), (4, 4), (3, 3), (x, y), (2, 3), (z, y), (3, 1)\}$. Si R es de equivalencia en A , hallar el valor de $3x + 2y - z$.

Solución. a) R es reflexiva $\leftrightarrow \forall x \in A, (x, x) \in R$

$$(1, 1) \in R, (2, 2) \in R, (4, 4) \in R, (3, z) \in R \rightarrow z = 3$$

b) R es simétrica $\leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R, \forall (x, y) \in R$

$$\text{Si } (2, 1) \in R \rightarrow (1, 2) = (x, y) \rightarrow x = 1, y = 2$$

Veamos si para estos valores de x, y, z se verifica la simetría y transitividad de R . $(x, z) = (1, 3) \in R \rightarrow (3, 1) \in R$, lo cual es cierto

$$(z, y) = (3, 2) \in R \rightarrow (2, 3) \in R, \text{ también es cierto}$$

c) R es transitiva $\leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

$$(2, 1) \in R \wedge (x, y) = (1, 2) \rightarrow (2, 2) \in R, \text{ es cierto}$$

$$(3, 1) \in R \wedge (x, z) = (1, 3) \in R \rightarrow (3, 3) \in R, \text{ es cierto}$$

$$\text{Por lo tanto: } 3x + 2y - z = 3(1) + 2(2) - 3 = 4$$

EJERCICIO 14. Sean R_1, R_2 y R_3 relaciones en A . Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Si R_1 es reflexiva, R_2 es simétrica y R_3 es transitiva, entonces

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \text{ es de equivalencia.}$$

b) Si R_1 y R_2 son de equivalencia, entonces $R_1 \cap R_2$ es de equivalencia.

c) Si $R_1 \cup R_2$ es de equivalencia, entonces R_1 es reflexiva o R_2 es reflexiva

Solución. Supongamos que: $A = \{1, 2, 3\}$ y analicemos cada una de las afirmaciones dadas.

a) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ es una relación reflexiva en A .

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\} \text{ es una relación simétrica en } A.$$

$$R_3 = \{(1, 2), (2, 2)\} \text{ es una relación transitiva en } A.$$

Entonces: $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 2)\}$, es reflexiva pero no simétrica, puesto que: $(1, 2) \in R \wedge (2, 1) \notin R$, entonces R no es de equivalencia. La afirmación es falsa.

b) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ son de equivalencia $\rightarrow R_1 \cap R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ es de equivalencia en A . Luego, la afirmación es verdadera.

c) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2)\}$ es reflexiva en A ; $R_2 = \{(2, 2), (2, 3)\}$ no es reflexiva en $A \rightarrow R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3)\}$, es de equivalencia. Luego, la afirmación es verdadera.

EJERCICIO 15. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Si $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x - y \text{ es natural}\}$, entonces R_1 es de equivalencia.

b) Si T es una relación transitiva en $A = \{1, 2, 3\}$, entonces T^* es transitiva.

- c) Si S es una relación simétrica y T es una relación transitiva en $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $S \cup T$ es simétrica y transitiva.

Solución. a) Si $x=3, y=2 \rightarrow 3-2=1 \in \mathbb{N} \rightarrow (3,2) \in R_1$

$$x=2, y=3 \rightarrow 2-3=-1 \notin \mathbb{N} \rightarrow (2,3) \notin R_1$$

R_1 no es simétrica, luego, no es de equivalencia. La afirmación es falsa

- b) Sea $T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$ una relación transitiva en A . Entonces: $T^* = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1)\}$ también lo es en A . Luego, la afirmación es verdadera
- c) Sea $S = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$ una relación simétrica en A . Sea T la relación transitiva de b). Entonces: $S \cup T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$ es simétrica y transitiva. La afirmación es verdadera.

EJERCICIOS: Grupo 11

1. R es una relación binaria definida por $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -1 \leq 2x+1 < y < 5\}$, m es la suma de todos los elementos del dominio de R y n es la suma de todos los elementos del rango. Hallar $m+n$.
2. Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 - 2x = y, \text{ si } 0 < x \leq 5\}$, $0 \in \mathbb{N}$. Si m es la suma de los elementos del $\text{Dom}(R)$, n es la suma de los elementos del $\text{Dom}(R^*)$, hallar $26m/n$.
3. Sea el conjunto $S = \{2, 3, 4\}$. Si $R_1 = \{(x,y) \in S^2 \mid y \neq x\}$, $R_2 = \{(x,y) \in S^2 \mid y = x\}$, $R_3 = \{(x,y) \in S^2 \mid y - x = 1\}$. Hallar el valor de $[n(R_2) + n(R_3)] : n(R_1)$
4. Sea $n(A)$ el número de elementos de un conjunto A . Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, definimos las relaciones $R_1 = \{(x,y) \in A^2 \mid 3y = x\}$, $R_2 = \{(x,y) \in A^2 \mid y \notin 2x\}$, $R_3 = \{(x,y) \in A^2 \mid y = x\}$. hallar $n(R_1 \cup R_2 \cup R_3)$.
5. En $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se considera la relación $R = \{(x,y) \in A^2 \mid x = y \vee x + y = 3\}$. Se afirma que R es: a) Reflexiva, b) Simétrica, c) Transitiva, d) De equivalencia. Cuáles son verdaderas?
6. Si R es una relación en $A = \{2, 3, 9\}$ definida por $R = \{(x,y) \mid y + 1 \leq x^2\}$, hallar $n(R)$.
7. Si R y S son dos relaciones definidas en $A \times B$, demostrar las propiedades RI.1: $(R \cup S)^* = R^* \cup S^*$ y RI.3: $(R - S)^* = R^* - S^*$
8. Sean $A = \{2, 3, 8, 9\}$ y $B = \{4, 6, 7\}$; $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x^2 - y = 2\}$, $R_2 = \{(x,y) \in B \times A \mid x < y\}$ Hallar $\text{Ran}(R_1) \cup \text{Dom}(R_2)$.

9. Sean R_1 y R_2 relaciones definidas en el conjunto A y $D = \{(x, x) | x \in A\}$. Demostrar que: i) $D \subset R_1 \wedge D \subset R_2 \rightarrow D \subset (R_1 \cup R_2) \wedge D \subset (R_1 \cap R_2)$
 ii) $(x, y) \in (R_1 \cup R_2) \rightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2)$
10. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. R, S y T son relaciones en A , reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente. Si $R = \{(1, 1), (2, 3), (a, 2), (3, b)\}$, $S = \{(1, 3), (c, d), T = \{(3, e), (2, 3)\}$. Hallar $(b-a) + (c-d) + e$.
11. Sea R una relación definida en el conjunto $A \times A$, se dice que R es una relación transitiva si $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$. Demostrar que si R y S son relaciones transitivas, entonces $R \cap S$ es una relación transitiva.
12. Sean las relaciones $R_1 = \{(x, y) | x \leq y\}$, $R_2 = \{(x, y) | x + 1 = y\}$, $R_3 = \{(x, y) | x \neq y\}$, definidas en el conjunto $A = \{2, 4, 5, 6\}$. De los enunciados siguientes cuáles son verdaderas? a) $(R_1 \cap R_2) \subset R_3$, b) R_3 no es simétrica
 c) $R_1 \cup R_3$ es una relación de equivalencia.
13. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y consideremos las relaciones en A siguientes:
 $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (a, c), (d, d)\}$
 $S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$
 $T = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$
 $U = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$
 Hay m relaciones reflexivas, p relaciones simétricas y q relaciones transitivas. Hallar los valores de m, p y q .
14. Sea $T = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | (xy)^2 \text{ es par}\}$, una relación en $\mathbb{Z}$. Hallar el valor de cada afirmación:
 a) T es reflexiva b) T es simétrica c) T es transitiva
15. Sean $A = \{p, q, r\}$, $W = \{R \subset A \times A | R \text{ es simétrica en } A\}$ y $V = \{R \subset A \times A | R \text{ es reflexiva en } A\}$. De las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas?
 a) $\{(p, q), (q, p)\} \subset W$ b) $\{(p, p)\} \in (W \cap V)$ c) $\{(p, r), (r, p)\} \in W$
16. Para las relaciones definidas en el conjunto $A \neq \emptyset$, se afirman:
 a) Si R es reflexiva, entonces $\text{Dom}(R) = \text{Ran}(R)$
 b) Si R es simétrica y transitiva, entonces R es reflexiva.
 c) $R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, c), (c, a), (d, d)\}$ para $A = \{a, b, c, d\}$ es de equivalencia.
17. Cuáles de las siguientes proposiciones para relaciones definidas en un conjunto A que tiene k elementos son verdaderas?
 a) R es reflexiva en $A \rightarrow \text{Dom}(R) = \text{Ran}(R)$
 b) R es reflexiva en $A \rightarrow n(R) \geq k$ c) R es simétrica en $A \rightarrow R = R^*$

18. Si R es una relación definida en A . Entonces de las afirmaciones que siguen, cuáles son verdaderas? a) R es reflexiva + R es transitiva
b) R es reflexiva + R es transitiva
c) R reflexiva y simétrica + R transitiva.
19. Sea $A=\{1,2,3,4,5\}$ y R una relación definida en $A \times A$ tal que cumple:
i) $\forall x \in A, (x,x) \in R$ ii) Si $(x,y) \in R + (y,x) \in R$
Si $R=\{(1,1), (3,2), (2,2), (5,5), (4,2), (4,4), (3,4), (3,x), (y,x), (z,x), (z,y)\}$
Determinar si satisface que, si $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R + (x,z) \in R$
20. Una relación R definida en el conjunto A es transitiva si:
 $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R + (x,z) \in R$. Verificar que la relación:
 $R=\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | x-y \text{ es divisible por } k, k \text{ entero positivo}\}$, es transitiva.
21. En $\mathbb{N}$ definimos la relación R en la forma siguiente:
 $(x,y) \in R \leftrightarrow x-y=5k, k \in \mathbb{Z}$. Afirmamos: a) R es reflexiva, b) R es simétrica, c) R es transitiva y d) R es de equivalencia. Cuáles son verdaderas?
22. Sea $A=\{x | x=2n, n \in \mathbb{N} \text{ y } 5 < x < 25\}$. Para $R \subset A \times A$, sea $n(R)$ el número de elementos de R . Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
a) $n(R) < 10 + R$ es reflexiva b) $n(R) \geq 10 + R$ es reflexiva
c) R transitiva + $n(R) \geq 3$
23. En el conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ se define la relación R por:
 $(x,y) \in R \leftrightarrow "x \text{ es divisor de } y"$. Hallar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes: a) R es reflexiva b) R es transitiva
c) $\exists a \in A | (a,x) \in R, \forall x \in A$ d) $\forall x,y \in A, (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$
24. Si $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, sea $R \subset A \times B$ donde $(x,y) \in R \leftrightarrow x < y$. De las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas?
a) $\text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(R^*) = \emptyset$ b) $R \cup R^*$ tiene 12 elementos
c) La relación T definida en B por: $(x,y) \in T \leftrightarrow \exists s \in A | (x,s) \in R^* \wedge (s,y) \in R$
25. Si $A=\{2,3,5,8,10,12\}$ y $R_1=\{(x,y) \in A \times A | x \text{ es un número par y } x \text{ es un múltiplo de } y\}$. $R_2=\{(x,y) \in A \times A | x=2y+2\}$, entonces hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones: a) R_1 tiene 9 elementos b) $R_1 \cap R_2 = \emptyset$
c) R_2 tiene 5 elementos d) R_1 no es simétrica y R_2 es transitiva
26. Sean V, S y T tres relaciones definidas en $\mathbb{Z}$ tales que:
Si $(a,b) \in V$ y $(c,d) \in S + (a-c, b-d) \in T$. Si V y S son de equivalencia, analizar si T es también de equivalencia.



3.9 FUNCIONES

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y sea f una relación binaria de A en B , esto es, $f \subset A \times B$. Entenderemos por función de A en B toda regla que asocia a cada elemento x del conjunto A un único elemento " y " del conjunto B . Es decir, una función es un conjunto de pares ordenados tales que la primera componente pertenece a A y la segunda a B , de modo tal que dos pares ordenados distintos no tengan la misma primera componente.

Para denotar que f es una función de A en B , se escribe:

$$f: A \rightarrow B$$

y se lee: " f es una función de A en B "

Formalmente tenemos la siguiente:

Definición 3.1. f es una función de A en B si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

- i) $f \subset A \times B$
- ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z$

Regla de Correspondencia. Si $(x, y) \in f$, decimos que " y " es la imagen o valor de x por f , y suele escribirse $y = f(x)$, es decir " y " es el transformado de x por la función f . De aquí que denotamos:

$$f: A \rightarrow B | y = f(x)$$

3.9.1 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION

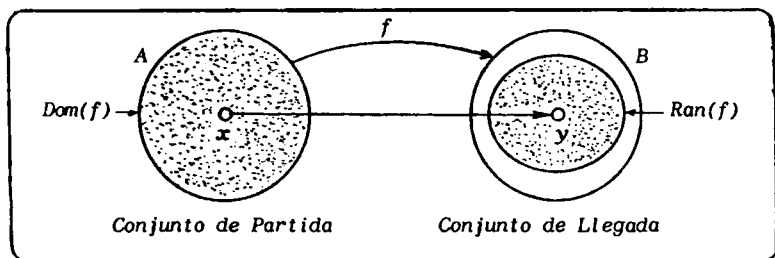
Definición 3.2 El dominio de una función $f: A \rightarrow B$ es el conjunto de todas las primeras componentes $x \in A$ (conjunto de partida) de los pares ordenados de f , esto es:

$$\text{Dom}(f) = \{x \in A | \exists y \in B, (x, y) \in f\} = A$$

Definición 3.3 El rango de una función $f: A \rightarrow B$ es el conjunto de todas las segundas componentes $y \in B$ (conjunto de llegada) de los pares ordenados de f , es decir:

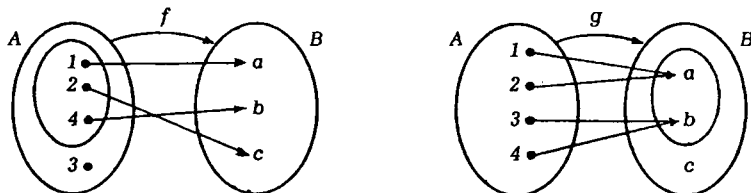
$$\text{Ran}(f) = \{y \in B | \exists x \in A, y = f(x)\} \subseteq B$$

Ilustración Gráfica:



Ejemplo. Sean los conjuntos: $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$. Determinar si $f=\{(1,a),(2,c),(4,b)\}$ y $g=\{(1,a),(2,a),(3,b),(4,b)\}$ son funciones de A en B.

Solución. En un diagrama de Venn Euler ilustramos los conjuntos dados:



$\text{Dom}(f)=\{1,2,4\} \neq A$, $\text{Ran}(f)=\{a,b,c\} = B \rightarrow f$ no es una función de A en B

$\text{Dom}(g)=\{1,2,3,4\} = A$, $\text{Ran}(g) \neq B$. Como a cada elemento del $\text{Dom}(g)=A$, le corresponde un solo elemento del rango, g es una función de A en B.

Observaciones:

(1) Si en la función $g:A \rightarrow B$ aplicamos la ecuación $y=g(x)$, se tiene:

$g(1)=a \rightarrow a$ es la imagen de 1

$g(3)=b \rightarrow b$ es la imagen de 3

$g(2)=a \rightarrow a$ es la imagen de 2

$g(4)=b \rightarrow b$ es la imagen de 4

Por esta razón, al rango de una función se le llama también conjunto de imágenes o codominio.

(2) Sean los conjuntos $A=\{1,2,4\}$ y $B=\{2,4,8\}$ y la función $f:A \rightarrow B \mid f=\{(1,2), (2,4), (4,8)\}$. Si en f denotamos por x cualquier elemento de su dominio A, entonces la regla de correspondencia que nos permite hallar su correspondiente imagen es $f(x)=2x$, de modo que, simbólicamente, podemos escribir:

$$f = \{(x, 2x) \mid x \in A\}$$

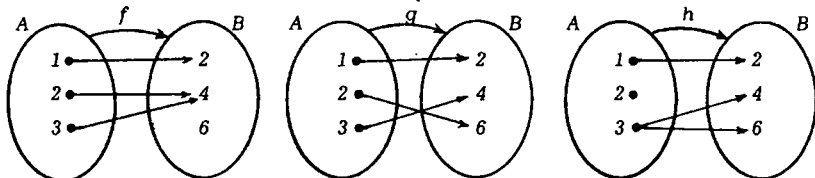
3.9.2 APLICACIONES DE A EN B

Una función f es una aplicación de A en B si y sólo si f es un subconjunto de $A \times B$ que satisface las siguientes condiciones de existencia y u-

nicidad:

- i) $\forall x \in A, \exists ! y \in B \mid (x, y) \in f$
 ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z$

Ejemplo. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. De las siguiente gráficas, establecer cuáles son aplicaciones de A en B .



Solución. Las relaciones f y g son aplicaciones de A en B , pues ambas cumplen las dos condiciones de la definición 3.9.2:

- i) $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = A$
 ii) De cada elemento de A parte exactamente una flecha a B

La relación h no es una aplicación de A en B , puesto que:

- i) $\text{Dom}(h) = \{1, 3\} \neq A$ No se cumple
 ii) $(3, 4) \in h \wedge (3, 6) \in h \rightarrow 4 \neq 6$ No se cumple

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Dada la función f definida por $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid f(x) = 2x - 1$, hallar:

- a) $f(8)$, b) $x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 3$, c) $f[8 - f(2)]$, d) $x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq 5$
 e) $A \subset \mathbb{N} \mid f(x) \in B, \forall x \in A$, siendo $B = \{2, 4, 5, 7\}$.

Solución. Dado que f es una relación en $\mathbb{N}$, tal que

$$(x, y) \in f \leftrightarrow y = 2x - 1 \leftrightarrow f = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}, \text{ se tiene:}$$

- a) Para $x = 8 \rightarrow y = 2(8) - 1 = 15 \leftrightarrow f(8) = 15 \in \mathbb{N}$
 b) Si $f(x) = 3 \rightarrow 2x - 1 = 3 \leftrightarrow x = 2 \in \mathbb{N}$
 c) $f(2) = 2(2) - 1 = 3$; $8 - f(2) = 5 \rightarrow f[8 - f(2)] = f(5) = 2(5) - 1 = 9 \in \mathbb{N}$
 d) Si $f(x) \leq 5 \rightarrow 2x - 1 \leq 5 \leftrightarrow x \leq 3$, luego, x toma los valores: 1, 2, 3 que determinan el conjunto solución: $S = \{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq 5\}$
 e) Se trata de hallar los elementos de A tal que $f(x) \in B$, luego:
 Si $f(x) = 2 \rightarrow 2x - 1 = 2 \leftrightarrow x = 3/2 \notin \mathbb{N}$; $f(x) = 4 \rightarrow 2x - 1 = 4 \leftrightarrow x = 5/2 \notin \mathbb{N}$
 $f(x) = 5 \rightarrow 2x - 1 = 5 \leftrightarrow x = 3 \in \mathbb{N}$; $f(x) = 7 \rightarrow 2x - 1 = 7 \leftrightarrow x = 4 \in \mathbb{N}$ $\therefore A = \{3, 4\}$

EJERCICIO 2. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 50\}$ y $f: A \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = (x - 1)^2, x \in A$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- a) Existe un único valor x_0 tal que $f(x_0)=36$, b) $f[2+f(0)]=4$
 c) La solución de $f(x+8)=f(-x-8)$ está en el conjunto A.

Solución. a) Si $f(x)=(x-1)^2 + f(x_0)=(x_0-1)^2=36$, de donde: $x_0=7$ ó $x_0=-5$
 x_0 no es único, luego, la afirmación es falsa.

b) $f(0)=(0-1)^2=1 + f[2+f(0)]=f(3)=(3-1)^2=4$. La afirmación es verdadera.

c) Si $f(x+8)=f(-x-8) + (x+8-1)^2=(-x-8-1)^2$, de donde $x=-8 \notin A$.

La afirmación es falsa.

EJERCICIO 3. Sea $A=\{x|x \text{ es una proposición}\}$ y $B=\{0,1\}$. Se define la función $f:A \rightarrow B$ por: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es V} \\ 0, & \text{si } x \text{ es F} \end{cases}$

Según esto, de las siguientes afirmaciones, cuáles son verdaderas?

- a) $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$ b) $f(\neg p) = 1-f(p)$
 c) $f(p \rightarrow q) = 1-f(p)+f(q)-f(\neg p) \cdot f(q)$

Solución. a) Supongamos que $V(p)=V$ y $V(q)=V$, entonces según f : $f(p)=1$ y $f(q)=1 + f(p) \cdot f(q)=1$. Luego: $f(p \wedge q)=f(V)=1$

Entonces: $f(p \wedge q)=f(p) \cdot f(q)$

Si $V(p)=V$ y $V(q)=F + f(p)=1$ y $f(q)=0 + f(p) \cdot f(q)=0$

$f(p \wedge q)=f(V \wedge F)=f(F)=0 \quad \therefore f(p \wedge q)=f(p) \cdot f(q)$

Para las otras dos alternativas también se cumple: $f(p \wedge q)=f(p) \cdot f(q)$

Luego, la afirmación es verdadera.

b) Si $V(p)=V + f(\neg p)=f(F)=0$ y $1-f(p)=1-1=0 + f(\neg p)=1-f(p)$. Es verdadera.

c) Si $V(p)=V$ y $V(q)=V + f(p \rightarrow q)=f(V)=1$

$1-f(p)+f(q)-f(\neg p) \cdot f(q) = 1-1+1-(0)(1) = 1$

Para $V(p)=V$ y $V(q)=F + f(p \rightarrow q) = f(F) = 0$

$1-f(p)+f(q)-f(\neg p) \cdot f(q) = 1-1+0-(0)(0) = 0$

Para las otras dos alternativas se obtienen los mismos resultados.

Luego, $f(p \rightarrow q) = 1-f(p)+f(q)-f(\neg p) \cdot f(q)$. La afirmación es verdadera.

Por lo tanto, todas las afirmaciones son verdaderas.

EJERCICIO 4. Sea f una función de N en N tal que $f(x)=2x+3$. Hallar el valor de verdad de cada afirmación.

- a) $\forall y \in N, \exists x \in N | f(x)=y$ b) Si $f(a)=f(b)$, entonces $a=b$
 c) Si $f(ax)=af(x)$ y $f(b+x)=(b+2)+f(x)$, $\forall x \in N + a+b=3$

Solución. a) Si $y=1 \in N + 1=2x+3 \leftrightarrow x=-1 \notin N$

Luego, $\nexists x \in N, \forall y \in N | y=2x+3$. La afirmación es falsa.

b) Si $f(a)=f(b) + 2a+3=2b+3 \leftrightarrow a=b$. La afirmación es verdadera.

c) Si $f(ax)=af(x) + 2(ax)+3 = a(2x+3)$, de donde: $a=1$

$$f(b+x) = (b+2)+f(x) + 2(b+x)+3 = (b+2)+2x+3, \text{ de donde: } b=2$$

Entonces: $a+b = 3$. La afirmación es verdadera.

EJERCICIO 5. Sabiendo que f es una función tal que: $f(x+3)=f(x)+f(3)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, entonces determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones: a) $f(0)=0$, b) $f(12)=4f(3)$, c) $f(-3)=-f(3)$

Solución. Si $f(x+3)=f(x)+f(3) \rightarrow f(x)=f(x+3)-f(3)$

a) Si $x=0 \in \mathbb{Z} \rightarrow f(0)=f(0+3)-f(3)=0$. La afirmación es verdadera.

b) $f(12)=f(6+6)=f(6)+f(6)=2f(3+3)$ (Según la definición)
 $= 2[f(3)+f(3)] = 4f(3)$. La proposición es verdadera.

c) Si $x=-3 \rightarrow f(-3)=f(-3+3)-f(3)=f(0)-f(3)$ (Por a): $f(0)=0$

Entonces: $f(-3)=-f(3)$. La proposición es verdadera.

EJERCICIO 6. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} | f(x+3)=x^2+1$, determinar el valor de:

$$E = \frac{f(a+2)-f(2)}{a-2}, \quad a \neq 2$$

Solución. La regla de correspondencia de $f(x)$ se consigue considerando

$$f(x+3)=x^2+1, \text{ así: } f(\dots+3)=(\dots)^2+1$$

En el espacio punteado se coloca $x-3$ con el objeto de eliminar el sumando 3 esto es: $f((x-3)+3)=(x-3)^2+1 \rightarrow f(x)=x^2-6x+8$

$$\text{Entonces: } f(a+2)=(a+2)^2-6(a+2)+8=a^2-2a \quad \text{y} \quad f(2)=(2)^2-6(2)+8=0$$

$$\text{Luego: } E = \frac{a^2-2a-0}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a$$

EJERCICIO 7. Sea $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} | f(\sqrt{x-1})=x^2+2x-3$, hallar: $f(\sqrt{2x+1})$

Solución. Solucionaremos el problema por dos métodos:

a) Haciendo el cambio: $\sqrt{x-1}=u \rightarrow x=1+u^2$

$$\text{En } f: f(u)=(1+u^2)^2+2(1+u^2)-3=u^4+4u^2$$

Considerando ahora: $u=\sqrt{2x+1}$, se tiene:

$$f(\sqrt{2x+1}) = (\sqrt{2x+1})^4 + 4(\sqrt{2x+1})^2 = 4x^2 + 12x + 5$$

b) Es el método directo efectuado en el ejercicio anterior, esto es:

$f(\sqrt{\dots-1})=(\dots)^2+2(\dots)-3$. Si queremos conseguir $2x+1$ en el radical, colocamos $2x+2$ en el espacio punteado, es decir:

$$f(\sqrt{2x+2-1}) = (2x+2)^2+2(2x+2)-3 \rightarrow f(\sqrt{2x+1}) = 4x^2+12x+5$$

EJERCICIO 8. Definimos una función $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, por: $f(x+3, y-1)=x+y+xy-y^2$.

Hallar $f(x-1, y+1)$.

Solución. Por el método directo escribimos:

$$f(\dots+3, \dots-1) = (\dots) + (\dots) + (\dots)(\dots) - (\dots)^2$$

En los espacios puntuados para las x colocamos $x-4$, y para las y : $y+2$

$$\text{Luego: } f[(x-4)+3, (y+2)-1] = (x-4) + (y+2) + (x-4)(y+2) - (y+2)^2$$

$$\text{de donde: } f(x-1, y+1) = xy + 3x - 7y - y^2 - 14$$

EJERCICIO 9. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, una función tal que $f(ax+2) = a^2x^2 + 5ax + 6$, hallar

$$\text{el valor de } E = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}, \quad h \neq 0$$

Solución. En este caso escribimos: $f[a(\dots)+2] = a^2(\dots)^2 + 5a(\dots) + 6$

En los paréntesis colocamos x/a para eliminar el factor a , esto

$$\text{es: } f[a(x/a)+2] = a^2(x/a)^2 + 5a(x/a) + 6 \quad + \quad f(x+2) = x^2 + 5x + 6$$

$$+ \quad f(x) = (x-2)^2 + 5(x-2) + 6 = x^2 + x$$

$$\text{Entonces: } E = \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x-h)^2 - (x-h)}{h} = \frac{4hx + 2h}{h} = 4x + 2$$

EJERCICIOS: Grupo 12

- $R_1 = \{(1,3), (2,3), (4,5), (7,5), (8,11)\}$, $\text{Dom}(R_1) = A = \{1,2,3,4,5\}$
 - $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (2,5), (4,5)\}$, $\text{Dom}(R_2) = A = \{1,2,3,4\}$
 - $R_3 = \{(x,y) \mid 7y - 21x = 0\}$, $\text{Dom}(R_3) = A = \mathbb{N}$.
 - $R_4 = \{(x,y) \mid xy + 2 = 35\}$, $\text{Dom}(R_4) = A = \mathbb{N}$.

Cuáles de estas afirmaciones definen funciones de $A \rightarrow \mathbb{N}$?

- Si f es una función de A en B , $f: A \rightarrow B$. Cuáles de las siguientes proposiciones son siempre verdaderas?

- | | |
|--|---|
| a) $\forall a \in A, f(a) = b \wedge f(a) = c \rightarrow b = c$ | c) $\text{Ran}(f) = B$ |
| b) $\forall a \in A, \forall b \in A, f(a) = f(b) \rightarrow a = b$ | d) $\text{Ran}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}$ |
| | e) $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f) = \emptyset$ |

- Sea la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 3x + 2$. Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $f(5a+7b) = 5f(a) + 7f(b)$ | b) $\forall b \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N} \mid f(a) = b$ |
| c) $f[f(2)] = \frac{f(17)-1}{2}$ | d) $\frac{f(a+b)-f(a)}{b} = 3, \quad b \neq 0$ |

- Cuáles de los siguientes conjuntos describen una función $A \times A$, si

- | | | |
|-----------------------|---------------------------------------|---|
| $A = \{1,2,3,4,5\}$. | a) $R_1 = \{(x,y) \in A^2 \mid x=4\}$ | c) $R_3 = \{(x,y) \in A^2 \mid x+y=6\}$ |
| | b) $R_2 = \{(x,y) \in A^2 \mid y=4\}$ | d) $R_4 = \{(x,y) \in A^2 \mid x < y\}$ |

- Sea $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid f(x) = mx + b$, con m y b constantes, y se sabe que $f(1) = -2$ y $f(3) = 1$. Hallar m, b

- Sea la función $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(x) = mx + b$, m y b constantes, tal que $2f(2) + f(4) = 21$ y $f(-3) - 3f(1) = -16$. Hallar el valor de $(1/3)f(1)$.

7. Sea $X = \text{proposiciones}$, $Y = \{0, 1\}$. Definimos una función $f: X \rightarrow Y$ en la forma siguiente: $\forall p \in X$, $f(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es V} \\ 0, & \text{si } p \text{ es F} \end{cases}$. Se sabe que:
- a) $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$ b) $f(p \vee q) = f(p) + f(q) - f(p \wedge q)$ c) $f(\neg p) = 1 - f(p)$
- Entonces, hallar: $f(p \rightarrow q)$.
8. Sea la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que hace corresponder 0 a todo número par y 1 a todo número impar, es decir; $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es par} \\ 1, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$
- De las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas?
- a) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $f(x) + f(y) = f(x+y)$ c) $\exists x \in \mathbb{N} \mid f(x) = f(x+2)$
 b) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$ d) $\exists x \in \mathbb{N} \mid f(x+1) = f(x)$
9. Sea f una función definida en $\mathbb{N}$ por la ecuación $f(x+2) = x^2 - 4$, hallar el valor de $f(x+h) + 4x + 4h$.
10. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 4 - (x-1)^2$. De las afirmaciones siguientes cuáles son verdaderas?
- a) $f(x-1) = 4 - x^2$ b) $f(1-x) = f(x-1)$ c) $\exists x \in \mathbb{Z} \mid f(x+1) > 4$
11. Sea f una función de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f(x) = 2x+3$. De las afirmaciones que siguen de cir cuáles son verdaderas?
- a) $\forall y \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \mid f(x) = y$ b) Si $f(a) = f(b) \rightarrow a = b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$
 c) Si $f(ax) = af(x)$ y $f(b+x) = (b+3) + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$, entonces $(a+b)/3 = 4/3$
12. $A = \{2, 3, 4, 5, 8\}$, $B = \mathbb{N}$. Si f es una función de A en B , definida así:
- $$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{si } x \text{ es par} \\ f[f(\frac{3x+1}{2})], & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$
- Hallar $E = f(5) + f(3) + f(8)$.
13. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ una función definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es par} \\ 1, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$
- De las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas?
- a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \mid f(x+y) = f(x) + f(y)$ c) $\exists x \in \mathbb{N} \mid f(x) = f(x+2)$
 b) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} \mid f(x) \cdot f(y) = f(xy)$ d) $\exists x \in \mathbb{N} \mid f(x+1) = f(x)$
14. Para $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, sean f y g dos funciones de A en $\mathbb{N}$, tales que $g(x) = mx + b$, $f = \{(0, 4), (3, 1), (1, 3), (m, 4), (4, 0)\}$ y $g(1) = f(1)$. Hallar la suma del rango de g .
15. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Se define en A las funciones $g(x) = mx^2 + bx + c$, $f = \{(1, 1), (2, 3), (4, 2), (3, 3), (4, m)\}$. Si $f(1) = g(1)$ y $g(2) = 4$, hallar $\text{Ran}(g)$.



3.9.3 FUNCION INYECTIVA O UNIVALENTE

Sea $f: A \rightarrow B$ una función de A en B . Se dice que f es una función inyectiva si cada elemento de B es imagen de, a lo más, un elemento de A .

Dicho de otro modo:

Una función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in A$:

i) $f(x_1) = f(x_2)$ en $B \rightarrow x_1 = x_2$ en A

o

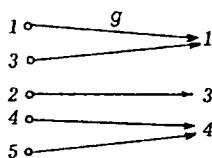
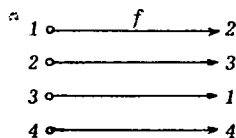
ii) $x_1 \neq x_2$ en $A \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ en B

Ejemplo 1. Determinar si las siguientes relaciones definen funciones inyectivas:

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$$

$$g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 4), (5, 4)\}$$

Solución. f es una función inyectiva, pues si tomamos dos elementos diferentes en el dominio, las imágenes correspondientes son también diferentes. En el gráfico se observa claramente esta situación (uno a uno)



Por otro lado, en el gráfico de g se observa que: $1 \neq 3$ y $g(1) = g(3) = 1$

$$4 \neq 5 \text{ y } g(4) = g(5) = 4$$

Esto es, hay dos elementos del dominio que tienen la misma imagen (dos a uno). Por lo tanto, g no es inyectiva.

Ejemplo 2. Sean las funciones $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} | f(x) = 2x + 3$ y $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} | g(x) = x^2 - 1$. Determinar si son o no inyectivas.

Solución. Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, tal que $f(x_1) = 2x_1 + 3$ y $f(x_2) = 2x_2 + 3$. Debemos de mostrar que: $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$.

$$\text{En efecto, supongamos que } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$$

$$\rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto, f es una función inyectiva.

Análogamente para g , sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(g)$, entonces, si:

$$g(x_1) = g(x_2) \rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$$

$$\rightarrow x_1^2 = x_2^2 \leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ó } x_1 = -x_2$$

No se concluye que $x_1 = x_2$, por lo tanto, g no es inyectiva.

Nota. Para un conjunto A , la función $I_A: A \rightarrow A | I(x)=x, \forall x \in A$, se llama **función identidad** de A , y se tiene que es **inyectiva**.

En efecto, sean $x_1, x_2 \in A$, entonces, si $I(x_1)=I(x_2) \rightarrow x_1=x_2$

Por lo tanto, $I(x)$ es **inyectiva**.

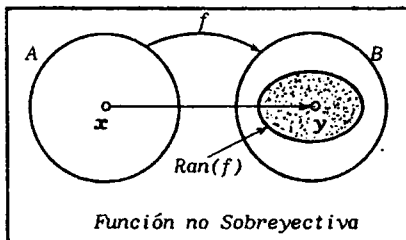
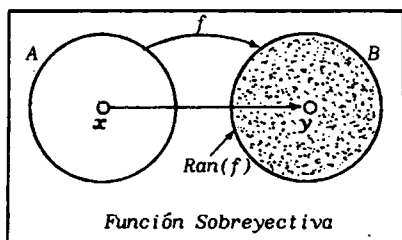
3.9.4 FUNCION SOBREYECTIVA O SURYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$. Se dice que f es una **función sobreyectiva** o **suryectiva** de A sobre B , si todo elemento de B es imagen de, por lo menos, un elemento de A ; es decir, cuando el rango de f es todo B (conjunto de llegada). Simbólicamente:

$$f \text{ es sobreyectiva} \leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A | f(x)=y$$

$$f \text{ es sobreyectiva} \leftrightarrow \text{Ran}(f)=B$$

Interpretación gráfica:



Ejemplo 1. Sean $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5,7\}$ y las funciones $f=\{(1,1),(2,1),(3,3),(4,5)\}$ y $g=\{(1,3),(2,1),(3,5),(4,7)\}$. Determinar si son o no sobreyectivas.

Solución. $\text{Ran}(f)=\{1,3,5\} \neq B$, luego, f no es sobreyectiva de A en B o no está definida sobre B .

$\text{Ran}(g)=\{1,3,5,7\}=B$, luego, g es sobreyectiva o definida sobre B .

Ejemplo 2. Si la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B} | f(x)=x+2$ es sobreyectiva, determinar B .

Solución. Si f es sobreyectiva $\rightarrow \text{Ran}(f)=B$ y como $x \in \mathbb{N}$, B está formado por todas las imágenes de $x+2$ cuando $x=1,2,3,\dots$, o sea:

$$B=\{3,4,5,\dots\}=\mathbb{N}-\{1,2\}$$

3.9.5 FUNCION BIYECTIVA

Una función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva o biyección, si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 1. Sean los conjuntos: $A=\{1,2,6,7,8\}$ y $B=\{2,3,4,5,6\}$, y las funciones de A en B : $f=\{(1,2), (2,3), (6,4), (7,5), (8,6)\}$, $g=\{(1,3), (2,2), (6,6), (7,4), (8,5)\}$ y $h=\{(1,4), (2,2), (6,3), (7,5), (8,3)\}$. Establecer si son o no funciones biyectivas.

Solución. Las funciones f y g son inyectivas pues cada elemento de B es imagen de un elemento de A . Además son sobreyectivas, puesto que: $\text{Ran}(f)=\text{Ran}(g)=B$. Por tanto son biyectivas.

En cambio h no es biyectiva, pues, $6 \neq 8 + h(6)=h(8)$, no cumple la inyectividad.

Ejemplo 2. Sea la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} | f(x)=2x$; determinar si es biyectiva.

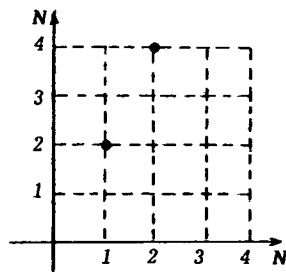
Solución. Como se puede observar, f es una función que asigna a cada número natural su duplo, es decir, tiene como rango los números naturales pares. Vamos a probar simultáneamente si f es inyectiva y sobreyectiva.

a) Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) + f(x_1)=f(x_2)$
 $+ 2x_1=2x_2 \leftrightarrow x_1=x_2$

Por tanto, f es inyectiva.

b) f no es sobreyectiva, pues $\text{Ran}(f) \neq \mathbb{N}$
 (los elementos del codominio que son impares carecen de antecedente en $\mathbb{N}$).

Por lo tanto, f no es biyectiva.



Ejemplo 3. Sea $B=\{y | y=2n, n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de los números naturales pares y sea $f: \mathbb{N} \rightarrow B | f(x)=2x$. Es f biyectiva?

Solución. Aquí el rango se ha restringido a los naturales pares. Como la inyectividad de f se mantiene, probaremos la sobreyectividad.

Debemos determinar que $\forall y \in B, \exists x \in \mathbb{N} | f(x)=y$. Es decir, según la definición de f : $2x=y$. Despejando x : $x=(y/2) \in \mathbb{N}$ (la mitad de un número natural par es un número natural). Aplicando f a cada extremo se tiene:

$$f(x) = f(y/2) = 2(y/2) = y$$

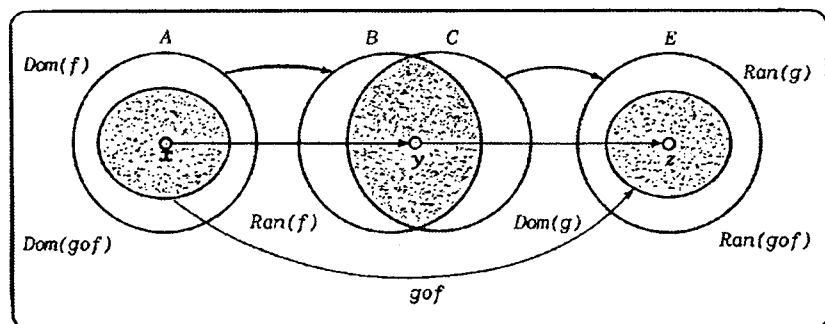
Siendo f inyectiva y sobreyectiva, resulta que f es biyectiva.

3.9.6 COMPOSICION DE FUNCIONES

Dadas dos funciones $f:A \rightarrow B$ y $g:C \rightarrow E$, si para $x \in A$ ocurre que $y=f(x)$, entonces cada x determina una y , la que a su vez determina una $z \in E$, esto es, si $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$, se habrá asociado entonces una $z \in E$ a una $x \in A$ por medio de la ecuación $z=g(y)=g[f(x)]$. Si designamos $z=h(x)$, la ecuación $h(x)=g[f(x)]$ se llama **composición** de f por g , la que se denota por " gof " y cuya regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned} (\text{gof})(x) &= g[f(x)] \\ \rightarrow \text{gof} &= \{(x, g[f(x)]) \mid x \in \text{Dom}(\text{gof})\} \end{aligned}$$

La ilustración gráfica siguiente nos proporciona un diagrama esquemático de la composición gof :



Observaciones:

- (1) $\text{Dom}(\text{gof}) \subset \text{Dom}(f) = A$
- (2) $\text{Ran}(\text{gof}) \subset \text{Ran}(g) \subseteq E$
- (3) $\text{Ran}(f) \cap \text{Dom}(g) \neq \emptyset$
- (4) $\text{Dom}(\text{gof}) = \{x \in A \mid x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$
- (5) En la notación gof , debe aplicarse primero la función f y después la función g .

Ejemplo 1. Dadas las funciones $f=\{(-2,0), (-1,-4), (3,1), (5,2)\}$ y $g=\{(-2,-1), (0,3), (1,4), (2,0), (4,5)\}$, hallar: fog y gof e ilustrarlas como aplicaciones.

Solución. Para fog , debemos conocer previamente el rango de g y el dominio de f , esto es, $\text{Ran}(g)=\{-1,0,3,4,5\}$ y $\text{Dom}(f)=\{-3,-1,3,5\}$. Luego:

$\text{Ran}(g) \cap \text{Dom}(f) = \{-1, 3, 5\} \neq \emptyset$. Nos interesa los pares de g y f que tengan como segundas y primeras componentes a $-1, 3$ y 5 , respectivamente, esto es:

$$(-2, -1) \in g \wedge (-1, -4) \in f \rightarrow (-2, -4) \in fog$$

$$(0, 3) \in g \wedge (3, 1) \in f \rightarrow (0, 1) \in fog$$

$$(4, 5) \in g \wedge (5, 2) \in f \rightarrow (4, 2) \in fog$$

En forma similar para gof : $\text{Ran}(f) = \{-4, 0, 1, 2\}$ y $\text{Dom}(g) = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$ entonces $\text{Ran}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{0, 1, 2\} \neq \emptyset$. Luego:

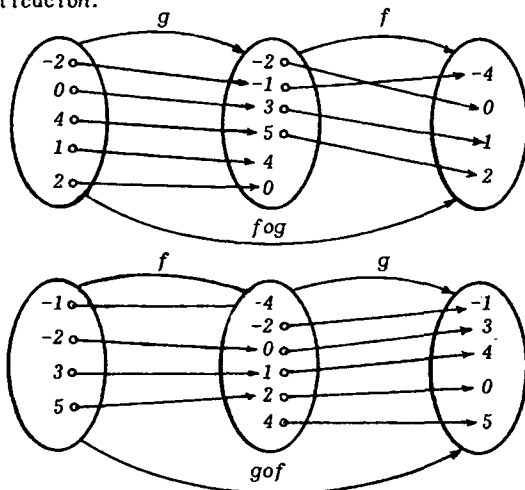
$$(-2, 0) \in f \wedge (0, 3) \in g \rightarrow (-2, 3) \in gof$$

$$(3, 1) \in f \wedge (1, 4) \in g \rightarrow (3, 4) \in gof$$

$$(5, 2) \in f \wedge (2, 0) \in g \rightarrow (5, 0) \in gof$$

$$\therefore fog = \{(-2, -4), (0, 1), (4, 2)\} \text{ y } gof = \{(-2, 3), (3, 4), (5, 0)\}$$

Las figuras siguientes ilustran a las funciones fog y gof como una correspondencia o aplicación.



Observaciones

- (1) La aplicación se debe hacer de derecha a izquierda, es decir, la función de partida es la que está a la derecha de la notación " $\circ$ ".
- (2) En fog , g es la función de partida y f la función de llegada.
En gof , f es la función de partida y g la función de llegada.
- (3) En este ejemplo $fog \neq gof$. En general, la composición de funciones no es conmutativa.

Ejemplo 2. Dadas las funciones $g=\{(3,6), (5,9), (8,4), (7,6), (10,5)\}$,
 $h=\{(3,9), (5,12), (7,9), (8,7)\}$; hallar la función f tal que $h=f \circ g$

Solución. Según la definición de composición de funciones: $h(x)=f[g(x)]$

Entonces, definamos h en cada par, esto es:

$$h(3) = f[g(3)] = 9 = f(6) \rightarrow (6,9) \in f$$

$$h(5) = f[g(5)] = 12 = f(9) \rightarrow (9,12) \in f$$

$$h(7) = f[g(7)] = 9 = f(6) \rightarrow (6,9) \in f$$

$$h(8) = f[g(8)] = 7 = f(4) \rightarrow (4,7) \in f$$

$$\therefore f = \{(4,7), (6,9), (9,12)\}$$

Ejemplo 3. Sean $f: N \rightarrow N | f(x)=x^2$ y $g: Z \rightarrow Z | g(x)=2x-3$. Hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución. Empezaremos calculando los dominios en cada caso, esto es:

$$i) x \in \text{Dom}(g \circ f) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)$$

$$\leftrightarrow x \in N \wedge x^2 \in Z$$

Como $N \subset Z \rightarrow x^2 \in N$, por tanto: $\text{Dom}(g \circ f) = N$

$$ii) \text{ Entonces: } (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = 2x^2 - 3$$

$$\text{Para } f \circ g: i) x \in \text{Dom}(f \circ g) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)$$

$$\leftrightarrow x \in Z \wedge (2x-3) \in N \leftrightarrow x \in Z \wedge (2x-3 > 0)$$

$$\leftrightarrow x \in Z \wedge x > 3/2 \leftrightarrow x = 2, 3, 4, \dots \rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = N - \{1\}$$

$$ii) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x-3) = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

3.9.7 FUNCION INVERSA

Sabemos que toda función $f: A \rightarrow B$ es una relación, pero la relación inversa no siempre es una función. Por ejemplo:

Si $A = \{-2, -1, 0, 2\}$ y $B = \{0, 1, 2, 4, 5\}$ y $f: A \rightarrow B | f(x) = x^2$, entonces:

$$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (2, 4)\}$$

La inversa de esta relación es el subconjunto de $B \times A$:

$$g = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (2, 4)\}$$

Se observa que g no es una función de B en A , pues $2 \in B$ y $5 \in B$ carecen de imágenes en A , además no se cumple la condición de unicidad, ya que 4 tiene un par de imágenes en A .

Veamos otro caso; sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ una función de A en B . La relación inversa es: $g = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$.

Se ve claramente que g es una función de B en A , llamada función inversa de f . Los resultados de las composiciones:

$$g \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = I_A$$

$$f \circ g = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} = I_B$$

son una consecuencia importante para establecer la siguiente:

Definición 3.4 Dada una función $f:A \rightarrow B$, si existe una función $g:B \rightarrow A$, tal que:

$$i) (f \circ g)(x) = x, \forall x \in B \quad (f \circ g = I_B)$$

$$ii) (g \circ f)(x) = x, \forall x \in A \quad (g \circ f = I_A)$$

se dice que f es una **función inversible** y que la función g es la **función inversa** de f . Se denota: $g=f^*$ o $g=f^{-1}$.

Ejemplo 1. Si $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,4,5\}$ y la función $f:A \rightarrow B$, $f=\{(2,1),$

$(5,2), (3,4), (7,5)\}$, hallar, si existe, una función $g:B \rightarrow A$, que cumpla i) y ii) de la definición.

Solución. Por ii) se requiere que: $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = x, \forall x \in A$

$$+ (g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(1) = 2$$

$$+ (g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(4) = 3$$

$$+ (g \circ f)(5) = g[f(5)] = g(2) = 5$$

$$+ (g \circ f)(7) = g[f(7)] = g(5) = 7$$

De aquí consideramos que: $g=\{(1,2), (4,3), (2,5), (5,7)\}$ es una función $B \rightarrow A$, que cumple ii).

Además cumple i): $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x, \forall x \in B$

En efecto:

$$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(2) = 1$$

$$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(5) = 2$$

$$(f \circ g)(4) = f[g(4)] = f(3) = 4$$

$$(f \circ g)(5) = f[g(5)] = f(7) = 5$$

Por tanto, g existe y $g = f^* = \{(1,2), (4,3), (2,5), (5,7)\}$

Teorema 3.2 Una función admite inversa si y sólo si es biyectiva.

Demostración. La demostración requiere de dos implicaciones

I) Si una función admite inversa, entonces es biyectiva.

Hipótesis: Sea $f:A \rightarrow B$, tal que $g:B \rightarrow A$, siendo: $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$

Tesis: f es biyectiva.

a) Demostraremos que f es inyectiva.

En efecto: (1) Sean $x_1, x_2 \in A \mid f(x_1) = f(x_2)$

$$(2) \text{ Aplicando } g \text{ a cada extremo: } g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$$

$$(3) \text{ Por definición de composición: } (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$(4) \text{ Por hipótesis: } g \circ f = I_A \rightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2)$$

$$(5) \quad \rightarrow x_1 = x_2$$

(6) Por lo tanto, de 1 y 5: f es inyectiva.

b) Demostraremos ahora que f es sobreyectiva. $\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$

(1) Sea $y \in B$

(2) Por definición de identidad: $y = I_B(y)$

(3) Pero por hipótesis: $I_B = f \circ g \rightarrow y = (f \circ g)(y)$

(4) Por definición de composición: $y = f[g(y)]$

(5) Es decir, por medio de $y \in B$, hemos determinado $x = g(y)$ en A , tal que:
 $f(x) = y$.

En consecuencia, siendo f inyectiva y sobreyectiva resulta biyectiva.

II) Si una función es biyectiva entonces admite inversa.

Hipótesis: $f: A \rightarrow B$ es una función biyectiva

Tesis: $\exists g: B \rightarrow A$, tal que: i) $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in A$, o sea: $g \circ f = I_A$

ii) $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \in B$, o sea: $f \circ g = I_B$

La demostración lo haremos en tres etapas:

a) Se trata de definir una función $g: B \rightarrow A$ que verifique las condiciones i) y ii) de la tesis.

Como f es sobreyectiva, o sea $\text{Ran}(f) = B$, entonces $\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$

También f es inyectiva, o sea, si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$. De aquí y recordando la definición inversa $\{(x, y) \in g \leftrightarrow (y, x) \in f\}$, definimos:

$$g: B \rightarrow A \mid g(x) = y \leftrightarrow f(y) = x \quad (1)$$

Veamos si (1) satisface la definición de función.

En efecto, $\forall x \in B, \exists y \in A \mid f(y) = x$, y por ser f sobreyectiva, todo $x \in B$ proviene de algún $y \in A \mid g(x) = y$ (Primera condición de función)

Además, si $f(y_1) = f(y_2)$ en $B \rightarrow y_1 = y_2$ en A , y por ser f inyectiva:

Si $f(y_1) = x_1 \wedge f(y_2) = x_2 \rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ (Segunda condición de función)

b) Hay que probar que: $g \circ f = I_A$

En efecto, $\forall x \in A$ se tiene por definición de composición, por 1) y por definición de identidad en A :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y) = x = I_A(x) \rightarrow g \circ f = I_A$$

c) Finalmente, demostraremos que $f \circ g = I_B$

Como $f \circ g: B \rightarrow B$, $\forall y \in B$, tenemos, por definición de composición, por 1) y por identidad en B :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(y) = y = I_B(y) \rightarrow f \circ g = I_B$$

Ejemplo 1. Determinar si la función $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \mid f(x) = 2x - 3$ es inversible, y si lo es, determinar su inversa.

Solución. Veamos primero si f es biyectiva:

a) Si $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(x_1) = 2x_1 - 3$ y $f(x_2) = 2x_2 - 3$

Si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \leftrightarrow x_1 = x_2 \therefore f$ es inyectiva.

b) Para $y \in \mathbb{Q} \rightarrow y = 2x - 3$, despejando x : $x = \frac{1}{2}(y+3)$

Aplicando f : $f(x) = f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$; o sea, $\text{Ran}(f) = \mathbb{Q}$

Por lo tanto, f es biyectiva e inversible.

Como $(f \circ f^*)(x) = x \rightarrow f[f^*(x)] = x \rightarrow 2f^*(x) - 3 = x \leftrightarrow f^*(x) = \frac{x+3}{2}$

Ejemplo 2. Sean $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} | f(x) = 3x+2$ y $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} | g(x) = 2x+k$, donde $k \in \mathbb{Q}$ y se cumple que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Hallar: a) $(f \circ g)^*(2)$ y

b) $(g^* \circ f^*)(-4)$

Solución. Siguiendo los pasos del ejemplo anterior verificar que f y g son biyectivas.

Dado que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \rightarrow f[g(x)] = g[f(x)] \rightarrow f(2x+k) = g(3x+2)$
 $\rightarrow 6x+3k+2 = 6x+4+k \leftrightarrow k=1 \rightarrow g(x) = 2x+1$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x+1) = 3(2x+1)+2 = 6x+5$

Si $y = 6x+5 \rightarrow x = \frac{y-5}{6} \rightarrow (f \circ g)^*(x) = \frac{x-5}{6}$

Para $x=2 \rightarrow (f \circ g)^*(2) = \frac{2-5}{6} = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = 3x+2 \rightarrow x = \frac{y-2}{3} \rightarrow f^*(x) = \frac{x-2}{3}$

$g(x) = 2x+1 \rightarrow x = \frac{y-1}{2} \rightarrow g^*(x) = \frac{x-1}{2}$

Entonces: $(g^* \circ f^*)(-4) = g^*[f^*(-4)] = g^*(-2) = -3/2$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Sean las funciones f, g y h con dominio $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y conjunto de llegada $B = \{2, 3, 5, 8\}$. Si $f = \{(2, 5), (4, 5), (8, 8), (6, 8)\}$; $g = \{(2, 2), (6, 3), (4, 8), (8, 5)\}$ y $h = \{(4, 5), (2, 8), (6, 5), (8, 2)\}$, cuántos de los enunciados siguientes son verdaderos?

a) g es inyectiva b) f y g son biyectivas c) f y h son sobreyectivas

d) $\text{Ran}(f) - \text{Ran}(h) = \{2, 3\}$ e) $\text{Dom}(h) - \text{Ran}(h) = \emptyset$

Solución. a) En g : $\text{Dom}(g) = \{2, 4, 6, 8\} = A$ y $\text{Ran}(g) = \{2, 3, 5, 8\} = B$. Para cada $x \in A$, $\exists ! y \in B$, luego, g es inyectiva. El enunciado es verdadero.

b) $\text{Ran}(f) = \{3, 5, 8\} \neq B$, luego, f no es suryectiva, por lo que tampoco es biyectiva. $\text{Ran}(g) = \{2, 3, 5, 8\} = B$, entonces g es biyectiva. El enunciado es falso

c) Por b) sabemos que f no es suryectiva. $\text{Ran}(h) = \{2, 5, 8\} \neq B$, h tampoco es so

breyectiva. El enunciado es falso

d) $\text{Ran}(f) - \text{Ran}(h) = \{3, 5, 8\} - \{2, 5, 8\} = \{3\}$. El enunciado es falso.

e) $\text{Dom}(h) - \text{Ran}(h) = \{2, 4, 6, 8\} - \{2, 5, 8\} = \{4, 6\} \neq \emptyset$. El enunciado es falso.

Por lo tanto, sólo un enunciado es verdadero.

EJERCICIO 2. Sean $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ y $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, funciones biyectivas tales que:

$(f \circ g)(2/5) = 3/4$, $f(2/5) = 4/5$ y $f^*(3/4) = 1/2$. Hallar el valor

de $(f \circ g^*)(1/2)$.

Solución. Si $f^*(3/4) = 1/2 \rightarrow f(1/2) = 3/4$ (f es biyectiva)

Pero $f[g(2/5)] = 3/4 \rightarrow f[g(2/5)] = f(1/2) \rightarrow g(2/5) = 1/2$

Siendo g biyectiva, si $g(2/5) = 1/2 \rightarrow g^*(1/2) = 2/5$

Luego: $(f \circ g^*)(1/2) = f[g^*(1/2)] = f(2/5) = 4/5$

EJERCICIO 3. Sean $f(x) = \frac{3x-4a}{5}$, $f^*(3) = 2a-3b$ y $f^*(5) = 3a+5b$. Hallar:
 $f^*(a-3b)$.

Solución. En $f: y = \frac{3x-4a}{5} \rightarrow x = \frac{5y+4a}{3} \rightarrow f^*(x) = \frac{5x+4a}{3} \rightarrow f^*(3) = \frac{15+4a}{3}$

Entonces: $2a-3b = \frac{15+4a}{3}$, de donde: $2a-9b=15$ (1)

$f^*(5) = \frac{25+4a}{3} \rightarrow 3a+5b = \frac{25+4a}{3} \leftrightarrow a+3b = 5$ (2)

De (1) y (2) obtenemos: $a=6$ y $b=-1/3$

Por lo tanto: $f^*(a-3b) = f^*(7) = \frac{5(7)+24}{3} = 59/3$

EJERCICIO 4. Si $\forall x \in \mathbb{Q}$, definimos $f(x-1) = 3x+1$, hallar: $f^*[f^*(4-x)]$.

Solución. Si $f(x-1) = 3x+1 \rightarrow f(x) = 3(x+1)+1 = 3x+4 \leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y-4)$

Intercambiando variables: $f^*(x) = \frac{1}{3}(x-4) \rightarrow f^*(4-x) = \frac{1}{3}(4-x-4) = -\frac{1}{3}$

Luego: $f^*[f^*(4-x)] = f^*(-1/3) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{3} - 4) = -\frac{1}{9}(x+12)$

EJERCICIO 5. Las funciones f y g están definidas por: $f = \{(1, 3), (-5, -1), (7, 2), (2, 1)\}$, $g = \{(1, a), (2, b), (-5, a), (7, c)\}$. Entonces de las siguientes afirmaciones cuáles son verdaderas?

a) $(g \circ f^*)$ es inyectiva

b) $\text{Ran}(g \circ f^*) = \{a, b, c\}$

c) $(g \circ f^*)(3) - (g \circ f^*)(2) = a - c$

Solución. Tenemos: $f^* = \{(3, 1), (-1, -5), (2, 7), (1, 2)\}$. Sea $h = g \circ f^*$

Entonces: $h(3) = g[f^*(3)] = g(1) = a \rightarrow (3, a) \in h$

$h(2) = g[f^*(2)] = g(7) = c \rightarrow (2, c) \in h$

$$h(-1) = g[f^*(-1)] = g(-5) = a + (-1, a) \notin h$$

$$h(1) = g[f^*(1)] = g(2) = b + (1, b) \in h$$

$$\therefore \text{gof}^* = \{(3, a), (2, c), (-1, a), (1, b)\}$$

a) Se observa que: $(\text{gof}^*)(3) = (\text{gof}^*)(-1) = a$ y que $3 \neq -1$

Entonces, gof^* no es inyectiva. La afirmación es falsa.

b) $\text{Ran}(\text{gof}^*) = \{a, b, c\}$. La afirmación es verdadera.

c) $(\text{gof}^*)(3) - (\text{gof}^*)(2) = a - c$. La afirmación es verdadera.

Por lo tanto, son verdaderas las afirmaciones b y c.

EJERCICIO 6. Sean $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ y $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, dos funciones tales que $f(x) = 2x - 5$ y $g(x) = 3x + 2$ y sea $h = f \circ g$, si a es tal que $h(2a) = h(a+2)$, determinar el valor de a .

Solución. En $f: y = 2x - 5 \rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 5) \rightarrow f^*(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 2) = \frac{1}{2}(3x + 2 + 5) = \frac{1}{2}(3x + 7)$$

Si $h(2a) = h(a+2) \rightarrow \frac{1}{2}(6a + 7) = \frac{1}{2}[3(a+2) + 7]$, de donde: $a = 2$

EJERCICIOS: Grupo 13

- Las funciones f y g están definidas de la siguiente manera:
 $f = \{(1, 3), (-5, -1), (7, 2)\}$, $g = \{(1, 0), (2, b), (-5, a), (7, c)\}$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
 a) $\text{gof}^* = \{(3, a), (-1, b), (2, c)\}$ b) gof^* es sobreyectiva
 c) $(\text{gof}^*)(x) = (\text{gof}^*)(x') \rightarrow x = x'$
- Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax + 1$ dos funciones con dominio $X \subset \mathbb{Q}$ apropiado para que sean biyectivas. Si $(f \circ g^*)(3/2) = 1/2$, hallar $(\text{gof})(-2)$.
- Si $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ y $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ son dos funciones tales que $f(x-1) = 3x+2$, $g(2x+3) = 4x+4$, hallar $(g \circ f)(x)$.
- Sea f y g dos funciones con dominio $X \subset \mathbb{Q}$ apropiado para que sean biyectivas. Si $f(x) = ax + 1$, con $a \neq 0$, y $g(x) = x^2 + 1$. Si $(f \circ g^*)(5) = 1/3$, hallar el valor de $(f \circ g^*)(7)$.
- Sea $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por la ecuación $f(x+3) = 3x+2$, hallar el valor de:

$$E = \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h^2}, \quad h \neq 0$$
- Sean f y g dos funciones biyectivas tales que $(f \circ g^*)(3/4) = 2/5$, $f(2) = 2/5$, $g(3/5) = 2/5$, $f^*(3/4) = 2/5$. Si $A = (f \circ g^*)(2)$ y $B = (g \circ f)(2)$, hallar $A+B$.

7. Si $g(x+3)=x^3+9x^2+27x$ y $f(x)=g^*(x)+33$, hallar $(f \circ f)(37)$.
8. Dadas las funciones: $f(x)=mx+2$ $m \neq 0$ y $g(x)=3x-2$, se cumple: $g^*[f^*(mx)]=\frac{x}{3}$. Hallar $2f(-1)-g(1)$.
9. Sean las funciones f, g y h definidas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, todas biyectivas. Si $f(x)=(x/2)-1$, $g(x)=ax$ y $h(x)=2x+a$, tal que: $(f \circ g \circ h)(x+1)=2x+3$ hallar el valor de $(h \circ g)(-1)$.
10. Sean las funciones: $f=\{(2,1), (3,5), (4,2), (5,8), (6,1), (7,4), (8,4)\}$ y $g=\{(2,4), (3,3), (4,3), (5,1), (6,4), (7,6), (8,6)\}$; sea h la función con dominio $\{1,2,4,5,8\}$ tal que $g=h \circ f$. Hallar $h(1)+h(2)+h(4)+h(5)+h(8)$.
11. Sean $A=\{1,2,3\}$; $B=\{1,2,3,4\}$, si $f=\{(3,1), (x,3), (2,3)\}$ es una función de A en B ; $g=\{(3,1), (y,z), (1,3)\}$ es una función inyectiva de A en A ; $h=\{(1,1), (2,w), (3,2), (4,2)\}$ es una función suryectiva de B en A . Determinar $yz-(x+w)$.
12. Sean f y g funciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ tales que: $f(2x+1)=2x-1$ y $g(x)=3x-a$, con $a \in \mathbb{Q}$, donde $(f \circ g)(3)=(g \circ f)(a-1)$. Hallar $f(a)$.



3.10 OPERACIONES BINARIAS INTERNAS

Dado un conjunto A no vacío, se denomina **operación binaria interna** a toda aplicación o función de $A \times A$ con valores en A . Si denotamos $*$ la aplicación, podemos escribir:

$$*: A \times A \rightarrow A$$

Si $a \in A$ y $b \in A$, el valor de la aplicación $*$ sobre dichos elementos, tomados como pares ordenados, será el resultado de la operación $a*b$, o sea:

$$*(a,b) = a*b$$

Esto quiere decir que a cada par ordenado $(a,b) \in A \times A$, la aplicación $*$ le asigna un elemento, y sólo uno, $a*b \in A$.

Ejemplo 1. La aplicación $(+)$ y la multiplicación $(\times)$ son operaciones binarias internas en los conjuntos N, Z, Q, R ; esto es:

$$+: Z \times Z \rightarrow Z$$

$$\times: Z \times Z \rightarrow Z$$

$$(a,b) \mapsto a + b$$

$$(a,b) \mapsto a \cdot b$$

$$(2,3) \mapsto 5$$

$$(2,3) \mapsto 6$$

son dos operaciones de igualdad en las que los números $a=2 \in Z$ y $b=3 \in Z$, y la

suma $a+b$ y producto $a \cdot b$ son las operaciones.

Obsérvese que a cada par de números la operación le hace corresponder otro número que es el resultado de la operación. Los dos números forman un par ordenado y por eso se llama operación binaria.

La división $\div$ en $\mathbb{Z}$ es una operación binaria pero no interna en $\mathbb{Z}$, es decir: $\div : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ no es una función o no está bien definida, pues para $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ $a:b$ no siempre está en $\mathbb{Z}$. Así: $2 \in \mathbb{Z}$ y $3 \in \mathbb{Z}$, pero $2:3 \notin \mathbb{Z}$.

La sustracción $(-)$ es también una operación binaria pero no está definida en todo $\mathbb{N}$, pues si $(4,6) \rightarrow 4-6 \notin \mathbb{N}$

Ejemplo 2. En $\mathbb{Q}$ se define la operación interna: $a*b = a+b-ab$.

a) Hallar: $2*(-3)$ y $(5/3)*(1/2)$

b) Verificar que: $(a*b)*c = a*(b*c)$

Solución. Aplicando la definición dada se tiene:

$$a) \quad 2*(-3) = 2+(-3)-2(-3) = -1+6 = 5$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)*\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (a*b)*c &= (a*b) + c - (a*b)c = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c \\ &= a+b+b-ab-ac-bc+abc \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a + (b*c) - a(b*c) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) \\ &= a+b+c-ab-ac-bc+abc \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que: $(a*b)*c = a*(b*c)$

Observaciones:

(1) A una operación binaria se le llama también **Ley de composición interna**.

(2) Cuando $*$ es una operación binaria en un conjunto A , se dice que $*$ goza de la propiedad de "clausura".

(3) Si $*$ es una operación binaria en un conjunto A y existe un subconjunto B de A con la propiedad de que si $a, b \in B \rightarrow a*b \in B$, se dice que B es **cerrado** bajo la operación $*$.

Como A es subconjunto de A , entonces es cerrado bajo cualquier operación binaria definida en A , o bien, la operación $*$ es **cerrada** en A .

(4) Por medio de tablas se pueden definir muchas operaciones entre números y aún entre objetos que no son números, y hasta es posible inventar operaciones en cualquier conjunto, basta señalar cuál es el resultado para cada par de números.

Por ejemplo, una operación binaria en el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ es la operación $*$ definida por la tabla adjunta; donde para cada par ordenado (a, b) , el re-

sultado $a*b$ se encuentra en la intersección de la fila que comienza en a , y la columna que comienza con b . Así:

$$0 * 0 = 0$$

$$0 * 1 = 1$$

$$0 * 2 = 2$$

$$1 * 0 = 1$$

$$1 * 1 = 2$$

$$1 * 2 = 0$$

$$2 * 0 = 2$$

$$2 * 1 = 0$$

$$2 * 2 = 1$$

Es decir:

$$(0,0) \neq 0$$

$$(0,1) \neq 1$$

$$(0,2) \neq 2$$

$$(1,0) \neq 1$$

$$(1,1) \neq 2$$

$$(1,2) \neq 0$$

$$(2,0) \neq 2$$

$$(2,1) \neq 0$$

$$(2,2) \neq 1$$

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

3.10.1 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

Si $*$ es una operación binaria en un conjunto A , es decir que $*$ goza de la propiedad de clausura, se verifican las siguientes propiedades:

OB.1: $a*b = b*a$, $\forall a, b \in A$ (Commutatividad)

OB.2: $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a, b, c \in A$ (Asociatividad)

OB.3: $\exists e \in A \mid a*e = e*a = a$, $\forall a \in A$ (Existencia del elemento neutro)

OB.4: Si A posee el elemento neutro e respecto a $*$, entonces:

$$\exists a^{-1} \in A \mid a*a^{-1} = a^{-1}*a = e, \forall a \in A$$

(Existencia del elemento inverso o simétrico)

Si en el conjunto A , se definen las operaciones binarias $*$ y $\#$, entonces:

OB.5: $a*(b\#c) = (a*b)\#(a*c)$, $\forall a, b, c \in A$

(* es distributiva por la izquierda respecto a #)

OB.6: $(a\#b)*c = (a*c)\#(b*c)$, $\forall a, b, c \in A$

(* es distributiva por la derecha respecto a #)

OB.7: $*$ es distributiva con respecto a $\#$ si se cumplen OB.5 y OB.6

OB.1 CONMUTATIVIDAD

Sea A un conjunto dotado de una ley de composición interna $*$. Se dice que $*$ es conmutativa si:

$$a * b = b * a, \forall a, b \in A$$

Es decir, cualquiera que sea la pareja escogida $(a,b) \in A \times A$, el resultado de operar a y b es independiente del orden en que se consideren éstos.

Ejemplos:

- (1) En N , Z y Q las operaciones de adición (+) y multiplicación (.) son conmutativas, pues:

$$\forall a, b; a + b = b + a$$

(El orden de los sumandos no altera la suma total)

$$\forall a, b; a \cdot b = b \cdot a$$

(El orden de los factores no altera el producto total)

- (2) La operación interna de sustracción en Z , no es conmutativa, es decir, si $a \in Z$ y $b \in Z$ y $a \neq b \rightarrow a - b \neq b - a$

- (3) La operación interna de división no es conmutativa en Q^+ , es decir, si $a, b \in Q^+$ $a : b \neq b : a$

$$\text{Así para } 3, 8 \in Q^+ \text{ se tiene, } 5 : 8 = \frac{5}{8} \text{ y } 8 : 5 = \frac{8}{5} \rightarrow \frac{5}{8} \neq \frac{8}{5}$$

- (4) Las operaciones de unión e intersección entre conjuntos son operaciones internas conmutativas, pues:

$$A \cup B = B \cup A, \forall A, B$$

$$A \cap B = B \cap A, \forall A, B$$

- (5) En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se definen las operaciones * y # mediante las siguientes tablas:

*	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	a	b
d	d	d	b	c

$D(A)$

#	a	b	c	d
a	a	b	b	c
b	a	c	c	d
c	b	a	d	a
d	b	b	c	b

$D(A)$

Determinar si son o no conmutativas.

Cuando una operación binaria está definida en A por una tabla, la conmutatividad se aprecia en la misma tabla, ubicando los resultados: $x * x, \forall x \in A$, del siguiente modo: Se traza $D(A)$ (diagonal de A) y si los términos equidistantes de esta diagonal son iguales, entonces la operación correspondiente es conmutativa. Así, por simple inspección notamos que * es conmutativa y # no es conmutativa.

OB.2: ASOCIATIVIDAD

Sea A un conjunto dotado de una ley de composición interna *. Se dice que * es asociativa en A si:

$$(a*b)*c = a*(b*c), \forall a, b, c \in A$$

cada vez que dos términos de la igualdad estén definidos.

Ejemplos:

(1) La suma y la multiplicación en N, Z y Q son asociativas; es decir:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c$$

(2) La resta en Z no es asociativa

$$\begin{array}{l} (8-3)-2 = 5-2 = 3 \\ 8-(3-2) = 8-1 = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad (8-3)-2 \neq 8-(3-2)$$

La división en Q no es asociativa.

$$\begin{array}{l} (5 : 3) : 2 = \frac{5}{3} : 2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \\ 5 : (3 : 2) = 5 : \frac{3}{2} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad (5 : 3) : 2 \neq 5 : (3 : 2)$$

(3) La unión e intersección de conjuntos son operaciones asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \forall A, B, C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \forall A, B, C$$

(4) La composición de tres funciones f, g y h es una operación asociativa.

$$[fo(goh)](x) = f[(goh)(x)] = f[g(h(x))] = (fog)[h(x)] = [(fog)oh](x)$$

$$\therefore fo(goh) = (gof)oh$$

(5) En Q se define la operación $*$ por: $x*y = xy+x+y$. Verificar si es asociativa.

Debemos probar que $\forall a, b, c \in Q: (a*b)*c = a*(b*c)$

$$\text{En efecto: } (a*b)*c = (a*b)c + (a*b)+c \quad (\text{Def. } *)$$

$$= (ab + a + b)c + (ab + a + b) + c \quad (\text{Def. } *)$$

$$= abc + ac + bc + ab + a + b + c \quad (1)$$

$$a * (b*c) = a(b*c) + a + (b*c) \quad (\text{Def. } *)$$

$$= a(bc + b + c) + a + (bc + b + c) \quad (\text{Def. } *)$$

$$= abc + ab + ac + bc + a + b + c \quad (2)$$

Por lo tanto, (1) y (2) muestran que la operación $*$ es asociativa.

OB.3: ELEMENTO NEUTRO O IDENTIDAD

Sea A un conjunto dotado de una operación binaria $*$. Un elemento e de A se llama elemento neutro o identidad para $*$ si:

$$a * e = e * a = a, \forall a \in A$$

Ejemplos:

- (1) En $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, dotado de la adición, 0 es el elemento neutro, pues:

$$a + 0 = 0 + a = a, \forall a$$

En $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, dotados de la multiplicación, 1 es el elemento neutro, pues

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a$$

- (2) En $\mathbb{Q}$ se define la operación $*$ por: $a*b=a+b+ab$. Verificar la existencia del elemento identidad o neutral.

Dado que la operación $*$ es conmutativa, es suficiente ver si:

$$e \in \mathbb{Q} | a*e=a, \forall a, \text{ esto es:}$$

$$a * e = a + e + ae = a + e + ae = 0 \iff e=0 \vee a=-1$$

Como a es cualquier elemento de $\mathbb{Q}$, entonces $e=0$ es el elemento neutro o identidad.

- (3) En el conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ se definen las operaciones $*$ y $\#$ mediante las tablas:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	2	3	2	2
3	1	2	3	4
4	4	3	4	3

$\#$	1	2	3	4
1	1	2	3	2
2	2	3	4	2
3	3	3	4	1
4	2	2	3	1

Verificar la existencia del elemento neutro:

Cuando los resultados de una operación binaria se dan en una tabla, es muy fácil detectar si existe o no el elemento neutro. En estos resultados se busca una fila igual a la fila de entrada y una columna igual a la columna de entrada. Si existen esta fila y columna, su intersección determina el elemento neutro. Considerando este hecho para la operación $*$ se tiene:

Fila de entrada

$*$	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	2	3	2	2
3	1	2	3	4
4	4	3	4	3

Columna de entrada

Columnas iguales

Filas iguales

Observando la tabla de $*$, tenemos que $e=3$ es el elemento neutro para $*$ en A . Se deja como ejercicio comprobar que se cumple la ecuación: $a*e=a, \forall a \in A$. Los resultados de la operación $\#$ no reproducen ninguna fila y columna igual.

les a la fila y columnas de entrada respectivamente. Por lo tanto, en A no hay elemento neutro para $\#$.

OB.4: ELEMENTO INVERSO O SIMETRICO

Sea A un conjunto dotado de una operación interna $*$, tal que admite el elemento neutro e . Un elemento b en A se llama inverso o simétrico de a en A , si se cumple que: $a * b = b * a = e$

Es decir, b es un elemento que neutraliza al elemento a . Se denota: $b=a$

Ejemplos:

(1) En el conjunto N , cero es el elemento neutro para la adición, y como:

$0+0=0$, se tiene que el inverso de 0 es también 0 .

En los conjuntos Z y Q , cero es el elemento neutro, pues $\forall a \in Z$ ó $\forall b \in Q$: $a+(-a)=(-a)+a=0$, de aquí a^{-1} se denota por $-a$ y se llama el opuesto de a .

En N , 1 es el elemento neutro para la multiplicación y como $1 \times 1=1$, se tiene que 1 es el elemento inverso de 1 . No existe otro elemento que tenga inverso para la multiplicación; pues si: $a \cdot b=1 \rightarrow a=b=1$.

Lo mismo sucede en Z . En cambio en Q , como 1 es el elemento neutro, todo elemento $a \neq 0$ tiene inverso para la multiplicación, esto es:

$a^{-1} = \frac{1}{a}$, entonces, si: $a=2 \rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2}$ y $2(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})2 = 1$

$$a=-3 \rightarrow a^{-1} = -\frac{1}{3} \text{ y } (-3)(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})(-3) = 1$$

(2) En el conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ se define la operación $*$

por la tabla:

$*$	1	2	3	4
1	2	1	3	2
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	2	4	1	2

Se tiene que el elemento neutro es $e=2$. La pregunta es que elementos de A tienen inversos para $*$, es decir, para que elementos de A las ecuaciones:

$$a * x = x * a = 2$$

admiten la misma solución.

De la tabla obtenemos: $1 * 1 = 2 \rightarrow 1^{-1} = 1$

$$2 * 2 = 2 \rightarrow 2^{-1} = 2$$

$$3 * 3 = 2 \rightarrow 3^{-1} = 3$$

$$4 * 4 = 2 \rightarrow 4^{-1} = 4$$

También: $1 * 4 = 2$ y $4 * 1 = 2 \rightarrow 1^{-1}=4$ y $4^{-1}=1$

Por lo tanto, los elementos 2 y 3 tienen un único inverso, mientras que 1 y 4 admiten dos inversos.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Si en $\mathbb{Q}$ se define la operación $*$ por: $a*b=2a+ab+2b$. Determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

$$a) \quad \frac{3}{4} * \frac{4}{3} = \frac{77}{12}$$

b) $*$ es asociativa respecto de la adición

c) 1 es la unidad de $*$

Solución. a) Por la operación $*$: $\frac{3}{4} * \frac{4}{3} = 2(\frac{3}{4}) + (\frac{3}{4})(\frac{4}{3}) + 2(\frac{4}{3})$
 $= \frac{31}{6} \neq \frac{77}{12}$

La afirmación es falsa.

b) Debemos probar que: $(a * b) * c = a * (b * c)$

$$(a * b) * c = (2a + ab + 2b) * c \quad (\text{Def. } *)$$

$$= 2(2a + ab + 2b) + (2a + ab + 2b)c + 2c \quad (\text{Def. } *)$$

$$= 4a + 4b + 2c + 2ab + 2bc + 2ac + abc \quad (1)$$

$$a * (b * c) = a * (2b + bc + 2c) \quad (\text{Def. } *)$$

$$= 2a + a(2b + bc + 2c) + 2(2b + bc + 2c) \quad (\text{Def. } *)$$

$$= 2a + 4b + 4c + 2ab + 2bc + 2ac + abc \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que la afirmación es falsa. $(a*b)*c \neq a*(b*c)$

c) Según OB.3: $a * e = a \rightarrow 2a + ae + 2e = a \rightarrow e = -\frac{a}{a+2} \neq 1$

La afirmación es falsa.

EJERCICIO 2. En $\mathbb{Q}$ definimos la operación $*$ por: $a*b=a-b+2$. Si a^{-1} es el inverso de a bajo la operación $*$, hallar el conjunto solución de la ecuación: $x*2^{-1}=5^{-1}*x$

Solución. Según OB.3: $\exists e \in \mathbb{Q} | a*e=a + a-e+2=a + e=2$

$$\text{y por OB.4: } a * a^{-1} = a^{-1} * a = 2$$

En la ecuación dada aplicamos la operación $(5*x)$ y $*2$ por la izquierda y de recha, respectivamente, de cada miembro de la igualdad:

$$(5 * x) * \underbrace{x * 2^{-1}}_2 * \underbrace{2}_{2} = \underbrace{(5 * x) * (5^{-1} * x^{-1})}_2 * 2$$

$$\rightarrow (5 * x) * (x * 2) = 2 * 2 + (5-x+2) * (x-2+2) = 2-2+2 \quad (\text{Def. } *)$$

$$+ (7-x) * (x) = 2$$

$$+ 7-x-x+2 = 2 \rightarrow x = 7/2$$

EJERCICIO 3. Consideremos en $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{3\}$ la operación $*$ definida por:

$$a*b = a+b + \frac{1}{3}ab. \text{ Según esto, establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.}$$

$$a) \forall a, b \in Q^*, a * b = b * a \quad c) \exists ! e \in Q^* | a * e = a, \forall a \in Q^*$$

$$b) \forall a, b, c \in Q^*, (a * b) * c = a * (b * c) \quad d) \forall a \in Q^*, a^{-1} = \frac{3a}{3+a}$$

Solución. a) $b * a = b + a + \frac{1}{3}ba = a + b + \frac{1}{3}ab = a * b \therefore$ Es verdadera.

$$b) (a * b) * c = (a+b+\frac{1}{3}ab)*c = a + b + \frac{1}{3}ab + c + \frac{1}{3}(ac + bc + \frac{1}{3}abc) \\ = a + b + c + \frac{1}{3}(ab + ac + bc + \frac{1}{3}abc) \quad (1)$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + \frac{1}{3}bc) = a + b + c + \frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}(ab + ac + \frac{1}{3}abc) \\ = a + b + c + \frac{1}{3}(ab + ac + bc + \frac{1}{3}abc) \quad (2)$$

De (1) y (2): $(a * b) * c = a * (b * c)$. La afirmación es verdadera.

$$c) Si a * e = a \rightarrow a + e + \frac{1}{3}ae = a \leftrightarrow e = 0 \vee a = -3$$

Dado que $a \in Q - \{-3\}$, luego: $\exists ! e \in Q^*$. $\therefore$ Es verdadera

$$d) \text{ Según OB.4: } a * a^{-1} = e \rightarrow a + a^{-1} + \frac{1}{3}a \cdot a^{-1} = 0 \leftrightarrow a^{-1} = -\frac{3a}{3+a} \therefore \text{ Es falsa.}$$

EJERCICIO 4. En el conjunto N de los números naturales definimos las siguientes operaciones: $a * b = a^2 - b$, $a \# b = 3a - b^2$, $a \Delta b = 2a + 3b$

Si $x * x = 6 \wedge y \# y = -4$, hallar el valor de $x \Delta y$.

$$\text{Solución. Si } a * b = a^2 - b \rightarrow x * x = x^2 - x = 6 \leftrightarrow x = 3 \in N \text{ o } x = -2 \notin N$$

$$\text{Si } a \# b = 3a - b^2 \rightarrow y \# y = 3y - y^2 = -4 \leftrightarrow y = 4 \in N \text{ o } y = -1 \notin N$$

$$\text{Si } a \Delta b = 2a + 3b \rightarrow x \Delta y = 2x + 3y = 2(3) + 3(4) = 18$$

EJERCICIO 5. En $Q^* = Q - \{0\}$ definimos la operación $a * b = 3ab$. Determinar los valores de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones

$$a) * \text{ es conmutativa} \quad c) \exists ! y \in Q^* | x * y = y * x, \forall x \in Q^*$$

$$b) * \text{ es asociativa} \quad d) \text{ El inverso de } \frac{1}{4} \text{ respecto de la operación } * \text{ es } \frac{4}{3}$$

$$\text{Solución. a) } b * a = 3ba = 3ab = a * b = b * a \therefore \text{ Es verdadera}$$

$$b) (a * b) * c = (3ab) * c = 3(3ab)c = 9abc$$

$$a * (b * c) = a * (3bc) = 3a(3bc) = 9abc$$

La operación $*$ es asociativa, luego, la afirmación es verdadera.

$$c) Si a * b = 3ab \rightarrow x * y = 3xy \rightarrow x = 3xy \leftrightarrow x = 0 \vee y = 1/3. \text{ Como } x \neq 0 \rightarrow y = 1/3$$

Luego, $\exists ! y = 1/3 \in Q^*, \forall x \in Q^*$. $\therefore$ Es verdadera.

$$d) \text{ Sea } b^{-1} \text{ el inverso de } 1/4; \text{ según OB.4: } (1/4) * b^{-1} = y \text{ (elemento neutro)}$$

$$\text{Entonces: } 3(1/4)(b^{-1}) = 1/3, \text{ de donde: } b^{-1} = 4/9. \therefore \text{ Es falsa.}$$

EJERCICIO 6. Entre conjuntos se define la operación $*$ por: $A * B = A \cup B'$ para todo A y B en U . Establecer el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

$$a) A' * A' = A \quad b) (A * A) * (B * B) = A \cup B \quad c) (A * B) * (A * B) = A \cap B$$

Solución. a) Por la operación *: $A' * A' = (A')' \cup (A')' = A \cup A = A$. $\therefore$ Es V.

$$b) (A * A) * (B * B) = (A' \cup A') * (B' \cup B') = A' * B' = (A')' \cup (B')' = A \cup B \quad \therefore \text{La afirmación es verdadera.}$$

$$c) (A * B) * (A * B) = (A' \cup B') * (A' \cup B') = (A' \cup B')' \cup (A' \cup B')' = (A' \cup B')' = [(A \cap B)']' = A \cap B \quad \therefore \text{La afirmación es verdadera.}$$

EJERCICIO 7. En $A = \{1, 2, 3, 4\}$, se define una operación

* cuyos valores están dados en la tabla adjunta. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) La ecuación $x * 2 = 1$ tiene solución única.

b) $\forall x, y \in A$ se cumple: $x * y = y * x$ c) $(2 * 3) * [3 * (4 * 1)] = 4$

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	1	1
3	3	1	1	4
4	4	2	3	4

Solución. a) Para $x=2$, en la tabla vemos que: $2 * 2 = 1$. También: $x=3 \rightarrow 3 * 2 = 1$. La solución de $x * 2 = 1$ no es única. $\therefore$ La afirmación es falsa.

b) Si trazamos la diagonal $D(A)$, vemos que hay dos elementos equidistantes de esta diagonal que no son iguales, esto es: $(2 \leftrightarrow 1)$ y $(3 \leftrightarrow 4)$

Aquí: $4 * 2 = 2$ y $2 * 4 = 1 \rightarrow 4 * 2 \neq 2 * 4$; $4 * 3 = 3$ y $3 * 4 = 4 \rightarrow 4 * 3 \neq 3 * 4$. $\therefore$ Es F.

c) $(2 * 3) * [3 * (4 * 1)] = (1) * [3 * (4)] = 1 * 4 = 4$. La afirmación es verdadera.

EJERCICIO 8. Sean $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 1/2, 1/3\}$ tales

que A se define # por la tabla adjunta: y en B se define * por: $B * B \rightarrow B$

$$(a, b) \rightarrow b$$

Si $x = [(-1)^{-1} \# (2)^{-1}]^{-1}$ e $y = (3 * 1/2) * 1/3$, hallar en Q: $x + y$

#	-1	0	1	2
-1	0	1	2	-1
0	1	2	-1	0
1	2	-1	0	1
2	-1	0	1	2

Solución. En la tabla se observa que la cuarta fila es igual a la fila de entrada y la cuarta columna igual a la columna de entrada. Las dos se interceptan en el elemento 2, o sea, $e=2$.

Entonces, según OB.4: $(-1) \# (-1)^{-1} = 2$ y $2 \# 2^{-1} = 2$

En la tabla: $(-1) \# 1 = 2$ y $2 \# 2 = 2 \rightarrow (-1)^{-1} = 1$ y $2^{-1} = 2$. Luego: $x = [1 \# 2]^{-1} = 1^{-1} = -1$

Aplicando la operación * en y, se tiene: $y = (1/2) * (1/3) = 1/3$

$$\therefore x + y = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

EJERCICIO 9. Si definimos la operación * en $Q - \{1\}$ por: $a * b = a + b - ab$ y si a^{-1} es el inverso de a, hallar: $2^{-1} * 3^{-1}$.

Solución. Según OB.3: $a * e = a \rightarrow a + e - ae = a \rightarrow e = 0 \vee a = 1$

Como $a \neq 1 \rightarrow e = 0$ es el elemento neutro.

Luego, $a^{-1} \in (Q - \{1\}) \mid a * a^{-1} = e \rightarrow a + a^{-1} - a \cdot a^{-1} = 0 \rightarrow a^{-1} = \frac{a}{a-1}$

Para $a=2 \rightarrow 2^{-1} = \frac{2}{2-1} = 2$, y para $a=3 \rightarrow 3^{-1} = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$

$$\therefore 2^{-1} * 3^{-1} = 2 + \frac{3}{2} - (2)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS: Grupo 14

1. Sea $*$ una operación binaria interna definida en Q por: $a*b = (a^2 - b)(b^2 - a)$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $*$ es conmutativa

b) $4*(3*1) = 32*252$

c) $\exists k \in Q \mid (1/k)(a*b) = (ka)*b$

2. En Q se define la operación $*$ por: $a*b = ab + a - b$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $\forall a, b \in Q, a*b \in Q$

c) $\exists! e \in Q$, elemento neutro para $*$

b) $*$ es asociativa

d) Cada $x \in Q - \{1\}$ posee inverso para $*$

3. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se define una operación $*$ por medio de una tabla tal que, los elementos de cada columna y cada fila son diferentes, tiene a 4 como elemento neutro y cada elemento es su propio inverso. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $(2*3)*(2*4) = 2$

b) $*$ es conmutativa

c) $(3*2^{-1})*3^{-1} = 2$

4. Definimos la aplicación $*$ de $A = \{(a, b) \in Q^2 \mid ab \neq 0 \wedge ab \neq 1\}$, con valores en Q , donde: $*(a, b) = a*b = (a - b^{-1})^{-1}(b - a^{-1})^{-1}$. Según esto, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $a*b = b*a$ b) $a*a = \left(\frac{a}{a^2-1}\right)^2$ c) Existe la solución de $2*(8+x) = (15+2x)$

5. Si $*$ es la operación definida en Z por: $a*b = ab + b - a$. Entonces de las siguientes afirmaciones, cuáles son verdaderas?

a) $\{a \in Z \mid a*5=0\} \neq \emptyset$

b) $*$ es conmutativa

c) $(a*a) + [a*(a+1)] + [a*(-1)] = 2a^2$

6. Sea $Q^* = Q - \{0\}$ en donde se define la operación $*$ por: $a*b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Si $a*(2/3)=5$ y $b*3=1/5 \rightarrow a \cdot b = -15/7$

b) $\forall a, b, c \in Q^*, a*(b*c) = (a*b)*c$

c) $a*a = a \leftrightarrow a^2 = 2$

7. En Q se definen dos operaciones $*$ y $\#$ por $a*b = a+2b$ y $a\#b = 2ab$, $\forall a, b \in Q$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- a) $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ c) $\exists ! e \in \mathbb{Q} | a*e = e*a = a$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$
 b) $a \# (b*c) = (a \# b)*(a \# c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ d) $(\frac{1}{2} * \frac{1}{5}) \# (3 * \frac{1}{3}) = 33/5$
8. Sean $*$ y $\#$ operaciones definidas en $\mathbb{Z}$ por: $a*b = \frac{b-a}{2}$, $a \# b = \frac{a+b}{2}$. Según esto, resolver la ecuación: $2*(3 \# x) = (x \# 11)*6$
9. En el conjunto $\mathbb{Q}$, definimos las siguientes operaciones: $a*b = \frac{1}{2}a + 3b$; $a \# b = 3a + \frac{3}{2}b$; $a \Delta b = 5a - 3b$. Si $x*x=9$, $y \# y=21$, hallar el valor de $x \Delta y$.
10. En $\mathbb{Q}$, se definen las operaciones $a*b = a^2 + b$, $a \# b = a - b^2$. Si $c \neq 0$, hallar la suma de las soluciones de la ecuación: $[x*(x \# c)] \# c = 2[(c*0) \# x]$.
11. Se define la operación $*$ en $\mathbb{Q}$ por: $a*b = a + b - ab$. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
 a) El cero es el elemento neutro en $*$ c) Si $x*3=6 \rightarrow x=-3/2$
 b) $(a+b)*(a-b) = a^2 + 2a - 2b^2$ d) $*$ es conmutativa
12. Si en $\mathbb{Q}$ definimos la operación $*$ por: $a*b = a(1-2b) + b$. Se afirman:
 a) $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a*b = b*a$ c) $(1^{-1} * 2)^{-1} = 1/3$
 b) 0 es la identidad para $*$ y todo $a \in \mathbb{Q}$
 De tales afirmaciones, cuáles son verdaderas?
13. Si a, b son enteros, definimos la operación en $\mathbb{Z}_6^+$: $a*b = b - a$ y $a \# b = 2a + 2$. Hallar el conjunto solución de: $[(x+3)*(x+2)]*(x+6) \geq x \# (x+2)$.
14. En $\mathbb{Q}$ definimos la operación $*$ por: $a*b = a + b + \frac{1}{5}ab$. Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?
 a) La operación $*$ es conmutativa. c) 0 es el elemento identidad
 b) La operación $*$ es asociativa d) $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\exists a^{-1}$ en $\mathbb{Q}$
15. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos la operación $*$ tal que 3 es la identidad, cada elemento es su propio inverso y los elementos (dé los resultados en una tabla) de cada fila y cada columna son diferentes. Si a es la solución de la inequación $(x*3)^{-1} = (2*4^{-1})^{-1}$, hallar el valor de: $[(a*2)^{-1}*(a^{-1}*3^{-1})]^{-1}$.
16. Si definimos en $\mathbb{Q}$ la operación $*$ por: $a*b = a(1-2b) + b$. De las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas?
 a) $2^{-1} * 1^{-1} = 1/3$ c) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a*b)*c = a*(b*c)$
 b) $(2x)*3 = 2*(3x) \rightarrow x=1$
17. Si $*$ es una operación en $A = \{0, 1, 2\}$ tal que su neutro es 2, el único inverso de 1 es 0, el único inverso de 0 es 1, y $\forall x \in A - \{2\}$, $x*x=x$. Hallar

el valor de: $[(0*1)-(0*0)] + [(1*1)-(1*0)] + (0*2)$

18. Sea $*$ una operación en $\mathbb{Q}$. Si $(2a+1)*(b-2)=2a+b+1$, hallar: $(-3)^{-1}*4$.

19. Si definimos la operación $*$ en $\mathbb{Q}$ por: $a*b=a+b-ab$ y si a^{-1} es el inverso de a , hallar $2^{-1}*3^{-1}$.

20. Sea $A=\{a,b,c,d\}$ y $*$ la operación definida en A mediante la tabla adjunta:

Hallar: $x=\{(d*a^{-1})^{-1}*b^{-1}\}^{-1}$.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

21. Si $A=\{p,q,r,s\}$, se define la operación $*$ mediante la tabla adjunta. Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $*$ es conmutativa

b) Existe un elemento identidad para $*$

c) Todo elemento de A tiene un inverso respecto de $*$.

d) Si $(p*q)*x = s \rightarrow x=r$

$*$	q	r	s	p
q	p	s	r	q
r	s	p	q	r
s	r	q	p	s
p	q	r	s	p

22. Sea $A=\{a,b,c,d,e\}$ y $*$ una operación binaria asociativa definida en A según el cuadro adjunto. Dado el sistema de ecuaciones: $x*y=b$, $x*y^{-1}=d$

Hallar el par ordenado: $(x*d, y*c)$

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

23. En el conjunto $A=\{p,q,r,s,t\}$, sea la operación $*$ definida en A según el cuadro adjunto:

Si $(p*x^{-1})^{-1}*(t*q^{-1}) = t^{-1}$

Hallar el valor de: $x*r$

$*$	p	q	r	s	t
p	r	s	t	p	q
q	s	t	p	q	r
r	t	p	q	r	s
s	p	q	r	s	t
t	q	r	s	t	p

24. Sea $*$ la operación en $A=\{0,2,4,6,8\}$, definida por:

Si $\{(x^{-1}*2^{-1}) * (6*8)^{-1}\}^{-1} = 2$

hallar el valor de x .

$*$	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
2	6	8	0	2	4
4	8	0	2	4	6
6	0	2	4	6	8
8	2	4	6	8	0

25. Sea $*$ una operación definida en $A=\{a,b,c,d,e\}$ mediante la tabla adjunta. Si de $*$ se sabe que es

conmutativa, posee elemento neutro y todo elemento de A tiene elemento inverso. Hallar:

$\{(y*z^{-1})^{-1}*a\}^{-1}*x^{-1}$

$*$	a	b	c	d	e
a	d	e	a	b	c
b	e	a	z	c	d
c	a	y	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	x	d	e	a	b

CAPITULO

4

NUMEROS REALES

4.1 INTRODUCCION

La estructuración del sistema de los números reales se enfoca usualmente de dos formas; una de ellas es el método usado por Dedekind, que introduce primeramente en forma axiomática el estudio de los números naturales, para extenderse luego a los números enteros, racionales, y en base a éstos últimos definir los números reales. La otra forma, define axiomáticamente el sistema de los números reales y luego demostrar que los números racionales, enteros y naturales son subconjuntos de los números reales. En este libro usaremos la última forma.

4.2 DEFINICION AXIOMATICA DE LOS NUMEROS REALES

Se llama sistema de números reales a un conjunto no vacío R dotado de dos operaciones internas, llamadas *adición* y *multiplicación*, denotadas por:

$$(+): R \times R \rightarrow R$$

$$(a,b) \mapsto a+b$$

$$(-): R \times R \rightarrow R$$

$$(a,b) \mapsto a \cdot b$$

y una relación de orden mayor, denotada por " $>$ ", que satisface los axiomas siguientes:

1. AXIOMAS PARA LA ADICION

A.1: Si $a \in R$ y $b \in R \rightarrow (a+b) \in R$ (Clausura)
(La suma de dos números reales es una operación cerrada)

A.2: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in R$ (Commutatividad)

A.3: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in R$ (Asociatividad)

$$A.4: \exists! 0 \in \mathbb{R} | a + 0 = 0 + a, \forall a \in \mathbb{R}$$

(Existencia del elemento neutro aditivo)

$$A.5: \forall a \in \mathbb{R}, \exists! (-a) \in \mathbb{R} | a + (-a) = (-a) + a = 0$$

(Existencia del elemento inverso aditivo)

2. AXIOMAS PARA LA MULTIPLICACION

$$M.1: \text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ y } b \in \mathbb{R} \rightarrow (a \cdot b) \in \mathbb{R}$$

(Clausura)

(El producto de dos números reales es una operación cerrada)

$$M.2: a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(Commutatividad)

$$M.3: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

(Asociatividad)

$$M.4: \exists! 1 \in \mathbb{R} | a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{R}$$

(Existencia del elemento neutro multiplicativo)

$$M.5: \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists! \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R} | a \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) a = 1$$

(Existencia del elemento inverso multiplicativo)

3. AXIOMAS DISTRIBUTIVAS (Axiomas del factor común)

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$D.1: a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(Distributividad por la izquierda)

$$D.2: (b + c)a = ba + ca$$

(Distributividad por la derecha)

4. AXIOMAS DE IGUALDAD

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$I.1: \text{Dicotomía: } a = b \text{ o } a \neq b$$

$$I.2: \text{Reflexividad: } a = a$$

$$I.3: \text{Simetría: Si } a = b \rightarrow b = a$$

$$I.4: \text{Transitividad: Si } a=b \wedge b=c \rightarrow a=c$$

$$I.5: \text{Unicidad de la Adición: Si } a=b \rightarrow a + c = b + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$I.6: \text{Unicidad de la Multiplicación: Si } a=b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

5. AXIOMAS DE ORDEN

O.1: Ley de Tricotomía.

Para dos números $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, uno y sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

"a es menor que b" , "a es igual a b" , "a es mayor que b"

0.2: Ley Transitiva

$$\text{Si } a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$$

0.3: Leyes de Monotonía

$$\text{a) Si } a < b \rightarrow \forall c \in \mathbb{R}, a + c < b + c \quad (\text{Consistencia Aditiva})$$

$$\text{b) Si } a < b \text{ y } c > 0 \rightarrow ab < bc \quad (\text{Consistencia Multiplicativa})$$

$$\text{c) Si } a < b \text{ y } c < 0 \rightarrow ab > bc$$

0.4: Existe un conjunto $\mathbb{R}^+$, tal que $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de números reales positivos, el cual satisface las siguientes propiedades:

$$\text{a) Si } a \in \mathbb{R}^+ \text{ y } b \in \mathbb{R}^+ \rightarrow (a+b) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } a \cdot b \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{b) Para cada } a \neq 0: a \in \mathbb{R}^+ \text{ ó } -a \in \mathbb{R}^+, \text{ pero no ambos}$$

$$\text{c) } 0 \notin \mathbb{R}^+$$

6. L: EL AXIOMA DEL SUPREMO

Si S es un conjunto no vacío de elementos de $\mathbb{R}$ superiormente acotado, entonces S tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

Este último axioma nos garantiza que los números reales $\mathbb{R}$ incluyen los números racionales $\mathbb{Q}$ y que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales.

A continuación, haciendo uso de los axiomas, probaremos algunas de las propiedades del sistema de los números reales y veremos también sus aplicaciones en el álgebra elemental.

4.3 TEOREMAS SOBRE LA ADICIÓN

Teorema 1. El elemento neutro aditivo ($e=0$) es único.

Demostración. Según A.4: $\exists! e \in \mathbb{R} | a+e = e+a = a, \forall a \in \mathbb{R}$

Supongamos que existe otro elemento neutro aditivo $e' \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que probar: $e=e'$

$$(1) \text{ En efecto: por A.4: } a+e = a$$

$$(2) \text{ En particular, si hacemos } a=e' \rightarrow e'+e = e$$

$$(3) \text{ Pero, por ser } e' \text{ elemento neutro aditivo } \rightarrow a+e' = e$$

$$(4) \text{ Ahora, si hacemos: } a=e \rightarrow e+e' = e$$

$$(5) \text{ De 2 y 4 se tiene: } e = e' + e = e' \rightarrow e=e'$$

Lo que demuestra la unicidad del elemento neutro para la adición en $\mathbb{R}$.

Definición 4.1 El único elemento neutro para la adición en R se llama **cero**, se escribe 0 , de modo que:

$$\forall a \in R: a+0 = 0+a = a$$

TEOREMA 2. Dado $a \in R$, el inverso aditivo es único.

Demostración. Supongamos que b y b' son los inversos aditivos de a en R . Probaremos entonces que: $b=b'$

En efecto, según A.5: $a+b = b+a = 0$ y $a+b' = b'+a = 0$

$$(1) \text{ Partiremos escribiendo: } b = b + 0 \quad (A.4)$$

$$(2) \quad + = b + (a + b') \quad (A.5)$$

$$(3) \quad + = (b + a) + b' \quad (A.3)$$

$$(4) \quad + = 0 + b' \quad (A.5)$$

$$(5) \quad + b = b' \quad (A.4)$$

Lo que demuestra la unicidad del inverso para la adición en R .

Definición 4.2 Para cada $a \in R$, el inverso aditivo de a se llama el **opuesto** de a , se denota $-a$, de modo que:

$$\forall a \in R: a+(-a) = (-a)+a = 0$$

TEOREMA 3. Ley de cancelación para la adición:

Para los números a, b y $c \in R$, se cumple: $a+c = b+c \rightarrow a=b$

Demostración. En efecto:

$$(1) a+c = b+c \rightarrow a+c+(-c) = b+c+(-c) \quad (I.5)$$

$$(2) \quad + a+[c+(-c)] = b+[c+(-c)] \quad (A.3)$$

$$(3) \quad + a + 0 = b + 0 \quad (A.5)$$

$$(4) \quad + a = b \quad (A.4)$$

Corolario. Para números a y $b \in R$, se cumple

$$a + b = 0 \rightarrow b = -a$$

Demostración. En efecto: (1) Si $a+b=0 \rightarrow (-a)+(a+b) = (-a)+0$ (I.5)

$$(2) \quad + [(-a)+a]+b = (-a)+0 \quad (A.3)$$

$$(3) \quad + 0 + b = -a \quad (A.5 \text{ y } A.4)$$

$$(4) \quad + b = -a \quad (A.4)$$

TEOREMA 4. Para cada $a \in R$, se cumple: $-(-a) = a$

Demostración. En efecto, por la definición 4.2: $\forall a \in R: a+(-a) = 0$

y por el Corolario del T.3: $a = -(-a)$

TEOREMA 5. Para los números a y $b \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

Demostración. En efecto, partiremos de I Axioma de reflexividad): $a = a$
 $(a+b) + [(-a)+(-b)] = (a+b) + [(-a)+(-b)]$
 $= [a+(-a)] + [b+(-b)]$ (A.3)
 $+ (a+b) + [(-a)+(-b)] = 0 + 0$ (A.5)
 $+ [(-a)+(-b)] = -(a+b)$ (Cor. del T.3)
 $+ -(a + b) = (-a) + (-b)$

Nota. Obsérvese que los axiomas A.1 al A.5 se refieren a la adición. Existe otra operación sobre números reales que no está incluida explícitamente en estos axiomas, a saber, la sustracción. Esta operación se puede definir en función de las propiedades ya estudiadas.

Definición 4.3 Sean dos números $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Se define la diferencia de a y b como la suma de a con el inverso aditivo de b . Esto es:

$$a - b = a + (-b), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

TEOREMA 6. Para los números a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a) $(a-b)+b = a$ | e) $a=b$ y $c=d \rightarrow \begin{cases} a+c = b+d \\ a-c = b-d \end{cases}$ |
| b) $a-(b+c) = (a-b)-c$ | f) $a - (-b) = a + b$ |
| c) $a-b = c-d \rightarrow a+d = b+c$ | g) $-0 = 0$ |
| d) $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$ | |

4.4 TEOREMAS SOBRE LA MULTIPLICACION

TEOREMA 7. El elemento neutro multiplicativo ($e=1$) es único.

Demostración. Supongamos que e y e' son dos elementos neutros multiplicativos de a en $\mathbb{R}$. Probaremos que $e=e'$

- (1) En efecto, por M.5: $ae = a$
- (2) En particular, para $a=e' \in \mathbb{R} \rightarrow e'e = e'$
- (3) Por ser e' elemento neutro, entonces: $a.e' = a$
- (4) En particular, para $a=e \rightarrow e.e' = e$
- (5) Por tanto, de 2 y 4: $e = ee' = e' \rightarrow e = e'$

Lo que demuestra la unicidad del elemento neutro multiplicativo.

Definición 4.4 El único elemento neutro para la multiplicación en R se llama uno o unidad, se denota 1 , de modo que:

$$\forall a \in R: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

TEOREMA 8. Dado $a \in R$, $a \neq 0$, el elemento inverso multiplicativo de a es único.

Demostración. Supongamos que b y b' son elementos inversos multiplicativos de a en R . Probaremos que $b=b'$.

En efecto, según M.5: $a \cdot b = b \cdot a = 1$ y $a \cdot b' = b' \cdot a = 1$

$$(1) \text{ Partimos de: } b = b \cdot 1 \quad (M.4)$$

$$= b \cdot (a \cdot b') \quad (M.5)$$

$$= (b \cdot a) \cdot b' \quad (M.3)$$

$$= 1 \cdot b' \quad (M.5)$$

$$\rightarrow b = b' \quad (M.4)$$

Por lo tanto, queda probado la unicidad del elemento inverso multiplicativo

Definición 4.5 Para cada $a \in R - \{0\}$, el inverso de a para la multiplicación, se llama inverso multiplicativo o recíproco de a , se denota a^{-1} o $1/a$, de modo que:

$$\forall a \in R - \{0\}: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

TEOREMA 9. Propiedad cancelativa para la multiplicación.

Para los números a, b y $c \in R$, se cumple: $a \cdot b = a \cdot c$, $a \neq 0 \rightarrow b = c$

Demostración. En efecto: (1) $a \cdot b = a \cdot c \rightarrow (a \cdot b) \cdot a^{-1} = (a \cdot c) \cdot a^{-1}$ (I.6)

$$(2) \quad \rightarrow (a \cdot a^{-1}) \cdot b = (a \cdot a^{-1}) \cdot c \quad (M.3)$$

$$(3) \quad \rightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \quad (M.5)$$

$$(4) \quad \rightarrow b = c \quad (M.4)$$

TEOREMA 10. Para $a \in R - \{0\}$ y $b \in R$, se cumple:

$$a \cdot b = 1 \leftrightarrow b = a^{-1}$$

Demostración. En efecto, como $a \neq 0 \rightarrow$ existe a^{-1}

$$(1) \text{ Luego, si } ab = 1 \leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(1) \quad (I.6)$$

$$(2) \quad \leftrightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 1 \quad (M.3)$$

$$(3) \quad \leftrightarrow 1 \cdot b = a^{-1} \quad (M.5)$$

$$(4) \quad \leftrightarrow b = a^{-1} \quad (M.4)$$

TEOREMA 11. Para cada $a \neq 0$ en R , se cumple: $(a^{-1})^{-1} = a$

Demostración. En efecto, dado que $a \neq 0 \rightarrow (a^{-1})a = 1$

$$\text{y por el Teorema 10: } a = \frac{1}{a^{-1}} = (a^{-1})^{-1} \leftrightarrow (a^{-1})^{-1} = a$$

TEOREMA 12. Si $a, b, x \in R$, con $a \neq 0$, entonces la ecuación $ax=b$ tiene solución única: $x=a^{-1}.b$

Demostración. En efecto: (1) $ax=b \leftrightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(b)$ (I.6)

$$(2) \quad \leftrightarrow (a^{-1}.a)x = a^{-1}.b \quad (M.3)$$

$$(3) \quad \leftrightarrow 1.x = a^{-1}.b \quad (M.5)$$

$$(4) \quad \leftrightarrow x = a^{-1}.b \quad (M.4)$$

Como a^{-1} es único (T.8), se tiene que $a^{-1}.b$ es único, por lo que el valor de x está únicamente determinado por $a^{-1}.b$.

TEOREMA 13. Para $a, b \in R$ se cumple: $(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$, $ab \neq 0$

Demostración. Probaremos que: $(a.b)(a^{-1}.b^{-1}) = 1$

$$\text{En efecto: (1) } (a.b)(a^{-1}.b^{-1}) = (a)(a^{-1})(b)(b^{-1}) \quad (M.3)$$

$$(2) \quad = (a.a^{-1})(b.b^{-1}) \quad (M.3)$$

$$(3) \quad (a.b)(a^{-1}.b^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1 \quad (M.5)$$

$$(4) \text{ Pero por M.5: } (a.b)(a.b)^{-1} = 1$$

$$(5) \text{ De 3 y 4: } (a.b)(a.b)^{-1} = (a.b)(a^{-1}.b^{-1}) \quad (I.4)$$

$$(6) \text{ Por tanto: } (a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1} \quad (T.9)$$

Definición 4.6 Definición de División de números reales

Dado dos números $a, b \in R$. Se define el cociente de a entre b , como el producto de a con el inverso multiplicativo de b . Esto es:

$$\frac{a}{b} = a.b^{-1}, \quad \forall a, b \in R$$

TEOREMA 14. Para los números $a, b, c \in R$, se cumplen las siguientes propiedades.

$$a) \quad a.0 = 0.a = 0, \quad \forall a$$

$$b) \quad (b-c)a = ab - ac, \quad \forall a, b, c$$

$$c) \quad -a = (-1)a, \quad \forall a$$

$$d) \quad a(-b) = -(ab) = (-a)b, \quad \forall a, b$$

$$e) \quad (-a)(-b) = ab, \quad \forall a, b$$

$$f) \quad \text{Si } ab = 0 \leftrightarrow a=0 \quad b=0$$

Demostraciones. a) $a.0 = 0.a = 0$

$$\text{En efecto: (1) } a.0 = a.0 + 0 \quad (A.4)$$

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + [a + (-a)] = (a \cdot 0 + a) + (-a) \quad (\text{A.5 y A.3})$$

$$= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) = a(0 + 1) + (-a) \quad (\text{M.4 y D.1})$$

$$= a \cdot 1 + (-a) = a + (-a) \quad (\text{A.4 y M.4})$$

$$\rightarrow a \cdot 0 = 0 \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto: $a \cdot 0 = 0$ y por M.2: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

$$b) \text{ En efecto: } (b-c)a = a(b-c) \quad (\text{M.2})$$

$$= ab - ac \quad (\text{D.1})$$

$$c) \text{ En efecto: } a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a = [1 + (-1)]a \quad (\text{M.4 y D.2})$$

$$= 0 \cdot a = 0 \quad (\text{A.5 y T.14a})$$

Luego, si $a + (-1)a = 0$, significa que $(-1)a$ es el inverso aditivo de a :

$$\dots -a = (-1)a$$

$$d) \text{ En efecto: i) } a(-b) = a[(-1)b] \quad (\text{T.14c})$$

$$= [(-1)a]b = (-1)ab \quad (\text{M.3 y M.2})$$

$$= -ab \quad (\text{T.14c})$$

$$ii) \text{ Demostraremos que: } a(-b) = (-a)b$$

$$\text{En efecto, de i): } a(-b) = -ab = (-1)(ab) \quad (\text{T.14c})$$

$$= [(-1)a]b = (-a)b \quad (\text{M.3 y T.14c})$$

f) La demostración consta de dos implicaciones:

$$(1) \text{ Si } a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

En efecto, si $a = 0$, el teorema queda demostrado.

$$\text{Si } a \neq 0 \rightarrow \exists a^{-1} | ab = 0 \rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 \quad (\text{I.6})$$

$$\rightarrow (a^{-1} \cdot a)b = 0 \quad (\text{M.3 y T.14a})$$

$$\rightarrow 1 \cdot b = 0 \rightarrow b = 0 \quad (\text{M.5 y M.4})$$

Luego, si $ab = 0$, uno de los factores, por lo menos, es necesariamente cero.

$$(2) \text{ Si } (a = 0 \vee b = 0) \rightarrow ab = 0$$

$$\text{En efecto, si } a = 0 \rightarrow ab = 0$$

$$\text{si } b = 0 \rightarrow ab = 0$$

$$\text{Por lo tanto, de (1) y (2): } a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Nota. Este teorema se usa frecuentemente para resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, cuya aplicación lo veremos más adelante.

TEOREMA 15. Para los números a, b, c y d en R , se cumplen las siguientes propiedades:

$$a) (b/a)a = b, \text{ si } a \neq 0$$

$$b) \frac{a}{b \cdot c} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right), \text{ si } b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

$$c) a=b \text{ y } c=d \rightarrow (ac = bd) \vee \left(\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\right), \text{ si } c \neq 0$$

$$d) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc, \text{ si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

$$e) \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

$$f) \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \text{ si } b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

$$g) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \text{ si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

$$h) \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \text{ si } b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

4.5 APLICACIONES DE R EN EL ÁLGEBRA

Hasta aquí, nuestro objetivo era conocer los axiomas de adición, multiplicación y cociente, y los teoremas sobre propiedades del sistema de números reales. Ahora el énfasis en las aplicaciones de aquellos axiomas y teoremas; esto es, el uso del sistema de los números reales. Trabajaremos nuevamente con elementos del conjunto de los números reales R y supondremos que R es un campo ordenado completo y, por lo tanto, que los axiomas aceptados y teoremas demostrados son válidos. Mostraremos como algunas de las reglas y métodos del Álgebra pueden manejarse a la luz de los axiomas para el sistema de los números reales.

4.5.1 OPERACIONES DE ADICION MULTIPLICACION Y COCIENTE

EJEMPLO 1. Sumar: $9x-5$ y $-4x+2$

Solución. Aplicaremos los axiomas de adición y distribución procediendo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (9x-5) + (-4x+2) &= [9x+(-5)] + (-4x+2) && (\text{Def. 4.3}) \\
 (2) &= 9x + \{(-5)+(-4x+2)\} && (A.3) \\
 (3) &= 9x + \{(-4x)+(-5)\} + 2 && (A.2) \\
 (4) &= [9x + (-4x)] + [(-5)+2] && (A.3) \\
 (5) &= [9+(-4)]x + (-5+2) && (D.2) \\
 (6) &= 5x + (-3) && (\text{Prop. de la suma}) \\
 (7) &= 5x-3
 \end{aligned}$$

Observación. Nuestro propósito es efectuar las operaciones como éstas rápida y fácilmente. El paso (5) indica que la suma se debe realizar sumando coeficientes de términos semejantes.

Por ejemplo sumar: $-2x^3+7x^2-x$ y $4x^3-8x^2+x-6$

Entonces: $(-2x^3+7x^2-x) + (4x^3-8x^2+x-6)$

$$= [(-2)+4]x^3 + [7+(-8)]x^2 + [(-1)+1]x + (-6) \\ = 2x^3 - x^2 - 6$$

EJEMPLO 2. Demostrar que: $a + a = 2a$

Demostración. En efecto: $a + a = 1.a + 1.a$ (M.4)

$$= (1 + 1)a \quad (D.2)$$

$$= 2a \quad (\text{Suma en } \mathbb{N}: 1+1=2)$$

EJEMPLO 3. Demostrar que: $-0 = 0$

Demostración. En efecto:

(1) Supongamos que $a=0$ (Hipótesis Auxiliar)

(2) Pero según A.4: $a + 0 = a$

(3) Entonces: $0 + 0 = 0$ (Hip.Aux.)

(4) También por A.5: $a + (-a) = 0$

(5) Entonces: $0 + (-0) = 0$ (Hip.Aux.)

(6) De 3 y 4: $0 + (-0) = 0 + 0$ (I.4)

(7) Por lo tanto: $-0 = 0$

EJEMPLO 4. Demostrar que: $1 \neq 0$

Demostración. En efecto:

(1) Supongamos que: $1 = 0$ (Hipótesis Auxiliar)

(2) Por I.2 (reflexividad): $a = a$, $\forall a \in R$

(3) $a = a.1$, $\forall a \in R$ (M.4)

(4) $a = a.0$, $\forall a \in R$ (Hip.Aux.)

(5) $a = 0$, $\forall a \in R$ (T.14a)

De aquí se deduce que R es un conjunto unitario formado por el elemento 0. Esto es una contradicción, pues sabemos que R consta de más de un elemento; luego, la hipótesis auxiliar es falsa; en consecuencia: $1 \neq 0$

EJEMPLO 5. Demostrar que: $a-(b-c) = (a-b)+c$

Demostración. En efecto:

$$(1) a-(b-c) = a + [-(b-c)] \quad (\text{Def. 4.3})$$

$$(2) \quad a-(b-c) = a + [(-1)(b-c)] \quad (T.14c)$$

$$(3) \quad = a + [(-1)b - (-1)c] \quad (T.14b)$$

$$(4) \quad = a + [-b - (-c)] \quad (T.14c)$$

$$(5) \quad = a + (-b+[-(-c)]) = a + (-b+c) \quad (\text{Def. 4.3 y T.4})$$

$$(6) \quad = [a + (-b)] + c = (a-b)+c \quad (A.3 \text{ y Def. 4.3})$$

EJEMPLO 6. Para números a, b, c, d en R , demostrar que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1}) \quad (\text{Def. 4.6})$$

$$(2) \quad = (a \cdot c)(b^{-1} \cdot d^{-1}) \quad (M.3 \text{ y } M.2)$$

$$(3) \quad = (a \cdot c)(b \cdot d)^{-1} \quad (T.13)$$

$$(4) \quad = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (\text{Def. 4.6})$$

EJEMPLO 7. Para números a, b, c, d en R , demostrar que:

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a \cdot b^{-1}}{c \cdot d^{-1}} = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1})^{-1} \quad (\text{Def. 4.6})$$

$$(2) \quad = (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) \quad (T.13 \text{ y } T.11)$$

$$(3) \quad = (a \cdot d)(b^{-1} \cdot c^{-1}) \quad (M.3 \text{ y } M.2)$$

$$(4) \quad = (a \cdot d)(b \cdot c)^{-1} \quad (T.13)$$

$$(5) \quad = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (\text{Def. 4.6})$$

EJEMPLO 8. Para números a, b, c, d en R , demostrar que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} \quad (\text{Def. 4.6})$$

$$(2) \quad = (a \cdot b^{-1})(d \cdot d^{-1}) + (c \cdot d^{-1})(b \cdot b^{-1}) \quad (M.4 \text{ y } M.5)$$

$$(3) \quad = (a \cdot d)(b^{-1} \cdot d^{-1}) + (b \cdot c)(b^{-1} \cdot d^{-1}) \quad (M.3 \text{ y } M.2)$$

$$(4) \quad = (a \cdot d + b \cdot c)(b^{-1} \cdot d^{-1}) \quad (D.2)$$

$$(5) \quad = (a \cdot d + b \cdot c)(b \cdot d)^{-1} \quad (T.13)$$

$$(6) \quad = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad (\text{Def. 4.6})$$

EJERCICIOS: Grupo 15

Haciendo uso de los axiomas de la adición y multiplicación de números reales, efectuar las operaciones indicadas, describiendo los pasos dados y escribiendo los resultados en la forma más simple.

1. $(12xy^2 + 3x^2y - 4x^3) + (-10xy^2 - 3x^2y - x^3)$
2. $(x^3 - x^2 + 1) - (x^3 + 2x^2 + 1) + (3x^3 - 3x^2 - 2)$
3. $(2xy + yz + 2xz) - [(-2xy - yz + xz) - (xy + 2yz - xz)]$
4. $5a + 3b - \{5a - b - [2a - 8b - (3a - 4b)] - (2a - b)\}$
5. $(2x + 1)(x - 3)(x + 3)$
6. $5x - x\{2 - x(3x - 2) + [7 - (2 - x)]\}$

Haciendo uso de los axiomas de la adición y multiplicación de números reales, demostrar que:

- | | |
|--|---|
| 7. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ | 12. Si $a \neq 0 \rightarrow (a^{-1} \cdot b)a = b$ |
| 8. Si $a=b$ y $c=d \rightarrow a+c = b+d$ | 13. $3a + 5a = 8a$ |
| 9. Si $a=b$ y $c=d \rightarrow ac = bd$ | 14. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| 10. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{b \cdot d}$, $b \neq 0$ y $d \neq 0$ | 15. Si $d \neq 0 \rightarrow \frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$ |
| 11. Si $b \neq 0$ y $c \neq 0 \rightarrow \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ | 16. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0 \rightarrow (\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ |
| 17. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0 \rightarrow (ab)(a^{-1} + b^{-1}) = a + b$ | |
| 18. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ | |
| 19. Si $b \neq 0$ y $c \neq 0 \rightarrow \frac{a}{b \cdot c} = (\frac{a}{b})(\frac{1}{c}) = (\frac{1}{b})(\frac{a}{c})$ | |
| 20. Si $a=b$ y $c=d \rightarrow (ac = bd) \vee (\frac{a}{c} = \frac{b}{d})$, si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ | |

21. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones lineales:

- | | |
|--|--|
| a) $5x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x - 3)] = 10$ | e) $a^2(x - a) + b^2(x - b) = abx$ |
| b) $x - (3x - \frac{2x-5}{10}) = \frac{1}{6}(2x - 7) - \frac{5}{3}$ | f) $\frac{2}{3}(\frac{x}{a} + 1) = \frac{3}{4}(\frac{x}{a} - 1)$ |
| c) $a - \frac{m+n}{x} = b - \frac{m-n}{x}$, $x \neq 0$ | g) $\frac{a-x}{b} + \frac{b+x}{a} = 2$ |
| d) $\frac{a}{b}(1 - \frac{a}{x}) + \frac{b}{a}(1 - \frac{b}{x}) = 1$ | h) $\frac{m(m-x)}{n} - x = \frac{n(n+x)}{m}$ |



4.5.2 **n POTENCIA DE UN NUMERO REAL**

Definición 4.7 Si $n \in \mathbb{N}$ y $b \in R$, entonces b^n , llamada n -ésima potencia de b , representa el producto de n factores iguales a b , esto es:

$$b^n = b.b.b.\dots.b$$

en donde, el **exponente** n indica las veces que se debe repetir la ba se b como factor.

TEOREMA 16. Si $a, b \in R$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$d) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$b) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$e) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$c) \quad (a.b)^n = a^n \cdot b^n$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned} a) \quad a^m \cdot a^n &= \underbrace{(a.a.a. \dots a)}_{m \text{ factores de } a} \underbrace{(a.a.a. \dots a)}_{n \text{ factores de } a} && (\text{Def. 4.7}) \\ &= \underbrace{a.a.a. \dots a}_{m \text{ factores de } a} \underbrace{a.a.a. \dots a}_{n \text{ factores de } a} && (\text{Asociat. extendida}) \\ &= \underbrace{a.a.a. \dots a}_{(m+n) \text{ factores de } a} && (\text{Unión de conjuntos disjuntos}) \end{aligned}$$

$$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m}_{n \text{ factores de } a^m} && (\text{Def. 4.7}) \\ &= a^{\underbrace{(m+m+\dots+m)}_{n \text{ sumandos de } m}} && (\text{Parte: a)}) \\ &= a^{nm} = a^{mn} && (\text{Mult. de núm. nat. como sumas repetidas}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad (ab)^n &= \underbrace{(ab)(ab) \dots (ab)}_{n \text{ factores de } ab} && (\text{Def. 4.7}) \\ &= \underbrace{(a.a.a. \dots a)}_{n \text{ factores de } a} \underbrace{(b.b.b. \dots b)}_{n \text{ factores de } b} && (\text{Commutatividad}) \\ &= a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

Mediante algunos ejemplos veremos como deben ser manejadas las leyes de los exponentes para simplificar expresiones algebraicas.

EJEMPLO 1. Efectuar: $E = (2x^2)(3xy^2)(x^2y)^2$

$$\begin{aligned}\text{Solución. } E &= (2x^2)(3xy^2)(x^2y^2) && (T.16 \text{ b y c}) \\ &= 6(x^2 \cdot x \cdot x^2)(y^2 \cdot y^2) && (M.2 \text{ y } M.3) \\ &= 6(x^{2+1+2})(y^{2+2}) = 6x^5y^4 && (T.16 \text{ a})\end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Efectuar: $E = \left(\frac{3x^2yz^3}{-2a^2b^3}\right)^2$

$$\begin{aligned}\text{Solución. } E &= \frac{(3x^2yz^3)^2}{(-2a^2b^3)^2} = \frac{3^2(x^2)^2(y)^2(z^3)^2}{(-2)^2(a^2)^2(b^3)^2} && (T.16e \text{ y } T.16c) \\ &= \frac{9x^4y^2z^6}{4a^4b^6}\end{aligned}$$

Nota. $(-x)^2$ debe interpretarse como $(-1 \cdot x)^2$ de modo que al usar el Teorema 16c se tiene: $(-x)^2 = (-1 \cdot x)^2 = (-1)^2(x)^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$

Si no existe el paréntesis, el signo menos no resulta afectado por el exponente. Así por ejemplo $-x^2$ no significa $(-x)^2$.

EJEMPLO 3. Hallar el valor de: $E = \frac{2^{n+m} \cdot 2^{n-m} \cdot 2^{n+3}}{2^{2n+1} \cdot 2^{n-2}}$

$$\begin{aligned}\text{Solución. } E &= \frac{2^{(n+m)+(n-m)+(n+3)}}{2^{(2n+1)+(n-2)}} = \frac{2^{3n+3}}{2^{3n-1}} && (T.16a) \\ &= 2^{(3n+3)-(3n-1)} = 2^4 = 16 && (T.16d)\end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Simplificar: $E = \left(\frac{24 \times 14^3 \times 15^5}{30^2 \times 35^3 \times 6^4}\right)^{10}$

Solución. Al decomponer cada término de E en sus factores primos y usar el T.16c en cada caso, se tiene:

$$\begin{aligned}24 &= 8 \times 3 = 2^3 \times 3 && 30^2 &= (2 \times 3 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \\ 14^3 &= (2 \times 7)^3 = 2^3 \times 7^3 && 35^3 &= (5 \times 7)^3 = 5^3 \times 7^3 \\ 15^5 &= (3 \times 5)^5 = 3^5 \times 5^5 && 6^4 &= (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4\end{aligned}$$

$$E = \left(\frac{2^3 \times 3 \times 2^3 \times 7^3 \times 3^5 \times 5^5}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^3 \times 7^3 \times 2^4 \times 3^4}\right)^{10} = \left(\frac{2^6 \times 3^6 \times 5^5 \times 7^3}{2^6 \times 3^6 \times 5^5 \times 7^3}\right)^{10}$$

de donde: $E = 1$

Nota. Ciertos casos de multiplicación se presentan con tanta frecuencia que vale la pena tomar una regla adecuada que permita efectuar mentalmente por visualización estos productos. Entre los productos o identidades notables podemos citar los siguientes:

$$\text{IN.1: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (\text{Diferencia entre dos cuadrados})$$

$$\text{IN.2: } \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \right\} \quad (\text{El cuadrado de un binomio})$$

$$\text{IN.3: } \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \right\} \quad (\text{El cubo de un binomio})$$

$$\text{IN.4: } (ax + cy)(bx + dy) = abx^2 + (ad + bc)xy + cdy^2$$

(Producto de binomios con términos comunes)

$$\text{IN.5: } (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad (\text{Suma de cubos})$$

$$\text{IN.6: } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (\text{Diferencia de cubos})$$

$$\text{IN.7: } (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \\ (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \end{array}} \right\} \quad (\text{Identidades de Legendre})$$

$$\text{IN.8: } (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

EJEMPLO 5. Suponiendo que $2x=a+b+c$, simplificar la expresión:

$$E = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Solución. } E &= (x^2 - 2ax + a^2) + (x^2 - 2bx + b^2) + (x^2 - 2cx + c^2) + x^2 & (\text{IN.2}) \\ &= (x^2 + x^2 + x^2 + x^2) - (2ax + 2bx + 2cx) + (a^2 + b^2 + c^2) & (\text{A.3}) \\ &= 4x^2 - 2(a+b+c)x + (a^2 + b^2 + c^2) & (\text{D.1 y D.2}) \\ &= 4x^2 - 2(2x)x + (a^2 + b^2 + c^2) & (\text{Dato}) \\ &= 4x^2 - 4x^2 + (a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Simplificar: $E = (x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$

$$\begin{aligned} \text{Solución. } E &= (x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2) & (\text{M.3}) \\ &= (x^3 + a^3)(x^3 - a^3) & (\text{IN.5 y IN.6}) \\ &= (x^3)^2 - (a^3)^2 = x^6 - a^6 & (\text{IN.1 y T.16b}) \end{aligned}$$

EJEMPLO 7. Demostrar que: $(x-y+z)^2 + (x+y-z)^2 = 2x^2 + 2(y-z)^2$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned} (x-y+z)^2 + (x+y-z)^2 &= [x-(y-z)]^2 + [x+(y-z)]^2 & (\text{A.3}) \\ &= 2[x^2 + (y-z)^2] & (\text{IN.7}) \\ &= 2x^2 + 2(y-z)^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. Demostrar que: $(a^2 - b^2 + 2ab)^2 + (a^2 - b^2 - 2ab)^2 = 2(a^2 + b^2)^2$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}(a^2 - b^2 + 2ab)^2 + (a^2 - b^2 - 2ab)^2 &= [(a^2 - b^2) + 2ab]^2 + [(a^2 - b^2) - 2ab]^2 \\&= 2[(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2] \quad (\text{IN.7}) \\&= 2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2) \quad (\text{IN.2}) \\&= 2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) = 2(a^2 + b^2)^2 \quad (\text{IN.2})\end{aligned}$$

EJEMPLO 9. Hallar el valor de $E = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$, para: $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$,

$$y = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \quad z = \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$$

Solución. Efectuando por separado los cuadrados se tiene:

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2}; \quad y^2 = \frac{b^2}{c^2} + 2 + \frac{c^2}{b^2}; \quad z^2 = \frac{c^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{c^2} \\+ x^2 + y^2 + z^2 &= 6 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) \quad (1)\end{aligned}$$

$$\text{De otro lado: } xyz = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

$$\text{de donde: } xyz = 2 + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) \quad (2)$$

Finalmente, restando (1)-(2) obtenemos: $E=4$

EJEMPLO 10. Simplificar: $E = \frac{(x^2 - \frac{1}{y^2})^x \cdot (x - \frac{1}{y})^{y-x}}{(y^2 - \frac{1}{x^2})^y \cdot (y + \frac{1}{x})^{x-y}}$

Solución. $E = \frac{[(x + \frac{1}{y})(x - \frac{1}{y})]^x \cdot (x - \frac{1}{y})^{y-x}}{[(y + \frac{1}{x})(y - \frac{1}{x})]^y \cdot (y + \frac{1}{x})^{x-y}} \quad (\text{IN.1})$

$$+ E = \frac{(x + \frac{1}{y})^x (x - \frac{1}{y})^x \cdot (x - \frac{1}{y})^{y-x}}{(y + \frac{1}{x})^y (y - \frac{1}{x})^y \cdot (y + \frac{1}{x})^{x-y}} = \frac{(x + \frac{1}{y})^x \cdot (x - \frac{1}{y})^y}{(y + \frac{1}{x})^x \cdot (y - \frac{1}{x})^y} \quad (\text{T.16c y T.16a})$$

$$= \frac{(\frac{xy+1}{y})^x}{(\frac{xy+1}{x})^x} \cdot \frac{(\frac{xy-1}{y})^y}{(\frac{xy-1}{x})^y} = \left(\frac{xy+1}{x}\right)^x \left(\frac{xy-1}{x}\right)^y \quad (\text{T.15e y T.16e})$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^x \left(\frac{x}{y}\right)^y = \left(\frac{x}{y}\right)^{x+y} \quad (\text{T.15h y T.16a})$$

EJERCICIOS: Grupo 16

En los ejercicios siguientes, efectuar las operaciones indicadas usando para ello las leyes de los exponentes.

$$1. \frac{(-2xy)^3 (3ab^2)^2 (-ax^2y^3)}{(-3ab^2)^2 (2xy^2)^3}$$

$$6. \frac{7^{n+2} - 35(7^{n-1})}{11(7^n)}$$

$$2. \left(\frac{3^{mn} + n}{3^{mn} + m} \right) \left(\frac{3^{2m}}{3^{2n}} \right)$$

$$7. \frac{5(2^n)}{2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n}$$

$$3. \frac{10^{x+y} \cdot 10^{y-x} \cdot 10^{y+1}}{10^{y+1} \cdot 10^{xy+1}}$$

$$8. \frac{2^{n+4} - 2(2^n)}{2(2^{n+3})}$$

$$4. \left(\frac{12^3 \times 98^2 \times 75^3}{80 \times 45^3 \times 490^2} \right)^3$$

$$9. \frac{1}{1 + x^{m-n}} + \frac{1}{1 + x^{n-m}}$$

$$5. (2^n)(15^{n+1})(6^{2-n})(5^{1-n})$$

$$10. \frac{5 \cdot 3^n - 3 \cdot 3^{n-2}}{3^n - \frac{1}{3}(3^n)}$$

$$11. \text{ Simplificar: } E = \frac{x^{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot \dots \text{ hasta } (n+2)}{x^{n-3} \cdot x^{n-3} \cdot x^{n-3} \cdot \dots \text{ hasta } (n+4)}$$

$$12. \text{ Simplificar: } E = \frac{x^{n+2} \cdot x^{n+2} \cdot \dots \text{ hasta } (n+3) \text{ factores}}{x^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \dots \text{ hasta } (n+1) \text{ factores}}$$

13. En los ejercicios siguientes, efectuar abreviadamente los productos indicados, dando el resultado en su forma más simple.

$$a) (x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$$

$$b) (1 + x^2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + x^2 - 1)(x^4 - 2\sqrt{3} - 4)$$

$$c) (x^3 - 4x^2 + 8x - 8)(x^3 + 4x^2 + 8x + 8)$$

$$14. \text{ Suponiendo que } 2a = p + q + r, \text{ demostrar que: } 4(a-q)(a-r) + (q-r)^2 = p^2$$

$$15. \text{ Demostrar que: } x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

$$16. \text{ Si } x = a + b + \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}, y = \frac{a+b}{4} + \frac{ab}{a+b}, \text{ demostrar que } (x-a)^2 - (y-b)^2 = b^2$$

17. Si $a+b+c=0$, simplificar:

$$E = \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) + \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

18. Si $x=2+\sqrt{2}$, hallar el valor de $E=x^2+x^{-2}$
19. Hallar el valor de:
 $E = (8a^3-x^6)(8a^3+x^6)-(2a+x^2)(2a-x^2)[2a(2a+x^2)+x^6][4a^2-x^2(2a-x^2)]$
20. Si $x-x^{-1}=1$, demostrar que: $x^2+x^{-2}=3$ y que: $x^3-x^{-3}=4$
21. Si $2p=a+b+c$, demostrar que:
 $(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3+3abc = p^3$
22. Si $x+y+z=0$, probar que: $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$
23. Efectuar abreviadamente los productos indicados
 a) $(x+2a)(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)(x^2-2ax+4a^2)$
 b) $(\sqrt{x}+1)(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x^2+x^2+1)$
24. Si $x+y=m$, $x-y=n$, expresar x^3+y^3 en términos de m y n .
25. Demostrar que si: $a^3+b^3=4$ y $a+b=2$, entonces: $(a-b)^2=4/3$.
26. Demostrar que: $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$
27. Demostrar que si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow (ab+cd)^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)$.
28. Para números reales a, b y c , demostrar que:
 $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc \rightarrow a = b = c$
29. Para números reales a, b, c y d , demostrar que si:
 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2 = 4(ab+bc+cd) \rightarrow a=b=c=d$
30. Si $x=a+d$, $y=b+d$, $z=c+d$, demostrar que:
 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy = a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
31. Simplificar: $E = (a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(-a+b+c)^2$.
32. Si $a+b=1$, probar que: $(a^2-b^2)^2=a^3+b^3-ab$.
33. Si $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$, $c=z^2-xy$, probar que: $a^2-bc=x(ax+by+cz)$.
34. Si $xy=ab(a+b)$ y $x^2-xy+y^2=a^3+b^3$, probar que: $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{b} - \frac{y}{a}) = 0$
35. Si $2s=a+b+c$, demostrar que: $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc = s^3$
36. Si $2s=a+b+c$, demostrar que:
 $2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b) = abc$



4.5.3 RAICES Y RADICALES

La operación inversa a la potenciación se denomina radicación (extracción de la raíz); mediante esta operación, si están dadas la potencia (c) y su exponente (n), se busca la base (x) de la potencia. Por ejemplo:

- (1) ¿Qué número real (base) elevado al cuadrado (exponente) da 9 (potencia)?

Se sabe que: $9 = (3)(3) \rightarrow (3)^2 = 9$

pero también: $9 = (-3)(-3) \rightarrow (-3)^2 = 9$

de modo que las bases 3 y -3 son llamadas raíces cuadradas de 9.

- (2) ¿Qué número real elevado al cuadrado da -4?

Vemos que **no existe** tal número real, porque:

$$(-2)(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$\text{y } (2)(2) = (2)^2 = 4$$

En ambos casos la potencia es positiva

- (3) ¿Qué número real al elevarse al cubo da -8?

Se sabe que: $-8 = (-2)(-2)(-2) = (-2)^3 = -8$

Luego, -2 es la única raíz cúbica de -8.

Los ejemplos anteriores nos indican que podemos obtener cero, una o dos raíces n -ésimas de un número real c , dependiendo de que n sea impar o par y de que c (potencia) sea positiva o negativa.

Si designamos $\sqrt[n]{c}$ para representar al número x que al elevarse a la n -ésima potencia da c , tenemos que asegurarnos que si n es par, c no sea negativa.

Definición 4.8 Si $c, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces x se llama **raíz n -ésima principal** de x , se denota $x = \sqrt[n]{c}$, si y sólo si $x^n = c$, bajo la condición de que si n es par, entonces $x > 0$ y $c > 0$.

Formalmente:

$$x = \sqrt[n]{c} \leftrightarrow x^n = c, \text{ } n \text{ par} \rightarrow c > 0, x > 0$$

Una consecuencia de esta definición es que: $(\sqrt[n]{c})^n = c$

Por ejemplo: $(\sqrt[3]{25})^3 = 25$

$$(\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = (2)^2 = 4$$

Hay que tener siempre presente que una raíz principal par es un número positivo.

Por ejemplo: $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, pero como $(-3)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Notamos que si $c < 0 \rightarrow \sqrt{c^2} = -c$, puesto que $-c$ es el número positivo cuyo

cuadrado es $(-c)^2 = c^2$, y si $c \geq 0 \rightarrow \sqrt{c^2} = c$; de modo que:

$$\sqrt{c^2} = |c| = \begin{cases} c, & \text{si } c \geq 0 \\ -c, & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: (1) Si $a \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{25a^2} = |5a|$

(2) Si $a \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{16a^4} = 4a^2$

No es necesario usar las barras de valor absoluto, ya que $4a^2$ es positivo, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definición 4.9 Si $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $c^{1/n} = \sqrt[n]{c}$, con la condición de que si n es par, $c \geq 0$

Ejemplos: (1) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$ (En estos casos se omite el índice 2)

(2) $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

(3) $(-16)^{1/2}$ no está definida en $\mathbb{R}$ puest que $\sqrt{-16}$ no existe.

(4) $(-125)^{1/3} = \sqrt[3]{-125} = -5$

Definición 4.10 Si $c \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$c^{m/n} = (\sqrt[n]{c})^m = \sqrt[n]{c^m}$$

con la condición de que si n es par, c debe ser positivo.

Ejemplos: (1) $(125)^{2/3} = (\sqrt[3]{125})^2 = (5)^2 = 25$

(2) $(-9)^{3/2}$ no está definida porque $(\sqrt{-9})^3$ no existe.

(3) $(-8)^{4/3} = (\sqrt[3]{-8})^4 = (-2)^4 = 16$

Con frecuencia es necesario alterar la forma de una expresión radical para obtener una expresión más simple o más útil. Esto se puede hacer utilizando las definiciones dadas y el siguiente:

TEOREMA 17. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, y ningún radicando es negativo si n es par. Entonces:

$$a) \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{a^n} = |a|, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$a) (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}$$

$$b) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$e) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$c) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ si } b \neq 0$$

Este teorema se puede usar en los siguientes tres tipos de simplificación de radicales:

- I) Simplificación del radicando y de radicales.
- II) Racionalización de denominadores.
- III) Simplificación del índice.

I) SIMPLIFICACION DEL RADICANDO Y DE RADICALES

EJEMPLO 1. Simplificar el radicando de $\sqrt{96}$

Solución. Descomponemos el radicando en dos factores de modo que uno de los factores sea un cuadrado perfecto, esto es:

$$\begin{aligned}\sqrt{96} &= \sqrt{16 \times 6} = (\sqrt{16})(\sqrt{6}) \\ &= 4\sqrt{6}\end{aligned}\quad (\text{T.17b})$$

EJEMPLO 2. Simplificar el radicando de $\sqrt[3]{-81}$

Solución. Aquí, uno de los factores del radicando debe ser un cubo perfecto, es decir:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-81} &= \sqrt[3]{(-27)(3)} = (\sqrt[3]{-27})(\sqrt[3]{3}) \\ &= -3\sqrt[3]{3}\end{aligned}\quad (\text{T.17b})$$

EJEMPLO 3. Cambiar $\sqrt{\frac{11}{20}}$ a una forma que no contenga fracción en el radical.

Solución. En este caso multiplicamos el numerador y denominador del radicando por un número tal que el denominador sea un cuadrado perfecto, esto es:

$$\sqrt{\frac{11}{20}} = \sqrt{\frac{11 \times 5}{20 \times 5}} = \sqrt{\frac{55}{100}} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{55}}{10}\quad (\text{T.17c})$$

EJEMPLO 4. Simplificar: $E = \sqrt{\frac{\frac{m^3}{27} - \frac{m^2n}{3} + mn^2 - n^3}{\frac{m}{3} - n}}$

Solución. Ordenando convenientemente los términos del numerador se tiene:

$$E = \sqrt{\frac{(\frac{m}{3})^3 - 3(\frac{m}{3})^2n + 3(\frac{m}{3})n^2 - n^3}{\frac{m}{3} - n}} = \sqrt{\frac{(\frac{m}{3} - n)^3}{\frac{m}{3} - n}}\quad (\text{IN.3})$$

$$= \sqrt{(\frac{m}{3} - n)^2} = |\frac{m}{3} - n|\quad (\text{T.17a})$$

EJEMPLO 5. Hallar el valor de $E = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty}}}$

Solución. Elevando al cuadrado: $E^2 = 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \infty}}$
de donde: $E^2 = 12 + E \rightarrow E^2 - E - 12 = 0 \rightarrow E = 4 \vee E = -3$

Dado que $E > 0 \rightarrow E = 4$

EJEMPLO 6. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, todos positivos, simplificar:

$$E = \sqrt{x+y+z} \sqrt{z(2x+2y+z)} - \sqrt{x+y+z} \sqrt{z(2x+2y+z)}$$

Solución. Sean: $A = x+y+z$, $B = \sqrt{z(2x+2y+z)}$ $\rightarrow E = \sqrt{A+B} - \sqrt{A-B}$

Elevando al cuadrado: $E^2 = (A+B) - 2\sqrt{(A+B)(A-B)} + (A-B)$

de donde: $E^2 = 2A - 2\sqrt{A^2 - B^2} = 2(x+y+z) - 2\sqrt{(x+y)^2} = 2(x+y+z) - 2|x+y|$ (T.17a)

Pero como x e y son positivos, entonces: $|x+y| = x+y$

Luego, $E^2 = 2z \rightarrow E = \sqrt{2z}$

Nota. Dos o varios radicales se denominan **semejantes** si se diferencian sólo por los coeficientes, pues tienen idénticos radicandos e iguales índices del radical o no difieren en nada. Por ejemplo, son semejantes:

$$3\sqrt{2} \text{ y } -5\sqrt{2}; a\sqrt{ab} \text{ y } c\sqrt{ab}$$

La suma y resta de radicales semejantes se efectúa del mismo modo que la suma y resta de números racionales semejantes.

EJEMPLO 7. Simplificar: $E = \sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{75} + 3\sqrt{108}$

Solución. $E = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{9 \times 3} - 3\sqrt{16 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{36 \times 3}$
 $\rightarrow E = 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

Los ejemplos que siguen señalan otras técnicas para operar con radicales, especialmente haciendo uso de las identidades notables.

EJEMPLO 8. Efectuar y simplificar: $E = (1 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2})$

Solución. Ordenando convenientemente se tiene:

$$E = [(1 + \sqrt{6}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2})][(1 + \sqrt{6}) - (\sqrt{3} + \sqrt{2})] = (1 + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \quad (\text{IN.1})$$

$$\rightarrow E = (1 + 2\sqrt{6} + 6) - (3 + 2\sqrt{6} + 2) = 2 \quad (\text{IN.2})$$

EJEMPLO 9. Si $a = {}^3\sqrt{56} \cdot {}^3\sqrt{189} \cdot {}^3\sqrt{448}$ y $b = {}^3\sqrt{108 + 10} - {}^3\sqrt{108 - 10}$, hallar $a+b$.

Solución. $a = {}^3\sqrt{8 \times 7} \cdot {}^3\sqrt{27 \times 7} \cdot {}^3\sqrt{64 \times 7} = (2 \cdot {}^3\sqrt{7})(3 \cdot {}^3\sqrt{7})(4 \cdot {}^3\sqrt{7}) = 168$

En b , supongamos que: $m = {}^3\sqrt{108+10}$ y $n = {}^3\sqrt{108-10} \rightarrow b = m - n$

Elevando al cubo: $b^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 = m^3 - n^3 - 3mn(m-n) = m^3 - n^3 - 3mn b$

$$\rightarrow b^3 = (\sqrt{108}+10) - (\sqrt{108}-10) - 3 \cdot \sqrt{(\sqrt{108}+10)(\sqrt{108}-10)} \cdot b = 20 - 3(\sqrt{108-100})b$$

$$\rightarrow b^3 = 20 - 6b \rightarrow (b-2)(b^2+2b+10)=0, \text{ de donde: } b=2$$

Por lo tanto: $a+b=168+2=170$

EJEMPLO 10. Simplificar: $E = \frac{a^3 - b^3}{\sqrt{5}}$, si $a = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ y $b = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$

Solución. $a-b = \sqrt{5} \rightarrow E = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{\sqrt{5}} = a^2+ab+b^2$

Entonces: $E = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1}{4}[(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2] + \frac{1}{4}(1-5)$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4}[(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2] - 1 = \frac{1}{4}[2(1+5)] - 1 = 2$$

EJERCICIOS: Grupo 17

En los siguientes ejercicios, efectuar las operaciones indicadas. Simplificar cada respuesta utilizando las definiciones y teoremas usados en esta sección.

1. $7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800}$ 3. $10\sqrt{36/5} - 12\sqrt{16/3} - \frac{8}{3}\sqrt{45/4} + 9\sqrt{25/3}$

2. $\frac{2}{3}(\sqrt[3]{135}) + \frac{1}{2}(\sqrt[3]{1/32}) + \frac{7}{4}(\sqrt[3]{1/4})$ 4. $3\sqrt{\frac{1}{27}} - \frac{5}{6}\sqrt{27} - \frac{1}{10}\sqrt{75} + 11\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

5. $(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - (a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + (2a-2b)\sqrt{\frac{1}{a-b}}$

6. $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{ab^2}{4}} + 3b\sqrt{\frac{1}{4a}} - \frac{1}{a}\sqrt{ab^2}$

7. $21\sqrt{2/3} - 5\sqrt{4/5} + 6\sqrt{25/6} - 10\sqrt{16/5} + \frac{40}{3}\sqrt{45/4}$

8. $\frac{a+b}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}})(\sqrt{20} - \sqrt{12})(a-b)$

9. $(3 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2})(3 - \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2})$

10. Si $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ y $b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, hallar: $E = a^3 - b^3 + a^2 + b^2$.

11. Si $a = (\frac{2}{3}\sqrt[3]{135})(\sqrt[3]{80})(\sqrt[3]{320})$ y $b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, hallar: $a-b$.



II. RACIONALIZACION DE DENOMINADORES

Se denomina racionalización a la operación por la cual se transforma el denominador irracional de una fracción a otra racional equivalente.

Los ejemplos que siguen señalan las técnicas de los diferentes casos que se presentan para racionalizar denominadores

EJEMPLO 1. Racionalizar el denominador de $E = \frac{7-2\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$

Solución. Cuando se trata de racionalizar denominadores irracionales que tienen la forma: $a \pm \sqrt{b} \vee \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, se multiplica numerador y denominador de la fracción por el factor racionalizante: $a \mp \sqrt{b} \vee \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$, llamado **conjugado** del denominador. Con esto se logra una diferencia de cuadrados que permite eliminar el radical del denominador. Esto es:

$$E = \frac{(7-2\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} = \frac{21-7\sqrt{6}-6\sqrt{6}+2(\sqrt{6})}{(3)^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{33-13\sqrt{6}}{3}$$

EJEMPLO 2. Racionalizar el denominador de: $E = \frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-a^2}}$

$$\begin{aligned} \text{Solución. } E &= \frac{(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2})(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2})}{(\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-a^2})(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2})} = \frac{(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2})^2}{(\sqrt{1+a^2})^2 - (\sqrt{1-a^2})^2} \\ &= \frac{1 + a^2 - 2\sqrt{(1+a^2)(1-a^2)} + 1 - a^2}{(1+a^2) - (1-a^2)} = \frac{1 - \sqrt{1-a^4}}{a^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Racionalizar el denominador de: $E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

Solución. En estos casos se agrupa los términos del denominador dándole la forma de un binomio.

$$\begin{aligned} + E &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}]} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Racionalizar el denominador de $E = \frac{3}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$

Solución. Para racionalizar denominadores que tienen la forma: $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ se utilizan las identidades:

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$$

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

donde: $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ son los factores racionalizantes.

$$\text{Entonces: } E = \frac{3(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{(5)(2)} + \sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{(5)(2)} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{3(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{5 - 2}$$

$$\text{De donde: } E = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$$

EJERCICIOS: Grupo 18

En los ejercicios siguientes, racionalizar cada uno de los denominadores o efectuar las operaciones indicadas suponiendo que todas las variables y radicandos son positivos.

$$1. \frac{2\sqrt{3} + 7\sqrt{2}}{5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}$$

$$2. \frac{1}{(3-\sqrt{5})^2(2+\sqrt{5})}$$

$$3. \frac{(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{3\sqrt{3}-5}$$

$$4. \left(\frac{8-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \right) \div \left(\frac{3\sqrt{5}-7}{5+\sqrt{7}} \right)$$

$$5. \frac{7+3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}} + \frac{7-3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}$$

$$6. \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}, a > x > 0$$

$$7. \frac{\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{125}}{\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{180}}$$

$$8. \frac{2\sqrt{a+b} + 3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}$$

$$9. \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} - \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

$$10. \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{75}-\sqrt{45}+\sqrt{12}}$$

$$11. \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{45}+9)}{(5-2\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$12. \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$13. \frac{(\sqrt{3}+5)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$14. \frac{11}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$15. \frac{1}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$$

$$16. \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{\sqrt[3]{3} + 1}$$

$$17. \frac{5}{2 - \sqrt[3]{3}}$$

$$18. \frac{5-\sqrt{5}}{(7+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}$$

$$19. \left(\frac{7\sqrt{5}+15}{\sqrt{5}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{5}-2}{3+\sqrt{5}} \right)$$

$$20. \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \right) \div \left(\frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right)$$

21. Simplificar:

$$a) \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x-1}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$$

22. Si $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ y $b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, hallar el valor de $E = \frac{a^3-b^3}{\sqrt{5}-2}$

23. Efectuar: $E = \frac{1}{3+\sqrt{3}} + 3 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}-3}$

24. Simplificar: $E = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab}} - \frac{b - \sqrt[3]{b} - a + \sqrt[3]{a}}{a - b}$

25. Simplificar: $E = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$

26. Hallar el valor de: $E = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$, para $x = \frac{2b}{b^2+1}$

27. Simplificar: $E = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$

28. Si $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; hallar el valor de $E = 3x^2 - 5xy + 3y^2$.

29. Hallar el valor de $E = x^2 + 4x^{-2}$, cuando $x = 2 + \sqrt{2}$.

III. SIMPLIFICACION DEL INDICE

La simplificación del índice de una raíz se efectúa haciendo uso, además del teorema 17 y de la definición 4.10, de la homogenización de radicales.

La homogenización de radicales es una operación mediante la cual se transforma radicales de distinto índice a radicales homogéneos (igual índice), y que consiste en hallar el mínimo común múltiplo de los índices (común índice), luego dividir entre cada índice original de las raíces y el resultado multiplicar por el exponente correspondiente a cada radicando.

EJEMPLO 1. Homogenizar los radicales: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{x^3}$

Solución. m.c.m(2,3,4)=12. Dividimos el común índice 12 entre cada índice de los radicales: $12:2=6$, $12:3=4$, $12:4=3$. Estos resultados se multiplican por los exponentes correspondientes a cada radicando:

$$6 \times 1 = 6, \quad 4 \times 2 = 8, \quad 3 \times 3 = 9$$

Luego, los radicales homogéneos son: $^{12}\sqrt{x^8}$, $^{12}\sqrt{x^8}$, $^{12}\sqrt{x^9}$

EJEMPLO 2. Simplificar el índice de: $E = \sqrt[6]{625a^2x^4y^6}$

Solución. $E = \sqrt[6]{15^2a^2x^4y^6} = \sqrt[6]{(15ax^2y^3)^2} = \sqrt[3]{15ax^2y^3}$

EJEMPLO 3. Simplificar y racionalizar: $E = \frac{\sqrt{ax^2y^3}}{\sqrt[3]{a^3xy^2}}$

Solución. Homogenizando los radicales se tiene: m.c.m.(2,3)=6

$$\begin{aligned} \rightarrow E &= \frac{\sqrt[6]{a^3x^6y^3}}{\sqrt[6]{a^3x^2y^4}} = \sqrt[6]{\frac{a^3x^6y^3}{a^3x^2y^4}} = \sqrt[6]{\frac{x^4y^3}{a^5}} = \sqrt[6]{\frac{ax^4y^3}{a^5}} \\ E &= \frac{\sqrt[6]{ax^4y^3}}{a} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Simplificar: $E = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

Solución. La expresión dada se puede escribir como una sucesión de productos indicados de la siguiente manera:

$$E = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \quad (\text{T.17e})$$

Homogenizando los radicales: m.c.m.(3,9,27)=27

$$\rightarrow E = \sqrt[27]{x^{18}} \cdot \sqrt[27]{x^6} \cdot \sqrt[27]{x^2} = \sqrt[27]{x^{18} \cdot x^6 \cdot x^2} = \sqrt[27]{x^{26}} \quad (\text{T.17a y T.16a})$$

EJEMPLO 5. Simplificar: $E = 3x \sqrt[5]{\frac{1}{(3x)^3}} \sqrt[3]{\frac{1}{(3x)^5}} \sqrt[3]{\frac{1}{(3x)^7}} \sqrt[5]{\frac{1}{(3x)^3}}$

Solución. Siguiendo el procedimiento de ejemplo anterior se tiene:

$$E = (3x)^5 \sqrt[5]{(3x)^{-3}} \cdot \sqrt[3]{(3x)^{-5}} \cdot \sqrt[3]{(3x)^{-7}} \cdot \sqrt[5]{(3x)^{-3}}$$

Común índice: m.c.m.(5,20,6,120) = 120

$$\begin{aligned} \rightarrow E &= (3x)^{120} \sqrt[120]{(3x)^{-72}} \cdot \sqrt[120]{(3x)^{-100}} \cdot \sqrt[120]{(3x)^{-140}} \cdot \sqrt[120]{(3x)^{-36}} \\ &= (3x)^{120} \sqrt[120]{(3x)^{-252}} = (3x)^{120} \sqrt[120]{(3x)^{-252}} = (3x)(3x)^{-252/120} \\ &= (3x)^{-1/20} = \sqrt[20]{\frac{1}{3x}} \end{aligned}$$

EJERCICIOS: Grupo 19

En los ejercicios siguientes, efectuar y simplificar las operaciones indicadas, suponiendo que todas las variables y radicandos son positivos.

1. $\sqrt[3]{256a^3m^3n^3}$

2. $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt{x^3 \cdot \sqrt{x^2}}}$

3. $\frac{\sqrt{xy^2}}{\sqrt[3]{x^2y}}$

4. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$

5. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} \dots = \text{radicales}$

6. $\frac{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[1/2]{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x}}$

7. $\sqrt[2]{a} \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{24} \sqrt[6]{a} \sqrt[2]{12} \sqrt[2]{a} \sqrt[2]{12}$

8. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a^2} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a^3} \dots \sqrt[n]{a^{n+1}}$

9. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \dots = \text{radicales}$

10. Dadas las siguientes afirmaciones:

$$p: 2 \cdot \sqrt[3]{7} + 3 \cdot \sqrt[3]{7} - 3 \cdot \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7}$$

$$q: (\sqrt[3]{16a^3})^3 = (2a)^{3/2}; \quad r: \frac{\sqrt{1+x} + (1+x)^{-1/2}}{1 + (1-x^2)^{-1/2}} = \sqrt{1+x}$$

Hallar el valor de verdad de la proposición:

$$\sim(p \vee q) \wedge [(r \rightarrow p) \vee q]$$

11. Sean las afirmaciones, $p: \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \cdot \sqrt{a}$

$$q: \frac{\sqrt{xy^2}}{\sqrt[3]{x^2y}} = \frac{\sqrt{x^3y^3}}{x}; \quad r: \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{6} - 5$$

Hallar el valor de verdad de la proposición:

$$[(p \vee q) \wedge r \rightarrow \sim p] \vee [(p \vee \sim q) \wedge (r \vee q)]$$

12. Sean las afirmaciones; $p: \sqrt[3]{\sqrt[3]{(a^2bc^3)^2}} = c \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

$$q: \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1; \quad r: \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x+y}$$

Hallar el valor de verdad de la proposición:

$$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow [(\sim r \wedge p) \rightarrow \sim(q \vee \sim r)]$$

13. Simplificar: $E = (a^{-2/3} - b^{-2/3})ab(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^{-1} + \sqrt[3]{ab^2}$, $a \neq b$

14. Simplificar: $E = [(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-1} + 3 \cdot \sqrt[3]{xy}]^{1/2}$, $x > 0$, $y > 0$



4.5.4 ECUACIONES CUADRATICAS

Definición 4.11 Sean a, b y c constantes reales y $a \neq 0$, entonces la función f , definida por la ecuación de 2do grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

se llama función cuadrática.

En secciones posteriores demostraremos que la gráfica de una función cuadrática es una curva abierta llamada parábola.

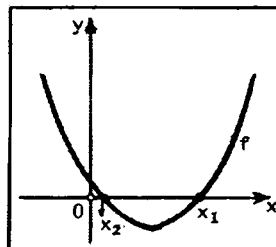


Figura 1

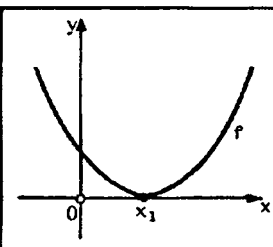


Figura 2

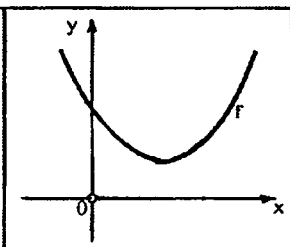


Figura 3

De acuerdo a lo que se observa en las gráficas, podemos afirmar que ésta *in*tersecta dos veces, una o ninguna al eje de las X, lo cual significa que la función cuadrática posee dos raíces reales (Fig.1), una raíz real (Fig.2) o ninguna raíz real (Fig.3). Es decir, los ceros o raíces de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ son las soluciones de la ecuación:

$$f(x) = 0 \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

la cual es llamada **ecuación cuadrática**.

Los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas son tres:

- Método de Factorización
- Método de Completar Cuadrados
- Por medio de la fórmula.

a) Método de Factorización. Este método se basa en la aplicación del Teorema 14.f: $ab=0 \leftrightarrow a=0 \vee b=0$

EJEMPLO 1. Resolver: $3x^2 - 5x - 12 = 0$

Solución. Por factorización: $3x^2 - 5x - 12 = (3x+4)(x-3)$

$$\rightarrow \{x | 3x^2 - 5x - 12 = 0\} = \{x | (3x+4)(x-3) = 0\} = \{x | 3x+4=0 \vee x-3=0\}$$

$$+ \{x|3x^2-5x-12=0\} = \{x|x=-4/3 \vee x=3\} + S = \{-4/3, 3\}$$

b) **Método de Completar Cuadrados.** Este método se basa en la aplicación de la propiedad:

$$a^2 = b \leftrightarrow a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b}$$

EJEMPLO 2. Resolver: $x^2+x-20=0$

Solución. Podemos completar el cuadrado pasando el término independiente al segundo miembro, luego sumar a cada extremo, la mitad del coeficiente de x elevado al cuadrado, esto es:

$$\begin{aligned} x^2+x &= 20 \leftrightarrow x^2+x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \\ + \{x|x^2+x-20=0\} &= \{x|x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \vee x + \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}\} = \{x|x=4 \vee x=-5\} \\ \therefore S &= \{-5, 4\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver: $2x^2-11x=21$

Solución. Antes de completar el cuadrado en el primer miembro, dividimos ambos extremos de la ecuación por el coeficiente de x^2 , esto es:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{11}{2}x &= \frac{21}{2} + x^2 - \frac{11}{2}x + \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{21}{2} + \left(\frac{11}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{289}{16} \\ + \{x|2x^2-11x=21\} &= \{x|x - \frac{11}{4} = \frac{17}{4} \vee x - \frac{11}{4} = -\frac{17}{4}\} = \{x|x=7 \vee x=-3/2\} \\ \therefore S &= \{-2/3, 1\} \end{aligned}$$

c) **Por medio de la Fórmula General.** Para llegar a la fórmula que nos permita resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, utilizaremos el método de completar el cuadrado a la ecuación, esto es:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (1)$$

Luego, si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

i) La ecuación (1) tiene dos soluciones reales y distintas cuando $b^2-4ac > 0$

$$\text{a saber: } \{x \in \mathbb{R} | ax^2+bx+c=0\} = \left\{ -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right\}$$

ii) La ecuación (1) tiene una solución real cuando $b^2-4ac=0$, es decir:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c=0\} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

iii) La ecuación (1) no tiene soluciones reales cuando $b^2-4ac<0$, es decir:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c=0\} = \emptyset$$

EJEMPLO 4. Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones siguientes:

a) $3x^2-2x-1=0$

b) $2x^2-5x+4=0$

c) $9x^2+12x+4=0$

Solución. a) $3x^2-2x-1=0$. Aquí: $a=3$, $b=-2$, $c=-1$

$$\rightarrow b^2-4ac = (-2)^2-4(3)(-1) = 16 > 0$$

$\therefore$ La ecuación admite dos soluciones reales diferentes.

b) $2x^2-5x+4=0$; $a=2$, $b=-5$, $c=4$

$$\rightarrow b^2-4ac = (-5)^2-4(2)(4) = -7 < 0$$

$\therefore$ La ecuación no admite soluciones reales.

c) $9x^2+12x+4=0$; $a=9$, $b=12$, $c=4 \rightarrow b^2-4ac = (12)^2-4(9)(4) = 0$

$\therefore$ La ecuación admite una solución real.

Considerando lo expuesto en c), podemos enunciar la siguiente:

Definición 4.12 Dada la ecuación $ax^2+bx+c=0$, el número $\Delta=b^2-4ac$ se llama discriminante de dicha ecuación. Entonces:

- i) Si $\Delta > 0$, la ecuación admite dos soluciones reales y diferentes.
- ii) Si $\Delta = 0$, la ecuación admite dos raíces iguales (raíz única).
- iii) Si $\Delta < 0$, la ecuación no admite raíces reales.

Como una ecuación cuadrática admite soluciones en $\mathbb{R}$, se establecen relaciones entre sus raíces y coeficientes de la misma. Para esto consideremos el siguiente teorema:

TEOREMA 18. Si la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$, admite soluciones r y s en $\mathbb{R}$, se cumplen:

a) $S = r+s = -\frac{b}{a}$

b) $P = r \cdot s = \frac{c}{a}$

c) $D = |r-s| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

La demostración del teorema queda como ejercicio.

Observación. Si la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, se escribe: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ de modo tal que el coeficiente de x^2 sea la unidad, entonces:

la suma de las raíces es igual al coeficiente de x con signo diferente y el producto de las raíces es igual al término constante. Luego, la ecuación:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (2)$$

resulta de mucha utilidad para formar ecuaciones cuadráticas cuando son dadas sus raíces.

Por ejemplo, hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son: $r=2+\sqrt{3}$, $s=2-\sqrt{3}$
Como $S=r+s=4$ y $P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$, entonces, según (2), la ecuación buscada es: $x^2-4x+1=0$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2-px+q=0$, hallar:
a) r^2+s^2 ; b) r^3+s^3 .

Solución. Por el Teorema 18: $r+s=p$ y $r.s=q$

$$\text{Entonces: a) } r^2+s^2=(r+s)^2-2r.s = p^2-2q$$

$$\text{b) } r^3+s^3 = (r+s)^3-3rs(r+s) = p^3-3q(p) = p(p^2-3q)$$

EJERCICIO 2. Si a y b son las raíces de la ecuación $x^2+mx+2m^2=0$, hallar el valor de $E=a^3b^2+a^2b^3$.

Solución. De la ecuación: $a+b=-m$ y $a.b=2m^2$ (T.18)

$$+ E = a^3b^2(a^2+b^2) = a^3b^2[(a+b)^2-2ab] = (2m^2)^3[(-m)^2-2(2m^2)]$$

$$+ E = 32m^6(-3m^2) = -96m^8$$

EJERCICIO 3. Sean r y s las raíces de la ecuación $(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$. Si

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{10}{7}, \text{ hallar el valor de } |r-s|.$$

Solución. De la ecuación: $r+s = \frac{2m}{m-2}$ y $r.s = \frac{2m-3}{m-2}$ (T.18)

$$\text{Si } \frac{r+s}{r.s} = \frac{10}{7} \rightarrow \left(\frac{2m}{m-2}\right)\left(\frac{m-2}{2m-3}\right) = \frac{10}{7}, \text{ de donde: } m=5$$

$$+ |r-s| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{\sqrt{4m^2-4(m-2)(2m-3)}}{m-2}. \text{ Para } m=5 \text{ obtenemos: } |r-s| = \frac{4}{3}$$

EJERCICIO 4. Si r y s son soluciones de la ecuación $x^2+bx+c=0$ y si $r-s=2$ y $r^3-s^3=26$, hallar $|c/b|$.

Solución. Por el teorema 18: $r+s=-b$, $r.s=c$ y $|r-s| = \sqrt{b^2-4c}$

Si $r-s=2 \rightarrow \sqrt{b^2-4c} = 2$, de donde: $b^2=4+4c$ (1)

$$r^3-s^3=(r-s)(r^2+rs+s^2) \rightarrow (r-s)[(r+s)^2-rs] = 26$$

Sustituyendo valores: $(2)[(-b)^2-c]=26 \rightarrow [(4+4c)-c]=13 \rightarrow c=3$

Luego, en (1): $b^2=4+12=16 \rightarrow |b|=4$. Por tanto: $|\frac{c}{b}| = \frac{3}{4}$

EJERCICIO 5. Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ una función cuadrática. Si los puntos: $(-2,3)$, $(0,1)$ y $(1,6)$ están en la gráfica de f y si r y s son las raíces de f , hallar el valor de r^2+s^2 .

Solución. Si $(-2,3) \in f \rightarrow a(-2)^2+b(-2)+c = 3 \rightarrow 4a-2b+c=3$ (1)

$(0,1) \in f \rightarrow a(0)^2+b(0)+c=1 \rightarrow c=1$ (2)

$(1,6) \in f \rightarrow a(1)^2+b(1)+c = 6 \rightarrow a+b+c=6$ (3)

De (1), (2) y (3) obtenemos: $a=2$, $b=3$, $c=1 \rightarrow f(x)=2x^2+3x+1$

Si r y s son raíces de $f \rightarrow r+s=-3/2$ y $rs=1/2$

Luego, $r^2+s^2 = (r+s)^2-2rs = (-\frac{3}{2})^2-2(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$

EJERCICIO 6. Si r y s son las raíces reales de la ecuación $x^2+x-1=0$ y la función cuadrática $f(x)=x^2+ax+b$ interseca al eje X en los puntos de abscisas: $r - \frac{1}{s}$ y $s - \frac{1}{r}$. Hallar ab .

Solución. Si $x^2+x-1=0 \rightarrow r+s=-1$ y $rs=-1$ (T.18)

$$f(r - \frac{1}{s})=0 \rightarrow (r - \frac{1}{s})^2 + a(r - \frac{1}{s}) + b=0 \rightarrow (\frac{rs-1}{s})^2 + a(\frac{rs-1}{s}) + b = 0$$

$$\rightarrow (\frac{-1-1}{s})^2 + a(\frac{-1-1}{s}) + b = 0, \text{ de donde: } 4-2as+bs^2 = 0 \quad (1)$$

$$f(s - \frac{1}{r}) = 0 \rightarrow (s - \frac{1}{r})^2 + a(s - \frac{1}{r}) + b = 0 \rightarrow (\frac{rs-1}{r})^2 + a(\frac{rs-1}{r}) + b = 0$$

$$+ (\frac{-1-1}{r})^2 + a(\frac{-1-1}{r}) + b = 0, \text{ de donde: } 4-2ar+br^2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Restando (1)-(2): } 2a(r-s)+b(s^2-r^2)=0 \rightarrow 2a(r-s)-b(r-s)(r+s)=0$$

$$+ 2a-b(-1)=0 \rightarrow b=-2a \quad (3)$$

$$\text{Sumando (1)+(2): } 8-2a(r+s)+(r^2+s^2) \rightarrow 8-2a(-1)+b[(r+s)^2-2rs]=0$$

$$+ 8+2a+b[1+2]=0 \rightarrow 8+2a+3b=0 \quad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos: $a=2$ y $b=-4 \rightarrow ab=-8$

EJERCICIO 7. Formar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean la suma y producto, respectivamente, de las raíces de la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0, a \neq 0$$

Solución. Sean r y s las raíces de $ax^2+bx+c=0 \rightarrow r+s = -\frac{b}{a}$, $rs = \frac{c}{a}$

Si S y P son la suma y el producto de las raíces de la ecuación buscada, entonces: $S = (r+s)+rs = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -\frac{b-c}{a}$; $P = (r+s)(rs) = (-\frac{b}{a})(\frac{c}{a}) = -\frac{bc}{a^2}$

Luego, si $x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2 + \frac{b-a}{a}x - \frac{bc}{a^2} = 0 \rightarrow a^2x^2+a(b-c)x-bc=0$

EJERCICIO 8. Sean r y s las raíces de la ecuación $x^2-2x+c=0$ y sean p y q los valores que toma la función $f(x)=x^2+cx+c^2$, cuando se reemplaza x por r y s respectivamente. Usando propiedades de raíces, demostrar que: $\frac{p}{r^3} + \frac{q}{s^3} = \frac{14-8c}{c}$

Demostración. En efecto, si $x^2-2x+c=0 \rightarrow r+s=2$ y $rs=c$ (T.18)

$$p=f(r) \rightarrow p=r^2+cr+c^2 ; q=f(s) \rightarrow q=s^2+cs+c^2$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } \frac{p}{r^3} + \frac{q}{s^3} &= \frac{r^2+cr+c^2}{r^3} + \frac{s^2+cs+c^2}{s^3} = \frac{r^2s^3+crs^3+c^2s^3+r^3s^2+csr^3+c^2r^3}{r^3s^3} \\ &= \frac{r^2s^2(r+s) + c^2(r^3+s^3) + crs(r^2+s^2)}{r^3s^3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Pero: } r^2+s^2=(r+s)^2-2rs = (2)^2-2c = 4-2c$$

$$r^3+s^3 = (r+s)^3-3rs(r+s) = (2)^3-3c(2) = 8-6c$$

$$\text{Luego, en (1): } \frac{p}{r^3} + \frac{q}{s^3} = \frac{c^2(2)+c^2(8-6c)+c^2(4-2c)}{c^3} = \frac{14-8c}{c}$$

EJERCICIO 9. Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2-4x+1=0$, hallar la ecuación cuyas raíces sean: $r^2 + \frac{1}{r}$ y $s^2 + \frac{1}{s}$

Solución. De la ecuación dada: $r+s=4$ y $rs=1$ (T.18)

La suma y producto de las raíces de la ecuación buscada son:

$$S = r^2 + \frac{1}{r} + s^2 + \frac{1}{s} = (r^2+s^2) + \left(\frac{r+s}{rs}\right) = [(r+s)^2-2rs] + \left(\frac{r+s}{rs}\right) = [16-2]+4 = 18$$

$$P = (r^2 + \frac{1}{r})(s^2 + \frac{1}{s}) = r^2s^2 + \frac{r^3+s^3}{rs} + \frac{1}{rs} = r^2s^2 + \frac{(r+s)^3-3rs(r+s)}{rs} + \frac{1}{rs}$$

$$\rightarrow P = (1)^2 + \frac{(4)^3-3(1)(4)}{1} + 1 = 54$$

Luego, si $x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-18x+54=0$, es la ecuación buscada.

EJERCICIO 10. Hallar la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $(2k+2)x^2+(4-4k)x+k-2=0$, sabiendo que una de las raíces es la inversa de la otra.

Solución. Sean r y $1/r$ las raíces de la ecuación dada. Luego, el producto

$P=r(1/r)=1 \rightarrow \frac{k-2}{2k+2} = 1$, de donde: $k=-4$, sustituyendo en la ecuación dada se tiene: $3x^2-10x+3=0 \leftrightarrow (x-3)(3x-1)=0 \leftrightarrow x=3 \vee x=1/3$
Entonces: $S = (3)^2 + (1/3)^2 = 82/9$

EJERCICIO 11. Dada la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, los coeficientes a , b y c forman una progresión aritmética. Si r y s son las raíces de la ecuación, se cumplen: $a+b+c=3(r+s)$ y $b+7=rs$. Hallar abc .

Solución. Si $a+b+c = 3(r+s) \rightarrow a+b+c = 3(-b/a)$ (1)

$$b+7 = rs \rightarrow b+7 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

Si a, b y c son tres números en P.A. $\rightarrow b = \frac{a+c}{2} \rightarrow a+c=2b$ (3)

Sustituyendo (3) en (1): $b+2b = 3(-b/a)$, de donde: $a=-1$

Luego, en (2) y (3): $c=-b-7$ y $c=2b+1 \rightarrow b=-8/3$ y $c=-13/3$

$$\therefore abc = (-1)(-8/3)(-13/3) = -\frac{104}{9}$$

EJERCICIO 12. Dada la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, $a=0$, con raíces r y s , hallar, sin resolver la ecuación, la ecuación cuyas raíces son: r^3 y s^3 .

Solución. Si $ax^2+bx+c=0 \rightarrow r+s = -b/a$, $rs = c/a$

La suma y el producto de las raíces de la ecuación por determinar son: $S = r^3+s^3 = (r+s)^3-3rs(r+s) = -\frac{b^3}{a^3} - 3(\frac{c}{a})(-\frac{b}{a}) = -\frac{b^3-3abc}{a^3}$

$$P = r^3s^3 = (\frac{c}{a})^3$$

Luego, si $x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2 + \frac{b^3-3abc}{a^3}x + \frac{c^3}{a^3}$

$$\rightarrow a^3x^2 + (b^3-3abc)x + c^3 = 0, \text{ es la ecuación buscada}$$

EJERCICIO 13. Si r y s son las raíces de la ecuación $ax^2+bx-a=0$, probar que $(ar+b)(as+b)=-a^2$ y hallar la ecuación cuyas raíces son $ar+b$ y $as+b$.

Solución. Si $ax^2+bx-a=0 \rightarrow r+s=-b/a$ y $rs=-1$ (T.18)

$$rs=-1 \rightarrow s = -\frac{1}{r} \rightarrow r - \frac{1}{r} = -\frac{b}{a} \leftrightarrow r(ar+b) = a \quad (1)$$

$$rs = -1 \rightarrow r = -\frac{1}{s} \rightarrow -\frac{1}{s} + s = -\frac{b}{a} \leftrightarrow s(as+b) = a \quad (2)$$

Multiplicando (1) por (2): $rs(ar+b)(as+b)=a^2 \leftrightarrow (ar+b)(as+b) = -a^2$

$$S=(ar+b)+(as+b)=a(r+s)+2b = a(-b/a)+2b = b$$

$$P=(ar+b)(as+b)=-a^2, \text{ luego, si } x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-bx-a^2=0$$

EJERCICIOS: Grupo 20

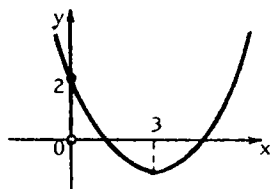
- Hallar el valor de k en la ecuación $x^2 + (2k+5)x + k = 0$, si una raíz excede a la otra en 3 unidades.
- Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0, m \in \mathbb{R}\}$; hallar los valores de m para que A sea un conjunto unitario. Construir dicho conjunto.
- Si $\{r, s\}$ es el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$, hallar el valor de:
a) $\frac{r^2}{s} + \frac{s^2}{r}$ b) $r^{-1} + s^{-1}$
- Dada la ecuación $(2k+2)x^2 + 4x - 4kx + k - 2 = 0$, hallar la suma de sus raíces sabiendo que éstas son inversas.
- Para qué valores de m , la suma de las raíces de la ecuación $(m+1)(x^2 - x) = (m-1)(4x-5)$, es igual al duplo del producto de las raíces de dicha ecuación menos 1.
- Si r y s son las raíces de la ecuación $mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$, con m constante y cumplan: $r^2 + s^2 = 4rs$. Hallar la suma de todos los valores de m que satisfagan tal propiedad.
- Si $\{a, b\}$ es el conjunto solución de la ecuación $3x^2 - 2(m+1)x + (m-1) = 0$, hallar m para que se cumpla: $9ab^2 + 3a^3 + 9a^2b + 3b^3 = 192$.
- Sea $\{r, s\}$ el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Si $r = 2s$, demostrar que $b^2 = kac$ y hallar el valor de la constante k .
- Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2 - kx + \frac{1}{2}(k^2 - 1) = 0$, $k^2 \neq 0, 3$; resolver la ecuación $2(r^3 + s^3)x^2 - 3x + (r+s) = 0$
- Si r y s son las raíces reales de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ y si $r = k$, $s = k$ son las raíces reales de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, hallar k tal que $p = 0$.
- Dada la ecuación $(1-a^2)(x+a) = 2a(1-x^2)$ con a constante. Si su conjunto solución es $\{r, s\}$, hallar $|r-s|$.
- Si a y b son constantes en $\mathbb{R}$, se tiene que las raíces de la ecuación: $x^4 + ax + b = 0$ son los cuadrados de las raíces de la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$. Hallar $|4a+b|$.
- Si $\{r, s\}$ es el conjunto solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, hallar el valor de $E = r^3s^2 + r^2s^3$.
- Para qué valores de m las raíces de la ecuación $(x^2 - bx)(m+1) = amx - ax - cm + c$

son de signo contrario e iguales en valor absoluto.

15. Si r y s son las raíces reales de la ecuación $(a^2-b^2)x^2-2(a-b)x+(a-b)=0$ con a y b constantes en $\mathbb{R}$ y k es una constante tal que $r-k=-(s-k)$. Hallar el valor de $rs+k$.

16. La gráfica de $f(x)=x^2+bx+c$ es el de la figura adjunta.

Dada la ecuación $x^2+bx+c=0$, sean p el producto de las raíces y m el promedio de las mismas. Hallar $p+m$.



17. Sea $y=ax^2+bx+c$ una función cuadrática cuya gráfica interseca al eje X en los puntos $-2/3$ y $4/5$. Hallar $|r-s|$, donde r y s son los puntos en que la gráfica de $y=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ corta al eje X .

18. Si $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-a}+\sqrt{3}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-a}-\sqrt{3}}$ son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$; hallar el valor de $E = \frac{b}{\sqrt{3-a}} + c$, cuando $a \neq 3$

19. Las raíces r y s de una ecuación cuadrática satisfacen: $4r-16s=7$ y $8r+4s=5$. Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son respectivamente las inversas de r y s .

20. Si r y s son las raíces reales no nulas de la ecuación $a^2x^2+b^2x+c^2=0$, $c \neq 0$, hallar la ecuación cuadrática de raíces $\frac{s}{r}$ y $\frac{r}{s}$.

21. Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$, fórmese la ecuación cuyas raíces son $(r-s)^2$ y $(r+s)^2$.

22. Formar la ecuación cuyas raíces son los cuadrados de la suma y de la diferencia de las raíces de $2x^2+2(m+n)x+m^2+n^2=0$.

23. Si $\{r, s\}$ es el conjunto solución de $A=\{x \in \mathbb{R} | x^2+3x+n=0, n \in \mathbb{R}\}$, construir un nuevo conjunto B cuya solución sea $\{\frac{r}{s^2}, \frac{s}{r^2}\}$.

24. Si r y s son las raíces de la ecuación $ax^2+2bx+c=0$, hallar la ecuación cuyas raíces son $2r+\frac{1}{s}$ y $2s+\frac{1}{r}$, y probar que cuando $a+c=0$, esta ecuación es la misma que la ecuación original.

25. Si r y s son las raíces de $ax^2+bx+c=0$ y si (r^2+s^2) y $(r+1)(s+1)$ son las raíces de $ay^2+ky+h=0$, obtener k y h en términos de a y c .

26. Si las ecuaciones $ax^2+bx+c=0$ y $px^2+qx+r=0$ tienen una raíz común, demostrar que $(br-cq)(aq-bp)=(cp-ar)^2$.

27. Si r y s son las raíces de $ax^2+bx+c=0$, hallar la ecuación cuyas raíces son $r+\frac{1}{s}$ y $s+\frac{1}{r}$.
28. Si $x^2+px+q=0$ y $x^2+mx+n=0$ tienen una raíz común demostrar que esta raíz es la cuadrada de $\frac{pn-qm}{m-p}$.
29. Determinar la ecuación cuadrática con coeficientes enteros, expresadas en términos de a, b y c , cuyas raíces sean los números $\frac{1+r}{1-r}$ y $\frac{1+s}{1-s}$.
30. Formar la ecuación cuadrática de raíces: $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ y $\frac{2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$
31. En la ecuación $px^2+qx+r=0$ las raíces están en la razón de a/b , probar que: $(a^2+b^2)pr+ab(2pr-q^2)=0$.



4.5.5 ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRICAS



Son aquellas ecuaciones que no son cuadráticas, pero, como su nombre lo indica, mediante sustituciones adecuadas se transforman en ecuaciones cuadráticas. Como ilustración vemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación: $\frac{x^2-6}{x} - \frac{5x}{x^2-6} = 4$

Solución. En esta ecuación, que no es cuadrática, $x \neq 0$ y $x^2 \neq 6$. Haciendo la sustitución: $\frac{x^2-6}{x} = m$, la ecuación dada se transforma en:

$m - \frac{5}{m} = 4$, $m \neq 0$, de donde obtenemos la ecuación cuadrática: $m^2 - 4m - 5 = 0$

$$\therefore S = \{-3, -1, 2, 6\}$$

EJEMPLO 2. Resolver: $x^2 + 2\sqrt{x^2+6x} = 24-6x$

Solución. Ordenando los términos de la ecuación se tiene:

$$(x^2+6x)+2\sqrt{x^2+6x} = 24. \text{ Sea } \sqrt{x^2+6x} = m, \text{ donde } m \geq 0$$

Entonces, la ecuación se transforma en: $m^2+2m-24=0 \leftrightarrow m=4 \vee m=-6$

Descartamos $m=-6$, porque la raíz cuadrada de un número real es siempre positivo. Entonces, para $m=4$: $\sqrt{x^2+6x}=4 \rightarrow x^2+6x-16=0 \leftrightarrow x=-8 \vee x=2 \rightarrow S=\{-8, 2\}$

EJEMPLO 3. Resolver: $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)=385$

Solución. Ordenando los factores y efectuando los productos dos a dos, se tiene:

$$(x+9)(x-7)(x+5)(x-3)=385 \rightarrow (x^2+2x-63)(x^2+2x-15)=385$$

Haciendo: $x^2+2x=m$, la ecuación se reduce a: $(m-63)(m-15)=385$

de donde: $m^2-78m+560=0 \leftrightarrow m=8 \vee m=70$

Para $m=8$: $x^2+2x=8 \leftrightarrow x^2+2x-8=0 \leftrightarrow x=-4 \vee x=2$

$$m=70: x^2+2x=70 \rightarrow x^2+2x-70=0 \leftrightarrow x=-1 \pm \sqrt{71}$$

$$\therefore S = \{-4, 2, -1 \pm \sqrt{71}\}$$

EJERCICIOS: Grupo 21

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $(x+1 + \frac{6}{x})(x-1 + \frac{6}{x}) = 24$

11. $(x - \frac{6}{x})^2 + 4x - \frac{24}{x} = 5$

2. $(x - \frac{3}{x})^2 - 4x + \frac{12}{x} = 12$

12. $x^2 - x + 3\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{2} + 7$

3. $(x^2+3x+2)^2 - 8(x^2+3x) = 4$

13. $x(x-2a) = \frac{8a^3}{x^2-2ax} + 7a^2$

4. $2x^2+2x-3\sqrt{x^2+x+3} = 3$

14. $(2x-5)(x-2)(x+4)(2x+7) = 91$

5. $(2x-7)(x^2-9)(2x+5) = 91$

15. $(x+2a)(x-6a)(x+3a)(x-5a) = 180a^4$

6. $6x^2+10x+\sqrt{3x^2+5x+1} = -1$

16. $12x^{3/5} = 17x^{1/5} - 6x^{-1/5}$

7. $2x^2-2x+2\sqrt{2x^2-7x+6} = 5x-6$

17. $6x^{3/4} = 7x^{1/4} - 2x^{-1/4}$

8. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)=9$

18. $(x+2)^2 = 5(\sqrt{x^2+4x+5} - 1)$

9. $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{13}{6}$

19. $\sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{a^2-1}{a}$

10. $\sqrt{\frac{2-x}{3x}} + \sqrt{\frac{3x}{2-x}} = \frac{3}{2}$

20. $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$



ORDEN EN R

Según los Axiomas de Orden: 0.1 al 0.4, ya establecidos (pag.186), podemos dar una definición más detallada de los símbolos " $<$ ", " $>$ ", " $\leq$ " y " $\geq$ ", como sigue:

4.6 DESIGUALDADES

Definición 4.13 Se conoce con el nombre de **desigualdad** a toda proposición donde aparece la relación " $<$ " (es menor que) o cualquiera de las relaciones: " $>$ " (es mayor que), " $\leq$ " (es menor o igual que) y " $\geq$ " (es mayor o igual que) definidas de la manera siguiente para a, b y $c \in \mathbb{R}$.

- (1) Si $a > 0 \leftrightarrow a$ es positivo
- (2) Si $a < 0 \leftrightarrow a$ es negativo
- (3) Si $a > b \leftrightarrow a - b$ es positivo
- (4) Si $a < b \leftrightarrow a - b$ es negativo
- (5) Si $a \leq b \leftrightarrow a < b \vee a = b$
- (6) Si $a \geq b \leftrightarrow a > b \vee a = b$
- (7) Si $a < b < c \leftrightarrow (a < b) \wedge (b < c)$
- (8) Si $a < b \leq c \leftrightarrow [a < b \wedge (b < c \vee b = c)]$

En particular, las relaciones $a < b$ y $a > b$ se llaman **desigualdades estrictas** mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ se llaman **desigualdades no estrictas**.

Para conocer con exactitud el significado de estas relaciones y con ayuda de los axiomas de orden, 0.1 al 0.4, veamos algunos:

4.7 TEOREMAS RELATIVOS A DESIGUALDADES

TEOREMA 19. Para $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

- a) $a < b \leftrightarrow a - b < 0$
- b) $a < 0 \leftrightarrow -a > 0$
- c) $a > 0 \leftrightarrow -a < 0$

Demostración. a) Demostraremos que: $a < b \rightarrow a - b < 0$

$$\text{En efecto: } a < b \rightarrow a + (-b) < b + (-b) \quad (0.3)$$

$$\rightarrow a - b < 0 \quad (\text{Def. 4.3 y 4.2})$$

Recíprocamente, demostraremos que: $a-b < 0 \rightarrow a < b$

$$\begin{aligned} \text{En efecto:} \quad a-b < 0 &+ (a-b)+b < 0+b && (0.3) \\ &+ a + [b+(-b)] < b && (A.3 \text{ y } A.4) \\ &+ a + 0 < b && (\text{Def. 4.2}) \\ &+ a < b && (A.4) \end{aligned}$$

Las demostraciones de b) y c) quedan como ejercicio.

TEOREMA 20. La suma y el producto de números positivos en $\mathbb{R}$, es positivo

$$\text{esto es, } a > 0 \text{ y } b > 0 \rightarrow \begin{cases} a) & a+b > 0 \\ b) & a \cdot b > 0 \end{cases}$$

Demostración. En efecto:

$$a) \quad a > 0 \rightarrow a+b > 0+b \quad (0.3)$$

$$\rightarrow a+b > b \quad (A.4)$$

$$\text{Si } a+b > b \text{ y } b > 0 \rightarrow a+b > 0 \quad (0.2)$$

$$b) \quad a > 0 \rightarrow a \cdot b > 0 \cdot b \quad (b > 0)$$

$$\rightarrow a \cdot b > 0 \quad (0 \cdot b = 0)$$

TEOREMA 21. Si $a > 0$ y $b < 0$, o si $a < 0$ y $b > 0$, entonces se cumple que $ab < 0$.

Demostración. Consideremos: $a > 0$ y $b < 0$

$$\text{En efecto, si } b < 0 \rightarrow -b > 0 \quad (T.19b)$$

$$\text{Luego, por el Teorema 20b: } a(-b) > 0 \rightarrow -(a \cdot b) > 0$$

$$\rightarrow ab < 0 \quad (T.19c)$$

TEOREMA 22. La suma de dos números negativos en $\mathbb{R}$, es negativo, mientras que el producto es positivo, esto es:

$$\text{Si } a < 0 \text{ y } b < 0 \rightarrow \begin{cases} a) & a+b < 0 \\ b) & a \cdot b > 0 \end{cases}$$

$$\text{Demostración. } a) \text{ Si } a < 0 \text{ y } b < 0 \rightarrow -a > 0 \text{ y } -b > 0 \quad (T.19b)$$

$$\rightarrow (-a)+(-b) > 0 \quad (T.20a)$$

$$\rightarrow -(a+b) > 0 \quad (T.5)$$

$$\rightarrow a+b < 0 \quad (T.19c)$$

$$b) \text{ Si } a < 0 \text{ y } b < 0 \rightarrow -a > 0 \text{ y } -b > 0 \rightarrow (-a)(-b) > 0 \quad (T.20b)$$

$$\rightarrow a \cdot b > 0 \quad [(-a)(-b)=ab]$$

TEOREMA 23. Para $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$, se tiene: $a^2 > 0$

Demostración. En efecto:

- (1) Si $a \neq 0 \rightarrow a > 0 \vee a < 0$ (Hipótesis)
 (2) Si $a > 0 \rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a$ (0.3)
 (3) $\rightarrow a^2 > 0$
 (4) Si $a < 0 \rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a$ (T.22b)
 (5) $\rightarrow a^2 > 0$

TEOREMA 24. Para $a \neq 0$, a^{-1} tiene el mismo signo que a , es decir: a) $a > 0 \rightarrow a^{-1} > 0$
 b) $a < 0 \rightarrow a^{-1} < 0$

Demostración. a) (1) $a > 0$, supongamos que $a^{-1} < 0$
 (2) Entonces: $(a)(a^{-1}) < 0$ (T.21)
 (3) Por M.5: $1 < 0$ (Absurdo)
 (4) Luego se tiene: $a^{-1} = 0 \vee a^{-1} > 0$
 (5) Si $a^{-1} = 0 \rightarrow a \cdot a^{-1} = 0 \cdot a \rightarrow 1 = 0$ (Absurdo)
 (6) Por lo tanto, si $a > 0 \rightarrow a^{-1} > 0$

b) La demostración queda como ejercicio.

TEOREMA 25. Para a, b, c y d en R , se cumple:
 Si $a < b$ y $c < d \rightarrow a + c < b + d$

Demostración. En efecto:
 (1) Si $a < b \rightarrow a + c < b + c$ (0.3)
 (2) Si $c < d \rightarrow b + c < b + d$ (0.3)
 (3) Por lo tanto: $a + c < b + d$ (0.2)

TEOREMA 26. Para a, b y c en R , se cumple: $a + c < b + c \rightarrow a < b$
 (Propiedad de cancelación aditiva para una desigualdad)

Demostración. En efecto:
 (1) $a + c < b + c \rightarrow a + c + (-c) < b + c + (-c)$ (0.3)
 (2) $\rightarrow a + [c + (-c)] < b + [c + (-c)]$ (A.3)
 (3) $\rightarrow a + 0 < b + 0$ (A.5)
 (4) $a + c < b + c \rightarrow a < b$ (A.4)

TEOREMA 27. Para a, b y c en R , se cumple: $a < b$ y $c < 0 \leftrightarrow ac > bc$
 o si $a > b$ y $c < 0 \leftrightarrow ac < bc$ (Consist.Mult.)

Demostración. Probaremos que: $a < b$ y $c < 0 \rightarrow ac < bc$
 (1) Si $c < 0 \rightarrow -c > 0$ (T.19b)

$$(2) \text{ Luego: } a < b \rightarrow a(-c) < b(-c) \quad (O.3)$$

$$(3) \quad + \quad -(ac) < -(bc) \quad (T.14d)$$

$$(4) \quad + \quad ac > bc$$

ii) Recíprocamente: $ac > bc \rightarrow a < b$, si $c < 0$

$$\text{En efecto (1) Si } c < 0 \rightarrow c^{-1} < 0 \quad (T.24b)$$

$$(2) \text{ Luego: } ac > bc \rightarrow (ac)c^{-1} < (bc)c^{-1} \quad (T.20c)$$

$$(3) \quad + \quad a(c.c^{-1}) < b(c.c^{-1}) \quad (M.3)$$

$$(4) \quad + \quad a.1 < b.1 \quad (M.5)$$

$$(5) \quad + \quad a < b \quad (M.4)$$

TEOREMA 28. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$a) \ a < b \text{ y } c > 0 \leftrightarrow ac < bc \quad (\text{Consist. Multip.})$$

$$b) \ a > b \text{ y } c > 0 \leftrightarrow ac > bc$$

La demostración del teorema queda como ejercicio.

TEOREMA 29. Si a y b en $\mathbb{R}$, tienen el mismo signo y si: $a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Demostración. Consideremos los casos: i) $a > 0$ y $b > 0$

ii) $a < 0$ y $b < 0$

$$i) \ (1) \text{ Si } a < b \rightarrow a.a^{-1} < b.a^{-1} \quad (T.25 \text{ y } T.24)$$

$$(2) \quad + \quad a.a^{-1}.b^{-1} < b.a^{-1}.b^{-1} \quad (T.25 \text{ y } T.24)$$

$$(3) \quad + \quad (a.a^{-1})b^{-1} < (b.a^{-1})a^{-1} \quad (M.3)$$

$$(4) \quad + \quad (1)b^{-1} < (1)a^{-1} \quad (M.5)$$

$$(5) \quad + \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \quad (M.4)$$

Por lo tanto, si $a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

ii) La demostración queda como ejercicio.

TEOREMA 30. Para a y b en $\mathbb{R}$, se cumplen:

$$i) \ a.b > 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ii) \ a.b < 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Demostración. i) a) Demostraremos que si:

$$a.b > 0 \rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

Probaremos que si: $(a > 0 \rightarrow b > 0)$

$$(a < 0 \rightarrow b < 0)$$

$$\text{En efecto: (1) Si } a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0 \quad (T.24)$$

$$(2) \text{ Luego: } ab > 0 \rightarrow \frac{1}{a}(ab) > \frac{1}{a}(0) \quad (O.3)$$

$$(3) \quad \rightarrow b > 0$$

$$(4) \text{ Si } a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0 \quad (\text{T.24})$$

$$(5) \text{ Si } b < 0 \rightarrow ab > 0 \rightarrow \frac{1}{a}(ab) < \frac{1}{a}(0) \quad (\text{T.22b y T.21})$$

$$(6) \quad \rightarrow b < 0$$

Por lo tanto: $a \cdot b > 0 \rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

b) Probaremos que si $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \rightarrow a \cdot b > 0$

En efecto: (1) Si $a > 0$ y $b > 0 \rightarrow a \cdot b > 0$ (T.20b)

(2) Si $a < 0$ y $b < 0 \rightarrow a \cdot b > 0$ (T.23b)

(3) $\therefore (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \rightarrow a \cdot b > 0$

ii) La demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA 31. Si: i) $\frac{a}{b} > 0$ y $b \neq 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
 ii) $\frac{a}{b} < 0$ y $b \neq 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

La demostración de este teorema es similar a la del teorema 30, toda vez

que $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ y por el teorema 24, b^{-1} tiene el mismo signo que b .

TEOREMA 32. i) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \rightarrow a^2 \geq b^2 \leftrightarrow a \geq b$

ii) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \rightarrow a^2 < b^2 \leftrightarrow a < b$

Demostración. Probaremos i)

a) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$: $a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$

En efecto: (1) Supongamos que $a \not\geq b$ (Hipótesis Auxiliar)

(2) Luego: $a < b$ $a = b$ (O.1)

(3) Si $a < b \rightarrow a^2 < a \cdot b \vee a \cdot b < b^2 \rightarrow a^2 < b^2$ (O.3 y O.2)

(4) Si $a = b \rightarrow a^2 = a \cdot b \vee a \cdot b = b^2 \rightarrow a^2 = b^2$ (I.5 e I.4)

Contradice el antecedente de i) por haber supuesto que $a \not\geq b$

(5) Por lo que, si: $a^2 \geq b^2 \rightarrow a \geq b$

b) Probaremos que si $a \geq 0$ y $b \geq 0$: $a > b \rightarrow a^2 > b^2$

En efecto: (1) $a > b$

(2) $a \cdot a > a \cdot b \rightarrow a^2 > ab$ (O.3)

(3) $a \cdot b > b \cdot b \rightarrow ab > b^2$ (O.3)

(4) Luego, de 2 y 3: $a^2 > b^2$ (O.2)

(5) Por lo tanto, si: $a > b \rightarrow a^2 > b^2$

La demostración de ii) se deja como ejercicio.

TEOREMA 33. Si: i) $b \geq 0 \rightarrow a^2 > b \leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$
 ii) $b \geq 0 \rightarrow a^2 \geq b \leftrightarrow a \geq \sqrt{b} \vee a \leq -\sqrt{b}$

Demostración. i) Consideremos los casos: $a > 0$ y $a < 0$

En efecto: (1) Si $a > 0$, $b \geq 0 \rightarrow a^2 > b$
 $\rightarrow a^2 > (\sqrt{b})^2$ ($b = (\sqrt{b})^2$)
 $\rightarrow a > \sqrt{b}$ (T.32)

(2) Si $a < 0$, $b \geq 0 \rightarrow (-a)^2 > b$
 $\rightarrow (-a)^2 > (\sqrt{b})^2$
 $\rightarrow -a > \sqrt{b}$ (T.32)
 $\rightarrow a < -\sqrt{b}$ (T.27)

Por lo tanto, de (1) y (2): $a^2 > b \leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$

TEOREMA 34. Si: i) $b > 0 \rightarrow a^2 < b \leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$
 ii) $b > 0 \rightarrow a^2 < b \leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

La demostración es similar a la del teorema 33. Queda como ejercicio.

TEOREMA 35. i) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \rightarrow (\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leftrightarrow 0 \leq a \leq b)$
 ii) Si $a \geq 0$ y $b > 0 \rightarrow (\sqrt{a} < \sqrt{b} \leftrightarrow 0 \leq a < b)$

Demostración. En efecto:

(1) Si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leftrightarrow (\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2$ (T.32)
 (2) $\leftrightarrow a \leq b$
 (3) Pero $a \geq 0$ y $b \geq 0 \rightarrow 0 \leq a \leq b$

Corolario. Si n es un número entero positivo par entonces:

a) Si $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \rightarrow ({}^n\sqrt{a} \leq {}^n\sqrt{b} \leftrightarrow 0 \leq a \leq b)$
 b) Si $a \geq 0 \wedge b > 0 \rightarrow ({}^n\sqrt{a} < {}^n\sqrt{b} \leftrightarrow 0 \leq a < b)$

TEOREMA 36. Si n es un número entero positivo impar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) ${}^n\sqrt{a} \leq {}^n\sqrt{b} \leftrightarrow a \leq b$ iii) ${}^n\sqrt{a} > 0 \leftrightarrow a > 0$
 ii) ${}^n\sqrt{a} < {}^n\sqrt{b} \leftrightarrow a < b$ iv) ${}^n\sqrt{a} < 0 \leftrightarrow a < 0$

TEOREMA 37. Para a y b en $\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \leftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$
 b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 0 \leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$

TEOREMA 38. i) Si $\sqrt{a} \leq b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a \leq b^2)$

ii) Si $\sqrt{a} < b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a < b^2)$

TEOREMA 39. i) Si $\sqrt{a} \geq b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge [b < 0 \vee (b \geq 0 \wedge a \geq b^2)]$

ii) Si $\sqrt{a} > b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge [b < 0 \vee (b \geq 0 \wedge a > b^2)]$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Si $a > 0$ y $b < 0$, demostrar que: $\frac{b+1}{a} < \frac{1}{a}$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } a > 0 \text{ y } b < 0 \rightarrow a \cdot b < 0 \quad (T.21)$$

$$(2) \quad \rightarrow a \cdot b + a < 0 + a \quad (O.3)$$

$$(3) \text{ Dividiendo entre } a^2: \rightarrow \frac{a(b+1)}{a^2} < \frac{a}{a^2}$$

$$(4) \quad \rightarrow \frac{b+1}{a} < \frac{1}{a}$$

EJERCICIO 2. Si $a > 0$ y $b < 0$, demostrar que: $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } a > 0 \text{ y } b < 0 \rightarrow b-a < 0$$

$$(2) \text{ } a > 0 \rightarrow a^2 > 0 \rightarrow -a^2 < 0 \quad (T.23 \text{ y } T.19c)$$

$$(3) \text{ Sumando } ab: \rightarrow -a^2 + ab < ab \quad (O.3)$$

$$(4) \text{ De (1) y T.24a: } \frac{1}{b-a} < 0 \rightarrow \frac{a(b-a)}{b-a} > \frac{ab}{b-a} \quad (T.27)$$

$$(5) \quad \rightarrow a > \frac{ab}{b-a}$$

$$(6) \text{ Dividiendo entre } b < 0: \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$$

EJERCICIO 3. Si $0 < a < b$, demostrar que: $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

Demostración. i) Probaremos que: $a < \sqrt{ab}$

$$\text{En efecto: (1) Si } a > 0, b > 0 \text{ y } a < b \rightarrow a \cdot a < a \cdot b \quad (O.3)$$

$$(2) \quad \rightarrow a^2 < (\sqrt{ab})^2$$

$$(3) \quad \rightarrow a < \sqrt{ab} \quad (T.32)$$

ii) Probaremos que: $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ (Media Geométrica < Media Aritmética)

$$(1) \text{ Si } a < b \rightarrow a-b < 0$$

$$(2) \text{ Multiplicando por } (a-b): \quad (a-b)^2 > 0 \quad (T.27)$$

$$(3) \text{ Sumando } 4ab: \rightarrow (a-b)^2 + 4ab > 4ab \rightarrow (a+b)^2 > 4ab \quad (0.3)$$

$$(4) \text{ Luego: } ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \quad (T.32)$$

$$\text{iii) Demostraremos finalmente que: } \frac{a+b}{2} < b$$

$$\text{En efecto: (1) Si } a < b \rightarrow a+b < b+b \quad (0.3)$$

$$(2) \rightarrow \frac{a+b}{2} < b$$

$$\text{Por lo tanto, de i), ii), iii), queda demostrado: } a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

EJERCICIO 4. Si $a \neq b \neq c$ y todos positivos, demostrar que:

$$(a+b)(b+c)(a+c) > 8abc$$

Demostración. En efecto, dado que a, b y c son diferentes, se debe cumplir la relación para a y b : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$ ó $(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 > 0$

$$(1) \text{ Si } (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0 \rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \rightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$$

$$(2) \text{ Análogamente para } b \text{ y } c: \quad + b + c > 2\sqrt{bc}$$

$$(3) \text{ y para } a \text{ y } c: \quad + a + c > 2\sqrt{ac}$$

$$(4) \text{ Multiplicando los extremos de 1, 2 y 3, obtenemos:}$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) > 8(\sqrt{ab})(\sqrt{bc})(\sqrt{ac})$$

$$(5) \text{ Por lo tanto: } (a+b)(b+c)(a+c) > 8abc$$

EJERCICIO 5. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

$$a) \ a < 0, b > 0 \rightarrow a^2 - ab > 0$$

$$c) \ \forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$b) \ 0 < a < b \text{ y } 0 < c < d \rightarrow ac < bd$$

$$d) \ a < b \rightarrow a^2 < \frac{a^2 + ab}{2} < ab$$

$$\text{Solución. a) (1) Si } a < 0 \rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a \rightarrow a^2 > 0 \quad (0.3)$$

$$(2) \ a < 0 \rightarrow -a > 0 \quad (T.19b)$$

$$(3) \ b > 0 \rightarrow (-a)b > 0 \rightarrow -ab > 0 \quad (0.3)$$

$$(4) \text{ Sumando 1 y 2: } a^2 - ab > 0. \text{ La afirmación es verdadera.}$$

$$b) (1) \text{ Si } a > 0 \text{ y } c < d \rightarrow ac < ad \quad (0.3)$$

$$(2) \text{ Si } d > 0 \text{ y } a < b \rightarrow ad < bd \quad (0.3)$$

$$(3) \text{ Luego, de 1 y 2: } ac < bd \text{ .. Es verdadera.} \quad (0.2)$$

$$c) (1) \ \forall a, b \in \mathbb{R}, (a-b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(2) \text{ De donde: } a^2 + b^2 \geq 2ab \therefore \text{ Es verdadera.}$$

$$d) (1) \text{ Si } a < b \rightarrow a \cdot a < a \cdot b \rightarrow a^2 < ab$$

$$(2) \text{ Multiplicando por 2: } 2a^2 < 2ab$$

$$(3) \text{ Sumando } ab \text{ en (1): } a^2 + ab < 2ab$$

(4) Luego, de 2 y 3: $2a^2 < a^2 + ab < 2ab$

(5) Dividiendo entre 2: $a^2 < \frac{a^2 + ab}{2} < ab \quad \therefore$ Es verdadera.

EJERCICIO 6. Demostrar que para todo número real a, b, c :

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$$

Demostración. En efecto:

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}: (a-b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

(2) Multiplicando por c^2 : $\rightarrow a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2$

(3) Análogamente para b y c : $b^2 + c^2 \geq 2bc \rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2bca^2$

(4) Para a y c : $a^2 + c^2 \geq 2ac \rightarrow a^2b^2 + c^2b^2 \geq 2acb^2$

(5) Sumando: $2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \geq 2abc(a+b+c)$

(6) $\therefore a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

EJERCICIO 7. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\forall n$ par se cumple: $\frac{x^n}{x^{2n} + 1} \leq \frac{1}{2}$

Demostración. En efecto:

(1) Si n es par $\rightarrow x^n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (La igualdad se cumple para

$$x=1 \text{ o } x=-1)$$

(2) Entonces: $(x^n - 1)^2 \geq 0$

(3) $\rightarrow x^{2n} - 2x^n + 1 \geq 0 \rightarrow x^{2n} + 1 \geq 2x^n$

(4) Como $x^{2n} + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \leftrightarrow \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \leq \frac{1}{2}$

EJERCICIO 8. Sean $a, b, m, n \in \mathbb{R}$ tales que: $b > 0$ y $n > 0$. Si $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$, demostrar:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$$

Demostración. (1) Si $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} \rightarrow an < bm$ (ya que: $b > 0$ y $n > 0$)

(2) $\rightarrow an + ab < bm + ab$ (0.3)

(3) $\rightarrow a(b+n) < b(a+m)$

(4) Como $b+n > 0$ y $b > 0 \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n}$

(5) En (1): $an + mn < bm + mn \rightarrow n(a+m) < m(b+n)$ (0.3)

(6) Como $n > 0$ y $b+n > 0 \rightarrow \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$

(7) Por lo tanto, de (4) y (6): $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$

EJERCICIO 9. Demostrar que si $c > 0$ y $a < b$, entonces: $a < \frac{a+bc}{1+c} < b$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } a < b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac < bc \quad (T.28)$$

$$(2) \quad + a + ac < a + bc \quad (0.3)$$

$$(3) \quad + a(1+c) < a+bc \rightarrow a < \frac{a+bc}{1+c} \quad (1+c > 0)$$

$$(4) \text{ Si } a < b \rightarrow a+bc < b+bc \quad (0.3)$$

$$(5) \quad + a+bc < b(1+c) \rightarrow \frac{a+bc}{1+c} < b$$

$$(6) \text{ Por lo tanto, de (3) y (5): } a < \frac{a+bc}{1+c} < b$$

EJERCICIO 10. Si a, b y c son números positivos, demostrar que:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)$$

Demostración. En efecto, si $a \neq b$ y ambos positivos, entonces:

$$(1) (a-b)^2 > 0 \rightarrow a^2+b^2-2ab > 0 \rightarrow a^2+b^2-ab > ab$$

$$(2) \text{ Como } a+b > 0 \rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) > ab(a+b) \quad (T.28)$$

$$(3) \quad + (a^3 + b^3) > ab(a+b)$$

$$(4) \text{ Análogamente para } b \text{ y } c: (b^3 + c^3) > bc(b+c)$$

$$(5) \text{ y para } a \text{ y } c: (a^3 + c^3) > ac(a+c)$$

$$(6) \text{ Sumando 3, 4 y 5 obtenemos:}$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$$

EJERCICIO 11. Si a y b son números reales positivos, demostrar que:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) \geq 4$$

Demostración. En efecto, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces:

$$(1) \forall a, b \in \mathbb{R}: (a-b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(2) \text{ Sumando } 2ab: a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$(3) \text{ Dividiendo entre } ab > 0: \frac{(a+b)(a+b)}{ab} \geq 4$$

$$(4) \text{ Entonces: } \left(\frac{a+b}{ab}\right)(a+b) \geq 4 \leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) \geq 4$$

EJERCICIO 12. Si $a \neq b \neq x \neq y$, todos positivos, tales que: $a^2+b^2=1$ y $x^2+y^2=1$, demostrar que: $ax+by < 1$.

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Como } a > 0 \text{ y } x > 0 \rightarrow (a-x)^2 > 0 \rightarrow a^2+x^2 > 2ax$$

$$(2) \text{ También: } b > 0 \text{ e } y > 0 \rightarrow (b-y)^2 > 0 \rightarrow b^2+y^2 > 2by$$

$$(3) \text{ Sumando (1) y (2): } (a^2+x^2)+(b^2+y^2) > 2ax+2by$$

(4) Según datos: $(1) + (1) > 2(ax+by)$

(5) De donde: $ax+by < 1$

EJERCICIO 13. Demostrar que para cualquier $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$$

Demostración. En efecto:

(1) $\forall a, c \in \mathbb{R}: (a-c)^2 \geq 0 \rightarrow a^2+c^2 \geq 2ac$

(2) $\forall b, d \in \mathbb{R}: (b-d)^2 \geq 0 \rightarrow b^2+d^2 \geq 2bd$

(3) Multiplicando 1 y 2: $(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 4abcd$

(4) También, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: (ab-cd)^2 \geq 0 \rightarrow (ab)^2+(cd)^2 \geq 2abcd$

(5) Sumando 2abcd: $(ab+cd)^2 \geq 4abcd$

(6) De los pasos 3 y 5: $(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq (ab-cd)^2 \quad (0.2)$

(7) $\therefore (ab-cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$

EJERCICIOS: Grupo 22

1. Para números reales, determinar el valor de verdad de las afirmaciones:

a) Si $a=2b \rightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 > ab$

c) Si $a < b \rightarrow a < \frac{3a+b}{4} < b$

b) Si $a>0$ y $b>0$, se cumple: $a^2>b^2 \leftrightarrow a>b$

2.Cuál de las siguientes proposiciones, respecto a números reales, es verdadera?

a) $a^2 < b^2 \rightarrow a < b$

b) $a < b \rightarrow a < \frac{3a+b}{4}$

c) $a < b$ y $c < d \rightarrow ac < bd$

3. Si $a>0$ y $b>0$, hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $\frac{b+1}{a} < a^{-1}$

c) $-\frac{a}{b} > \frac{a}{a-b}$

b) $ab > ab-a^2$

d) $b < 0 < a \leftrightarrow \frac{b^2}{a} < b$

4. De las siguientes afirmaciones, cuáles son falsas?

a) Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a^2 < b^2 \leftrightarrow a < b$

b) Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ $\rightarrow \frac{a}{a^2} + \frac{b}{b^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

c) $a^2 + b^2 > 2ab$

5. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a<0<b$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

a) $\frac{a-b}{b} < -1$

c) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

b) $ab-a^2 > b^2-ab$

d) $a(a-b) > 0$

6. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; demostrar que: $a^4 + b^4 + c^4 > 4abcd$

7. Si a y b son números reales positivos y diferentes, demostrar que:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

8. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2 < 2(a^2+b^2)$

9. Demostrar que si $0 < a < b$, entonces: $\sqrt{b^2 - a^2} < b$

10. Hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $a < b$ y $c < 0$ $\rightarrow$ $ac < bc$

b) Si $b < 0 < a$ $\rightarrow$ $(\frac{a-b}{ab}) \in \mathbb{R}^+$

c) Si $a > b$ $\rightarrow$ $b+c < a+c$, $\forall c \in \mathbb{R}$

11. Si $R < r < 0$, determinar la condición que debe cumplir el número d para que sea válida la desigualdad: $0 < \frac{d^2 + R^2 + r^2}{2dR} < 1$

12. Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $-b \in \mathbb{R}^+$, hallar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

a) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

b) $b(b-a) > 0$

c) $\frac{b^3}{a} - b^2 < 0$

d) $a^2 < b^2$

13. Para números reales cualesquiera, determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) $a < b$ y $c < 0 \rightarrow (b-a)(-c)^{-1} < 0$

c) $-a < b < a \rightarrow (a-b)^2 < 4a^2$

b) $a < b$ y $d < e \rightarrow (be-ad) > 0$

d) $ab < 0$ y $a < b \rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

14. Para números reales positivos a y b , $a=b$, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$

c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

b) $a^3 + b^3 > a^2b + b^2a$

d) $a < b \rightarrow a^n < b^n$, $n \in \mathbb{Z}$

15. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, demostrar que: $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$, a menos que $a=b=c$.

16. Si $a \neq b$ son números positivos, demostrar que:

$$a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$$

17. Sean a, b, c números reales tales que: $a+b > c > 0$, $a > 0$, $b > 0$; demostrar que:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$$

18. Si a, b, c, x, y, z son números reales positivos, todos diferentes, tales que: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demostrar que:

$$ax + by + cz < 1$$

19. Si m, n, r son números positivos y $\frac{a}{m} < \frac{b}{n} < \frac{c}{r}$, demostrar que:

$$\frac{a}{m} < \frac{a+b+c}{m+n+r} < \frac{c}{r}$$

20. Si a, b, c son números reales positivos, todos diferentes, demostrar que:

$$(a+b+c)^3 > 27abc$$

(Sugerencia: aplicar $MA > MG$ para tres números diferentes y positivos)

21. Si a, b, c son números reales positivos y diferentes, demostrar que:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) > 6abc$$

22. Demostrar que si $0 < a \leq b$, entonces: $\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \leq \frac{b^2}{a^2} + 3$

(Sug. Partir de $(a-b)^2 \leq 0$, luego, dividir entre a^2b)

23. Si a, b, c son números reales positivos y diferentes, demostrar que:

$$(a+b+c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

24. Si a, b, c, x, y, z son números reales positivos y diferentes, demostrar que

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) > (ax + by + cz)^2$$

25. Si a, b, c y d son números reales, demostrar que:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

26. Determinar el valor de verdad de:

$$\text{"Si } x, y \in \mathbb{R}^+, x \neq y \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} < 2"$$

27. Si a y $b \in \mathbb{R}$, demostrar que: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3 + b^3}{2}$

28. Demostrar que: $(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \geq 4abcd$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

29. Demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumple: $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1 \rightarrow ac + bd \leq 1$

30. Sean los números reales $a > 0$ y $b > 0$, tales que $a+b=1$. Demostrar que:

$$ab \leq 1/4 \text{ (Sugerencia: Considerar } (a-b)^2 \geq 0 \text{)}.$$

31. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, demostrar que: $(a^2 + b^2)(a+b)^2 \geq 8a^2b^2$.

(Sugerencia: Considerar $(a-b)^2 \geq 0$).

32. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $0 < a < b < c$, demostrar que: $\frac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} < a + b + c$



4.8 INECUACIONES



Una inecuación es toda desigualdad condicional que contiene una o más cantidades desconocidas, llamadas variables, y que solo es verdadera para determinados valores de dichas variables.

Las inecuaciones de una variable son proposiciones que tienen la forma:

$$p(x) > 0, p(x) < 0, p(x) \geq 0, p(x) \leq 0$$

Por la solución de una inecuación entendemos al conjunto de todos los números, cada uno de los cuales, al reemplazar la variable x , hace verdadera la desigualdad.

A continuación veremos las técnicas para resolver diversos tipos de inecuaciones de una variable en $\mathbb{R}$.

4.8.1 INECUACIONES LINEALES



Una inecuación lineal o de primer grado en una variable x , es una desigualdad de la forma:

$$p(x): ax+b > 0 \text{ o } p(x): ax+b < 0$$

La técnica para resolver una inecuación lineal es muy sencilla y análoga a la solución de una ecuación lineal con una incógnita. Se basa en la aplicación de los axiomas de orden y de teoremas aplicados en aquellos, en lugar de los postulados de igualdad.

EJEMPLO 1. Hallar el conjunto solución de: $3x-5 > 5x+1$

Solución. Según el axioma 0.3: $a < b \leftrightarrow a + c < b + c$; entonces:

$$3x-5 > 5x+1 \leftrightarrow 3x-5+(-5x+5) > 5x+1+(-5x+5)$$

$$\leftrightarrow (3-5)x + (5-5) > (5-5)x + (1+5)$$

$$\leftrightarrow -2x > 6 \leftrightarrow x < -3 \quad (\text{T.27})$$

Por tanto, el conjunto solución es: $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -3\}$

Nota. En la práctica, para resolver una inecuación lineal se transpone todos los términos que contiene la variable x al primer miembro y las constantes al segundo miembro de la desigualdad.

EJEMPLO 2. Resolver: $\frac{6x-3}{2} - (2x-6) \geq \frac{x-3}{4}$

Solución. Multiplicando ambos extremos por 4 se tiene:

$$12x-6-8x+24 > x-3 \leftrightarrow (12-8-1)x > -3-24+6 \leftrightarrow 3x > -21$$

$$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} | x > -7\}$$

EJEMPLO 3. Hallar el conjunto de enteros que satisfacen la inecuación:

$$\frac{2x-15}{2} < \frac{5}{3}(2-x) > \frac{2}{3}(8-5x)$$

Solución. En este caso, se descompone el sistema en dos inecuaciones, cuya solución es la intersección de las soluciones parciales, esto es,

$$\frac{2x-15}{2} < \frac{5}{3}(2-x) \wedge \frac{5}{3}(2-x) > \frac{2}{3}(8-5x)$$

$$\leftrightarrow (6x-45 < 20-10x) \wedge (10-5x > 16-10x)$$

$$\leftrightarrow (16x < 65) \wedge (5x > 6) \leftrightarrow \frac{6}{5} < x < \frac{65}{16}$$

Por lo tanto, el conjunto de enteros es: $S = \{2, 3, 4\}$

EJEMPLO 4. En $\mathbb{R}$ se define la operación $a*b = \frac{a-b}{2}$, según esto, hallar el conjunto solución de: $(x-1)*2 \leq (3*x)*1/2 \leq (1+2x)*5$

Solución. Aplicamos la operación $*$ a cada término de la inecuación y obtenemos: $(x-1)*2 = \frac{(x-1)-2}{2} = \frac{x-3}{2}$

$$(3*x) * \frac{1}{2} = \left(\frac{3-x}{2}\right) * \frac{1}{2} = \frac{\frac{3-x}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{2-x}{4} \quad ; \quad (1+2x)*5 = \frac{(1+2x)-5}{2} = x-2$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } \frac{x-3}{2} \leq \frac{2-x}{4} \leq x-2 &\leftrightarrow 2x-6 \leq 2-x \leq 4x-8 \\ &\leftrightarrow (2x-6 \leq 2-x) \wedge (2-x \leq 4x-8) \\ &\leftrightarrow (x \leq 8/3) \wedge (x \geq 2) \\ \therefore S &= \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 8/3\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5. Sea la operación binaria interna: $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \mapsto a*b$$

tal que: $a*b = a+b-3$. Si c^{-1} representa el inverso de c , respecto de la operación $*$, hallar el conjunto solución de la inecuación: $(2x)*7 > (x*1)*2^{-1}$.

Solución. Hallemos, en primer lugar, el elemento neutro de la operación $*$.

Según OB.3: $\exists e \in \mathbb{R} | a*e = e*a = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Entonces: $a*e = a+e-3=a \leftrightarrow e=3$

Luego, por OB.4: $\exists a^{-1} \in \mathbb{R} | a*a^{-1} = a^{-1}*a = 3, \forall a \in \mathbb{R}$

Aplicando $*2$ a cada extremo de la inecuación se tiene:

$$(2x)*7*2 > (x*1)*2^{-1}*2 \quad ; \quad \text{pero: } 2^{-1}*2 = 2*2^{-1}=3 \quad (* \text{ es conmutativa})$$

$$\text{Entonces: } (2x)*(7*2) > (x*1)*3 \quad (* \text{ es asociativa})$$

Aplicando la operación *: $(2x) \cdot (7+2-3) > (x+1-3) \cdot 3 \leftrightarrow (2x) \cdot 6 > (x-2) \cdot 3$
 $\leftrightarrow 2x+6-3 > x-2+3-3 \leftrightarrow x > -5$
 $\therefore S = \{x \in \mathbb{R} | x > -5\}$

4.8.2 INECUACIONES CUADRATICAS

Una inecuación cuadrática es una desigualdad condicional que, reducida a su más simple expresión, tiene la forma:

$$p(x): ax^2 + bx + c > 0 \quad (1)$$

$$o \quad p(x): ax^2 + bx + c < 0 \quad (2)$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$.

Para determinar los valores de x que satisfagan las inecuaciones (1) y (2) existen dos métodos:

a) Método de Factorización

b) Método de Completar el Cuadrado

a) **Método de Factorización.** Se utiliza cuando el trinomio ax^2+bx+c es factorizable y su resolución se basa en la aplicación del Teorema 30 (Regla de los signos para la multiplicación).

$$i) a \cdot b > 0 \leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$$

$$ii) a \cdot b < 0 \leftrightarrow [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]$$

y si $p(x)$ y $q(x)$ son dos proposiciones en la variable x , entonces:

$$\{x \in \mathbb{R} | p(x) \vee q(x)\} = \{x \in \mathbb{R} | p(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} | q(x)\} \quad (3)$$

$$\{x \in \mathbb{R} | p(x) \wedge q(x)\} = \{x \in \mathbb{R} | p(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R} | q(x)\} \quad (4)$$

son las soluciones de las inecuaciones (1) y (2) respectivamente.

EJEMPLO 6. Resolver: $x^2 - x - 6 \geq 0$

Solución. Por factorización:

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 6 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)(x+2) \geq 0\}$$

$$+ (x-3)(x+2) \geq 0 \leftrightarrow (x-3 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0) \vee (x-3 \leq 0 \wedge x+2 \leq 0)$$

$$\leftrightarrow (x \geq 3 \wedge x \geq -2) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq -2)$$

$$\leftrightarrow (x \geq 3) \vee (x \leq -2)$$

Por lo tanto, según (3), se tiene:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \vee x \geq 3\}$$

EJEMPLO 7. Resolver: $3x^2 - 11x + 6 < 0$

Solución. Por factorización: $3x^2 - 11x + 6 = (3x-2)(x-3)$

$$\begin{aligned}
 + (3x-2)(x-3) < 0 &\leftrightarrow (3x-2 > 0 \wedge x-3 < 0) \vee (3x-2 < 0 \wedge x-3 > 0) \\
 &\leftrightarrow (x > 2/3 \wedge x < 3) \vee (x < 2/3 \wedge x > 3) \\
 &\leftrightarrow (x > 2/3 \wedge x < 3) \vee (\emptyset)
 \end{aligned}$$

∴ Según (4): $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 2/3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} | 2/3 < x < 3\}$

b) Método de Completar el Cuadrado.

El método consiste en transformar el trinomio $p(x): ax^2+bx+c$ a la forma $p(x): a(x + \frac{b}{a})^2 = k$, con el objeto de hacer uso de los teoremas:

$$T.33: \text{Si } b \geq 0 \rightarrow a^2 > b \leftrightarrow a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$$

$$T.34: \text{Si } b > 0 \rightarrow a^2 < b \leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

EJEMPLO 8. Resolver: $3x^2-2x-5 < 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Solución. } 3x^2-2x-5 < 0 &\leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \frac{5}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
 &\leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 < \frac{16}{9} \leftrightarrow -\frac{4}{3} < x - \frac{1}{3} < \frac{4}{3} \quad (T.34) \\
 &\leftrightarrow -1 < x < 5/3 \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 5/3\}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 9. Resolver: $2x^2-x-10 \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Solución. } 2x^2-x-10 \geq 0 &\leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \geq 5 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
 &\leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{81}{16} \leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4} \geq \frac{9}{4}\right) \vee \left(x - \frac{1}{4} \leq -\frac{9}{4}\right) \\
 &\leftrightarrow (x \geq 5/2) \vee (x \leq -2) \\
 \therefore S &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \vee x \geq 5/2\}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 10. Resolver: $x^2-6x+25 < 11$

$$\text{Solución. } x^2-6x+25 < 11 \leftrightarrow x^2-6x < -14$$

$$\text{Completando el cuadrado: } x^2-6x+(3)^2 < -14+(3)^2 \leftrightarrow (x-3)^2 < -5$$

En este caso no se puede aplicar el Teorema 34, toda vez que $b=-5 < 0$, es decir, $\nexists x \in \mathbb{R} | (x-3)^2 < -5$. Por tanto: $S = \emptyset$

EJEMPLO 11. Resolver: $4x^2-12x+9 \leq 0$

$$\text{Solución. Completando el cuadrado obtenemos: } (x-3/2)^2 \leq 0 \quad (\text{Verificar})$$

Aquí tampoco se puede aplicar el Teorema 34, porque $b=0$, sin embargo, la solución no es $\emptyset$, ya que $x=3/2$ hace verdadera la proposición.

$$\therefore S = \{3/2\}$$

EJEMPLO 12. Resolver: $x^2 - 8x + 8 > 4 - 4x$

Solución. $x^2 - 8x + 8 > 4 - 4x \leftrightarrow x^2 - 4x > -4 \leftrightarrow (x-2)^2 > 0$

Vemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, es verdadera la proposición, excepto para $x=2$ ya que $0 \nless 0$. $\therefore S = \mathbb{R} - \{2\}$

EJEMPLO 13. Hallar los valores de m para que la ecuación cuadrática:

$(m+3)x^2 - 2mx + 4 = 0$ tiene soluciones reales.

Solución. Recordemos que una ecuación cuadrática tiene soluciones reales si $b^2 - 4ac > 0$ o si $b^2 - 4ac = 0$

Entonces: $(-2m)^2 - 4(m+3)(4) \geq 0 \leftrightarrow m^2 - 4m \geq 12 \leftrightarrow (m-2)^2 \geq 16$

$$\leftrightarrow (m-2 \geq 4) \vee (m-2 \leq -4) \quad (T.33)$$

$$\leftrightarrow (m \geq 6) \vee (m \leq -2)$$

Dado que $m \neq -3 \rightarrow S = \{m \in \mathbb{R} | m \leq -2 \vee m \geq 6\} - \{-3\}$

EJEMPLO 14. Determinar los valores de k para que la función cuadrática

$f(x) = 4x^2 + k(1-4x) + 2$ no tenga interceptos con el eje X .

Solución. $f(x) = 4x^2 - 4kx + (2+k)$

La gráfica de una función cuadrática no intercepta al eje X cuando el discriminante de la ecuación $f(x) = 0$ es menor que cero, esto es:

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 16k^2 - 4(4)(2+k) < 0$$

$$\leftrightarrow k^2 - k < 2 \leftrightarrow (k - 1/2)^2 < 9/4 \leftrightarrow (-\frac{3}{2} < k - \frac{1}{2} < \frac{3}{2})$$

$$\leftrightarrow (-1 < k < 2)$$

$$\therefore S = \{k \in \mathbb{R} | -1 < k < 2\}$$

4.8.3 INECUACIONES RACIONALES

Una inecuación racional es una desigualdad condicional que reducida a su más simple expresión tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son monomios, binomios o polinomios no nulos con coeficientes reales.

Entre las variadas técnicas para resolver una inecuación racional, destacamos los siguientes casos:

PRIMER CASO. La inecuación racional tiene la forma:

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{ax+b}{cx+d} < 0$$

Según el Teorema 24 (a^{-1} tiene el mismo signo que a), estas inecuaciones pueden reducirse a una inecuación cuadrática equivalente:

$$(ax+b)(cx+d) > 0 \quad \text{o} \quad (ax+b)(cx+d) < 0$$

de modo tal que pueda ser aplicable el Teorema 30 para su solución.

EJEMPLO 15. Resolver la inecuación: $\frac{x+1}{x-2} > 0$

Solución. La inecuación equivalente es: $(x+1)(x-2) > 0$

$$+ (x+1)(x-2) > 0 \leftrightarrow (x+1 > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x+1 < 0 \wedge x-2 < 0) \quad (T.30)$$

$$\leftrightarrow (x > -1 \wedge x > 2) \vee (x < -1 \wedge x < 2)$$

$$\leftrightarrow (x > 2) \vee (x < -1)$$

$$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \vee x > 2\}$$

EJEMPLO 16. Resolver: $\frac{2x-3}{x-2} \geq 3$

Solución. $\frac{2x-3}{x-2} - 3 \geq 0 \leftrightarrow \frac{3-x}{x-2} \geq 0 \leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0 \quad (T.27)$

Inecuación equivalente: $(x-2)(x-3) \leq 0$, $x \neq 2$

$$+ (x-2)(x-3) \leq 0 \leftrightarrow (x-2 > 0 \wedge x-3 \leq 0) \vee (x-2 < 0 \wedge x-3 \geq 0) \quad (T.30ii)$$

$$\leftrightarrow (x > 2 \wedge x \leq 3) \vee (x < 2 \wedge x \geq 3)$$

$$\leftrightarrow (2 < x \leq 3) \vee (\emptyset) \leftrightarrow (2 < x \leq 3)$$

$$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 3\}$$

SEGUNDO CASO. La inecuación tiene la forma:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} < 0$$

Primera Hipótesis. Uno de los dos trinomios no tiene soluciones reales o tiene una raíz doble. Es decir, si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, o si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; entonces, ax^2+bx+c ó $a'x^2+b'x+c'$ tienen signo fijo (> 0 , $\forall x \in \mathbb{R}$).

EJEMPLO 17. Resolver: $\frac{x^2-x-12}{x^2-2x+3} < 0$

Solución. Inecuación equivalente: $(x^2-2x+3)(x^2-x-12) < 0 \quad (1)$

Para el primer factor: $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$, luego no tiene soluciones reales, por lo que $x^2-2x+3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para el segundo factor: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 49 > 0$

Luego, para hallar los valores de x que satisfacen (1), bastará resolver:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 < 0 &\leftrightarrow (x-4)(x+3) < 0 \\ &\leftrightarrow (x-4 > 0 \wedge x+3 < 0) \vee (x-4 < 0 \wedge x+3 > 0) \\ &\leftrightarrow (x > 4 \wedge x < -3) \vee (x < 4 \wedge x > -3) \\ &\leftrightarrow (\emptyset) \vee (-3 < x < 4) \leftrightarrow (-3 < x < 4) \\ \therefore S &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 18. Resolver: $1 + \frac{15-7x}{x^2+x-6} > 0$

Solución. Efectuando operaciones se tiene: $\frac{x^2-6x+9}{x^2+x-6} > 0$

$$\text{Inecuación equivalente: } (x^2-6x+9)(x^2+x-6) > 0 \quad (1)$$

Para el primer factor: $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$, el trinomio es un cuadrado perfecto, por lo que: $x^2-6x+9 = (x-3)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$. En este caso $x=3$ es un valor restringido porque no satisface la inecuación original.

Para el segundo factor: $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-6) = 25 > 0$

Luego, para que se cumpla (1), bastará resolver la inecuación:

$$\begin{aligned} x^2+x-6 > 0 &\leftrightarrow (x+3)(x-2) > 0, \quad x \neq 3 \quad (\text{Restricción}) \\ &\leftrightarrow (x+3 > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x+3 < 0 \wedge x-2 < 0), \quad x \neq 3 \\ &\leftrightarrow (x > 2) \vee (x < -3), \quad x \neq 3 \\ \therefore S &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \vee x > 2\} - \{3\} \end{aligned}$$

Segunda Hipótesis. Ambos trinomios tienen raíces reales y distintas, entonces la inecuación equivalente se transforma en una inecuación polinómica.

TERCER CASO. La inecuación racional tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos de grado mayor que dos.

Nota. Debido a las diversas alternativas que se presentan en la resolución de inecuaciones de este caso, así como de la segunda hipótesis del caso anterior, los ejemplos ilustrativos correspondientes se darán más adelante, cuando desarrollemos, en las siguientes secciones, el estudio de la recta real y los intervalos.

EJERCICIOS: Grupo 23

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{2}{3}(4x+2)-(x-2) \leq \frac{4}{13}(4x+5)$

10. $8(x-1)^2 > 8-(x-4)^2$

2. $\frac{x-3}{3} + \frac{5}{4} < \frac{x}{12} + \frac{2x+9}{15}$

11. $\frac{3x+8}{x-1} > -2$

3. $11 - \frac{3}{2}x < \frac{1}{3}(5x+14) \geq \frac{9}{5}(2+x)$

12. $\frac{x-1}{x+3} > x$

4. $\frac{x}{2} + \frac{6}{5} < \frac{3x}{4} + \frac{11}{5} > 2x - \frac{14}{5}$

13. $\frac{2x+3}{x-4} \leq 1$

5. $3x^2-10x+3 < 0$

14. $\frac{3x-2}{x+1} > 4$

6. $4x^2-x-5 \leq 0$

15. $\frac{13x+3}{x-3} > 7-2x$

7. $x(3x+2) < (x+2)^2$

16. $\frac{x^2+2x+3}{x^2-3x+2} > 0$

8. $4x^2-8x+1 < 0$

17. $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x-1} > 6$

9. $5x^2-14x+9 \leq 0$

18. $\frac{2}{3} < \frac{x-1}{x+3} < \frac{7}{9}$

19. Sean los conjuntos $A=\{x \in \mathbb{R} | x^2-x-2 \geq 0\}$ y $B=\{x \in \mathbb{R} | x^2-4x-5 \leq 0\}$. Hallar $A \cap B$.

20. Si a, b son reales; se definen las operaciones: $a*b=b-a$ y $a\#b=2a+2$. Hallar el conjunto solución de: $[(x+3)*(x+2)]*(x+6) \geq x\#(x+2)$.

21. Definimos la operación $*$ del siguiente modo: $x*z=x(z+2)$, $\forall x, z \in \mathbb{R}$. Hallar el conjunto solución de: $(z-3)*z > 0$

22. En $\mathbb{R}$ definimos la operación $*$ por: $a*b = \frac{a+b}{2}$; según esto, resolver:
 $(2-x)*1 \leq (2*x)*\frac{3}{4} \leq (3+2x)*5$

23. Sea la operación binaria interna $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \mapsto a*b$$

tal que $a*b=a+b-7$. Si c^{-1} representa el inverso de c respecto de la operación $*$, hallar el conjunto solución de: $3^{-1}*x \leq (4x)*(5*2)^{-1}$.

24. En $\mathbb{R}$ definimos la operación binaria $*$ por: $a*b=a-b+2$. Según esto, resolver: $2^{-1}*x \leq (2x*5)*(1*3)^{-1}$.

25. Determinar para qué valor de k , la inecuación $(x+k)(x+3) > (x+2k)(x+2)$

tiene un conjunto solución $S=\{x \in \mathbb{R} | x < -2\}$.

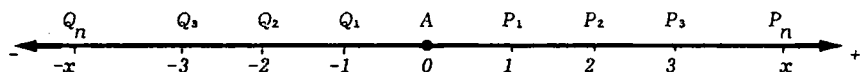
26. Si $A=\{x \in \mathbb{R} | \frac{1}{x-4} < \frac{3}{3x-1}\}$, hallar la suma de los elementos de $\mathbb{Z} \cap A$.
27. Determinar para qué valor de k , $k > 0$ y $2x+3 < \frac{3x-4k}{k}$, es $x > 3$.
28. Sea el conjunto $A=\{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 60\}$. Hallar los elementos del conjunto A que están en el conjunto solución de la inecuación: $\frac{3x-1}{x+4} > 1$
29. Si $9-2t-4x^2 \leq -7x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hallar el menor valor de t que satisfaga la desigualdad.
30. Sean los conjuntos $A=\{x \in \mathbb{N} | x^2 < 68\}$ y $B=\{x \in \mathbb{R} | \frac{2x}{x-2} > 3\}$; si n es el número de elementos de $P(A \cap B)$, hallar $m-n$. (Considerar $0 \in \mathbb{N}$)
31. Determinar m de manera que la raíz de la ecuación en $\mathbb{R}$: $\frac{4}{x} = \frac{5m-1}{5+2m}$, sea menor que 1.
32. Sea $A=\{x \in \mathbb{R} | 0 < x^2 < 50\} \cap \mathbb{N}$, y sea B el conjunto solución de la inecuación: $\frac{1}{x+5} < \frac{1}{x-4}$, en $\mathbb{R}$. Hallar la suma de los elementos de $A \cap B$.
33. Hallar los valores de m para que el conjunto solución de la ecuación: $(m+5)x^2+3mx-4(m-5)=0$ no esté contenido en $\mathbb{R}$.



4.9 LA RECTA REAL

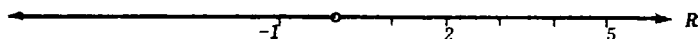
Si sobre una recta orientada L se fija un punto A , de modo que le corresponde el número "0", y convenimos en asegurar números mayores que cero a los puntos que están a la derecha de A , $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ y números menores que cero a los puntos a la izquierda de A , $(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$, hasta que ningún punto quede sin su correspondiente número real y ningún número real sin su correspondiente punto; habremos establecido una correspondencia biunívoca o perfecta entre los elementos de $\mathbb{R}$ y los puntos de la recta $L: 0 \leftrightarrow A$, $1 \leftrightarrow P_1$, $2 \leftrightarrow P_2$, $-1 \leftrightarrow Q_1$, $-2 \leftrightarrow Q_2$, etc. Es decir, a cada punto de una recta le corresponde un número real y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta.

Esta correspondencia se objetiviza de la siguiente manera:



y constituye lo que se denomina la **recta real** o **recta numérica** o **eje lineal** de coordenadas.

Ejemplos. (1) El conjunto solución de la ecuación $(x+1)(x-2)(x-5)=0$ es: $\{-1, 2, 5\}$ y se representa en la recta real:



(2) El conjunto solución de la inecuación $(x+2)(x-3)<0$ es $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}$ y en la recta real se representa así:

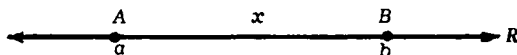


Obsérvese que el conjunto solución de una inecuación se representa en la recta real como un subconjunto de $\mathbb{R}$, es decir, un segmento de recta en la que están incluidos infinitud de puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad, excepto los extremos -2 y 3 .

Esto nos obliga a definir ciertas notaciones para subconjuntos de $\mathbb{R}$, a los que daremos representaciones geométricas en la presente sección.

4.10 INTERVALOS

Si representamos la desigualdad $a < b$ sobre una recta numérica:



vemos que el punto A, que representa al número a , está a la izquierda del punto B que representa al número b . Esto nos da una idea de que existen números reales entre a y b o también que existen números que están antes que a y después de b (Subconjuntos de $\mathbb{R}$). Si ocurre que $a < x$ y $x < b$, esto se puede escribir como una desigualdad continua de la siguiente manera:

$$a < x < b$$

A estos subconjuntos numéricos en $\mathbb{R}$, que están definidos mediante la propiedad de sus elementos satisfacen ciertas desigualdades, se les denomina **intervalos**.

Definición 4.15 INTERVALO ABIERTO

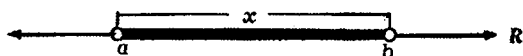
Si a y b son números reales tales que $a < b$, se denomina **intervalo abierto** al conjunto de todos los reales x para los cuales: $a < x < b$. (No están incluidos los extremos a y b). Se denota $\langle a, b \rangle$ o también: $]a, b[$, de modo que:

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$$\text{o si } x \in \langle a, b \rangle \leftrightarrow a < x < b$$

Obsérvese que si $a = b \rightarrow \langle a, b \rangle = \emptyset$

En la representación gráfica del intervalo, los puntos extremos se indican con círculos en blanco.

**Definición 4.16: INTERVALO CERRADO**

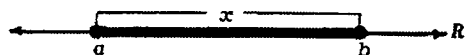
Si a y b son números reales tales que $a \leq b$, se denomina **intervalo cerrado** al conjunto de todos los reales x para los cuales: $a \leq x \leq b$. (Están incluidos los extremos a y b). Se denota por: $[a, b]$ de modo que:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$\text{o si } x \in [a, b] \leftrightarrow a \leq x \leq b$$

Obsérvese que si $a = b \rightarrow [a, b] = \{a\}$ o $\{b\}$

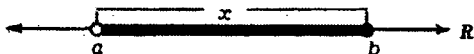
En la representación gráfica del intervalo, los extremos se indican con círculos en negro.

**Definición 4.17: INTERVALO SEMIABIERTO POR LA IZQUIERDA**

Si a y b son números reales tales que $a < b$, se denomina **intervalo semiabierto por la izquierda** al conjunto de todos los números reales x para los cuales: $a < x \leq b$. Se denota: $\langle a, b]$, tal que,

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

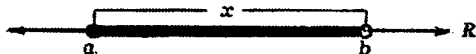
$$\text{o si } x \in \langle a, b] \leftrightarrow a < x \leq b$$

**Definición 4.18: INTERVALO SEMIABIERTO POR LA DERECHA**

Si a y b son números reales tales que $a < b$, se denomina **intervalo semiabierto por la derecha** al conjunto de todos los reales x para los cuales: $a \leq x < b$. Se denota por: $[a, b)$ de modo que:

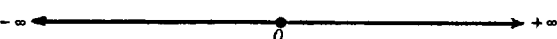
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

$$\text{o si } x \in [a, b) \leftrightarrow a \leq x < b$$



Definición 4.19: INTERVALOS INFINITOS

Para indicar a los conjuntos de números reales que se extienden indefinidamente por la derecha o por la izquierda de un número a , existen los llamados **intervalos infinitos**, que tienen la forma:

- a) $\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ 
- b) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ 
- c) $\langle -\infty, a \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ 
- d) $\langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ 
- e) $\langle -\infty, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$ 

Nota. La notación ∞ , que se lee *infinito*, no es un número real, sino un símbolo que se utiliza para indicar que a partir de un número x hay números tan grandes como se quiera, por la derecha ($+\infty$) o por la izquierda ($-\infty$)

4.11 OPERACIONES CON INTERVALOS

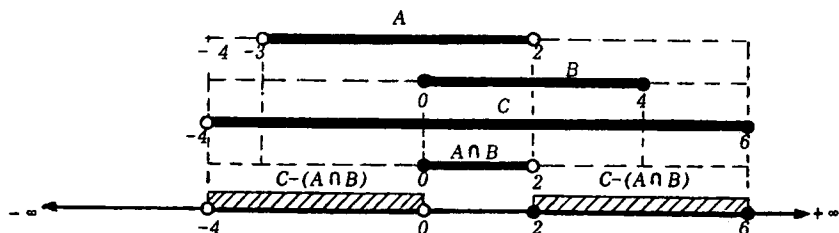
Siendo los intervalos subconjuntos de los números reales, es posible realizar con ellos las propiedades operativas de conjuntos, como son la intersección, unión, diferencia y complementación.

EJEMPLO 1. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 \leq 4\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 6\}$. Efectuar las siguientes operaciones:

- a) $C - (A \cap B)$ b) $(A - B)' - C$ c) $(B \cap C)' - (A \cup B)'$

Solución. En B : $(x-2)^2 \leq 4 \leftrightarrow -2 \leq x-2 \leq 2 \leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$

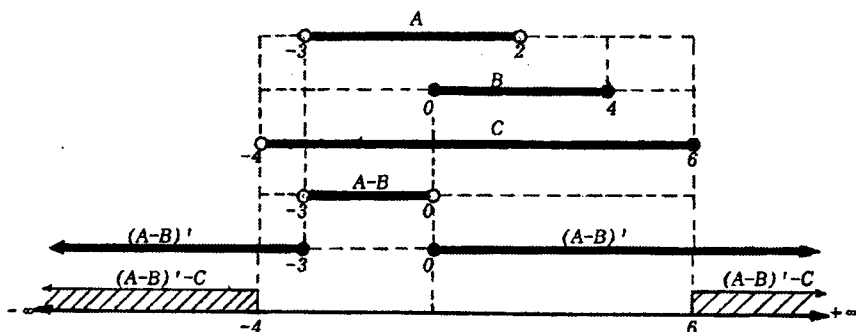
Entonces: $A = \langle -3, 2 \rangle$, $B = [0, 4]$, $C = \langle -4, 6 \rangle$



a) Los pasos que se siguieron para $C-(A \cap B)$ son los siguientes:

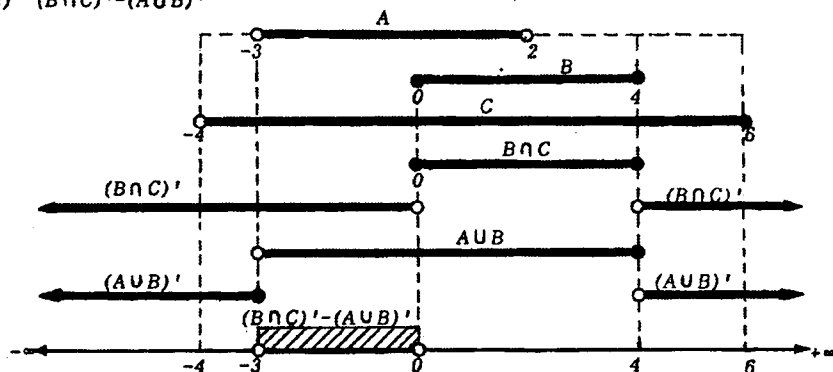
- (1) $A \cap B = [0, 2]$ (Conjunto de elementos comunes de A y B)
- (2) $C-(A \cap B)$ es el conjunto de elementos de C que no pertenecen a $A \cap B$.
- (3) Obsérvese que: $0 \in (A \cap B) \rightarrow 0 \notin [C-(A \cap B)]$ (Abierto en 0)
 $2 \notin (A \cap B) \rightarrow 2 \in [C-(A \cap B)]$ (Cerrado en 2)
- (4) Por lo tanto: $C-(A \cap B) = \langle -4, 0 \rangle \cup [2, 6]$

b) $(A-B)'-C$



- (1) $A-B$ es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no a B. Obsérvese que: $0 \in B \rightarrow 0 \notin (A-B) \rightarrow A-B = \langle -3, 0 \rangle$
- (2) $(A-B)'$ es el conjunto de elementos que no pertenecen a $(A-B)$. Como $-3 \notin (A-B)$ y $0 \notin (A-B) \rightarrow -3, 0 \in (A-B)' \rightarrow (A-B)' = \langle -\infty, -3 \rangle \cup [0, +\infty)$
- (3) $(A-B)'-C$ es el conjunto de elementos que pertenecen a $(A-B)'$ y no a C. Vemos que: $-4 \notin C \rightarrow -4 \in (A-B)'$ (Cerrado en -4)
 $6 \in C \rightarrow 6 \notin (A-B)'$ (Abierto en 6)
- (4) Por lo tanto: $(A-B)'-C = \langle -\infty, -4 \rangle \cup (6, +\infty)$

c) $(B \cap C)'-(A \cup B)'$



(1) Vemos que $B \subset C \rightarrow B \cap C = [0, 4] \rightarrow (B \cap C)' = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$

(2) $A \cup B = \langle -3, 2 \rangle \cup [0, 4] = \langle -3, 4] \rightarrow (A \cup B)' = \langle -\infty, -3] \cup \langle 4, +\infty \rangle$

(3) Por lo tanto: $(B \cap C)' - (A \cup B)' = \langle -3, 0 \rangle$

EJEMPLO 2. Supuesto que los antecedentes son verdaderos, establecer el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si $(5x+1) \in \langle -3, 2 \rangle \rightarrow (\frac{1}{2x-2}) \in \langle -\frac{5}{8}, -\frac{5}{18} \rangle$

b) Si $(2x-3) \in \langle -7, 12 \rangle \rightarrow (-3x+5) \in \langle -18, 8 \rangle$

c) Si $(5x-1) \in \langle 4, 9 \rangle \rightarrow (\frac{1}{3x-2}) \in \langle -1, 2 \rangle$

Solución. (1) Si $(5x+1) \in \langle -3, 2 \rangle \leftrightarrow -3 < 5x+1 < 2$ (Def. 4.15)

$$\leftrightarrow -\frac{4}{5} < x < \frac{1}{5} \leftrightarrow -\frac{8}{5} < 2x < \frac{2}{5} \leftrightarrow -\frac{18}{5} < 2x-2 < -\frac{8}{5}$$

$$\leftrightarrow -\frac{5}{8} < \frac{1}{2x-2} < -\frac{5}{18} \leftrightarrow (\frac{1}{2x-2}) \in \langle -\frac{5}{8}, -\frac{5}{18} \rangle$$

La afirmación es verdadera.

(2) Si $(2x-3) \in \langle -7, 12 \rangle \leftrightarrow -7 < 2x-3 < 12 \leftrightarrow -2 < x < \frac{15}{2}$ (0.3)

$$\leftrightarrow -\frac{45}{2} < -3x < 6 \leftrightarrow -\frac{35}{2} < -3x+5 < 11$$

Entonces: $(-3x+5) \in \langle -\frac{35}{2}, 11 \rangle \not\subset \langle -18, 8 \rangle \rightarrow (-3x+5) \notin \langle -18, 8 \rangle$

La afirmación es falsa.

(3) Si $(5x-1) \in \langle 4, 9 \rangle \leftrightarrow 4 < 5x-1 < 9 \leftrightarrow 1 < x < 2 \leftrightarrow 3 < 3x < 6$

$$\leftrightarrow 1 < 3x-2 < 4 \leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{3x-2} < 1$$

Como: $-1 < \frac{1}{4}$ y $1 < 2 \rightarrow -1 < \frac{1}{3x-2} < 2 \rightarrow (\frac{1}{3x-2}) \in \langle -1, 2 \rangle$

La afirmación es verdadera.

EJEMPLO 3. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3) \in [-5, 3]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{2-x}{2}) \in [-4, 2]\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{3x-1}{2}) \in \langle -3, 4 \rangle\}$. Hallar $P = [(A-B) \cup (B-C)] \cap (A \cup C)$.

Solución. Para A: $(x-3) \in [-5, 3] \leftrightarrow -5 < x-3 < 3 \leftrightarrow -2 < x < 6 \leftrightarrow x \in [-2, 6]$

Para B: $(\frac{2-x}{2}) \in [-4, 2] \leftrightarrow -4 \leq \frac{2-x}{2} \leq 2 \leftrightarrow -8 \leq 2-x \leq 4$

$$\leftrightarrow -4 \leq x-2 \leq 8 \leftrightarrow -2 \leq x \leq 10 \leftrightarrow x \in [-2, 10]$$

Para C: $(\frac{3x-1}{2}) \in \langle -3, 4 \rangle \leftrightarrow -3 < \frac{3x-1}{2} < 4 \leftrightarrow -6 < 3x-1 < 8$

$$\leftrightarrow -5 < 3x < 9 \leftrightarrow -\frac{5}{3} < x < 3 \leftrightarrow x \in \langle -5/3, 3 \rangle$$

Luego, $A-B = [-2, 6] - [-2, 10] = \emptyset$ ($A \subset B$)

$$B - C = [-2, 10] - <-5/3, 3> = [-2, -5/3] \cup [3, 10]$$

$$A \cup C = [-2, 6] \cup <-5/3, 3> = [-2, 6] = A \quad (C \subset A)$$

$$\text{Luego: } P = (\emptyset \cup [-2, -5/3] \cup [3, 10]) \cap [-2, 6] = [-2, -5/3] \cup [3, 6]$$

EJEMPLO 4. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$; $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow x \in B\}$, $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in C \leftrightarrow x \in A\}$. Hallar el conjunto $P \cap Q$.

Solución. Tenemos: $A = <2, 5]$, $B = [-3, 2>$, $C = <5, +\infty>$

En la equivalencia lógica: $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$

si hacemos: $p = A$ y $q = B \rightarrow A \leftrightarrow B \equiv (A \cap B) \vee (A \cup B)'$

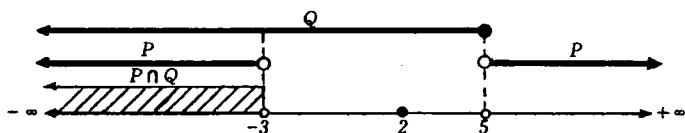
$$\begin{aligned} \text{Entonces: } x \in A \leftrightarrow x \in B &\equiv x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cup B)' \equiv x \in (A \cap B) \vee x \notin (A \cup B) \\ &\equiv x \in <2, 5] \cap [-3, 2> \vee x \notin <2, 5] \cup [-3, 2> \\ &\equiv x \in (\emptyset) \vee x \notin ([-3, 5] - \{2\}) \equiv x \notin ([-3, 5] - \{2\}) \\ &\equiv x \in <-\infty, -3> \cup <5, +\infty> \cup \{2\} \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } P = <-\infty, -3> \cup <5, +\infty> \cup \{2\}$$

En Q utilizamos la equivalencia condicional: $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$$x \in C \leftrightarrow x \in A \equiv x \notin C \vee x \in A \equiv x \notin <5, +\infty> \vee x \in <2, 5]$$

$$\equiv x \in <-\infty, 5] \vee x \in <2, 5] \equiv <-\infty, 5] = Q$$



$$\therefore P \cap Q = <-\infty, -3> \cup \{2\}$$

EJEMPLO 5. Si $(2x+1) \in [5, 9]$, hallar el menor valor de M que satisface la

$$\text{desigualdad: } \frac{x+3}{x-5} < M$$

$$\text{Solución. Efectuando la división: } \frac{x+3}{x-5} = 1 + \frac{8}{x-5} \rightarrow 1 + \frac{8}{x-5} < M \quad (\alpha)$$

Partiremos de $(2x+1) \in [5, 9]$ para llegar a la expresión (α)

$$(1) \text{ Si } (2x+1) \in [5, 9] \rightarrow 5 < 2x+1 < 9 \rightarrow 2 < x < 4 \quad (0.3)$$

$$(2) \text{ Sumando } -5: \rightarrow -3 < x-5 < -1$$

$$(3) \text{ Invertiendo: } \rightarrow -1 < \frac{1}{x-5} < -\frac{1}{3} \rightarrow -8 < \frac{8}{x-5} < -\frac{8}{3} \quad (\text{T.29 y T.28})$$

$$(4) \text{ Sumando } -1: \rightarrow -7 < 1 + \frac{8}{x-5} < -\frac{5}{3} \quad (\beta)$$

(5) Comparando (α) y (β) se deduce que: $M = -5/3$

EJEMPLO 6. Si $x \in [1/4, 3/2]$, hallar el mayor número m que satisface la desigualdad: $\frac{x-2}{x-4} > m$

Solución. Efectuando la división: $\frac{x-2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4} \rightarrow 1 + \frac{2}{x-4} > m$ (a)

Partiremos de $x \in [1/4, 3/2]$ para construir la expresión (a):

$$(1) \text{ Si } x \in [1/4, 3/2] \leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2} \leftrightarrow -\frac{15}{4} \leq x-4 \leq -\frac{5}{2} \quad (\text{Def. 4.15 y 0.3})$$

$$(2) \text{ Invertiendo: } \leftrightarrow -\frac{2}{5} \leq \frac{1}{x-4} \leq -\frac{4}{15} \leftrightarrow -\frac{4}{5} \leq \frac{2}{x-4} \leq -\frac{8}{15} \quad (\text{T.29})$$

$$(3) \text{ Sumando 1: } \leftrightarrow \frac{1}{5} \leq 1 + \frac{1}{x-4} \leq \frac{7}{15} \quad (\text{b})$$

(4) Comparando (a) y (b) se deduce que: $m = 1/5$

EJEMPLO 7. Dados los conjuntos: $U = \langle -2, 14 \rangle$, $A = \{x \in U \mid x \in \langle -3, 5 \rangle \rightarrow x \notin \langle 0, 9 \rangle\}$, $B = \{x \in U \mid x > -1 \leftrightarrow x \notin \langle -2, 2 \rangle\}$ y las siguientes operaciones binarias: $p * q \equiv \neg(p \leftrightarrow q)$, $p \# q \equiv \neg(p + q)$. Si $M = \{x \in U \mid x \in A * x \in B\}$, $N = \{x \in U \mid x \notin A \# x \notin B\}$, $Q = \{x \in U \mid x \in M * x \notin N\}$. Hallar $(M \cup N)' \cap Q$

Solución. Para el conjunto A tenemos: $p + q \equiv \neg p \vee q$

$$A = \{x \in U \mid x \in \langle -3, 5 \rangle \rightarrow x \notin \langle 0, 9 \rangle\} = A = \{x \in U \mid x \notin \langle -3, 5 \rangle \vee x \notin \langle 0, 9 \rangle\}$$

$$+ A = \{x \in U \mid x \in \langle -2, -3 \rangle \cup \langle 5, 14 \rangle \vee x \in \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 9, 14 \rangle\} = \{x \in U \mid x \in \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 5, 14 \rangle\}.$$

Para el conjunto B: $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)$

$$+ B = \{x \in U \mid x \in [-1, 14] \leftrightarrow x \notin \langle -2, 2 \rangle\} = \{x \in U \mid x \in [-1, 14] \leftrightarrow x \in [2, 14]\}$$

$$+ B = \{x \in U \mid x \in ([-1, 14] \cap [2, 14]) \vee x \notin ([-1, 14] \cup [2, 14])\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in [2, 14] \vee x \notin [-1, 14]\} = \{x \in U \mid x \in [2, 14] \vee x \in \langle -2, -1 \rangle\}$$

$$\text{Entonces: } B = \langle -2, -1 \rangle \cup [2, 14]$$

$$\text{Para el conjunto } M = \{x \in U \mid x \in A * x \in B\}$$

$$\text{Por la operación } *: A * B = \neg(A \leftrightarrow B) \equiv \neg[(A \cap B) \cup (A \cup B)']$$

$$\equiv [(A \cap B) \cup (A \cup B)']' \equiv (A \cap B)' \cap (A \cup B)$$

$$A \cap B = (\langle -2, 0 \rangle \cup \langle 5, 14 \rangle) \cap (\langle -2, -1 \rangle \cup [2, 14]) = \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 5, 14 \rangle$$

$$\text{Entonces: } (A \cap B)' = [-1, 5]$$

$$A \cup B = (\langle -2, 0 \rangle \cup \langle 5, 14 \rangle) \cup (\langle -2, -1 \rangle \cup [2, 14]) = \langle -2, 0 \rangle \cup [2, 14]$$

$$\text{Luego: } M = [-1, 5] \cap (\langle -2, 0 \rangle \cup [2, 14]) = [-1, 0] \cup [2, 5]$$

(Verificar el resultado para M en una escala real)

Para el conjunto $N = \{x \in U \mid x \notin A \# x \notin B\}$, se tiene:

$$\text{Por la definición de complemento: } x \notin A \# x \notin B \equiv A' \# B'$$

$$\text{Por la operación } \#: A' \# B = \neg(A' + B') \equiv A' \cap B \quad (\neg(p + q) \equiv p \wedge \neg q)$$

$$A' = \langle 0, 5 \rangle \text{ y } B = \langle -2, -1 \rangle \cup [2, 14] \rightarrow N = A' \cap B = [2, 5]$$

Para el conjunto $Q = \{x \in U \mid x \in M * x \notin N\}$, se tiene:

$$\begin{aligned} M * N' &= \sim(M \leftrightarrow N') \equiv (M \leftrightarrow N')' \equiv [(M \cap N') \cup (M \cup N')]' \\ &\equiv (M \cap N')' \cap (M \cup N') \quad (\text{Comp.C.9 y C.6}) \end{aligned}$$

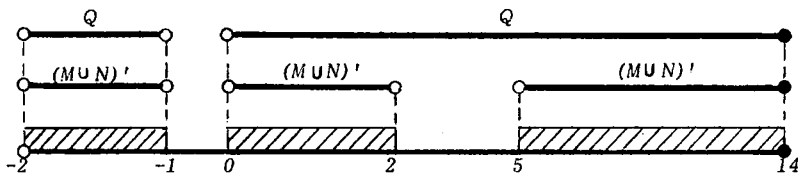
$$M \cap N' = \{[-1, 0] \cup [2, 5]\} \cap \{<-2, 2> \cup <5, 14]\} = [-1, 0]$$

$$\text{Entonces: } (M \cap N')' = <-2, -1> \cup <0, 14] ; \quad M \cup N' = <-2, 14] = U$$

$$\text{Luego: } Q = (<-2, -1> \cup <0, 14]) \cap (<-2, 14]) = <-2, -1> \cup <0, 14]$$

$$M \cup N = [-1, 0] \cup [2, 5] \rightarrow (M \cup N)' = <-2, -1> \cup <0, 2> \cup <5, 14]$$

Ilustración gráfica de $(M \cup N)' \cap Q$:



$$\therefore (M \cup N)' \cap Q = (M \cup N)' = <-2, -1> \cup <0, 2> \cup <5, 14]$$

EJERCICIOS: Grupo 24

- Sean los intervalos: $A = <6, 12>$, $B = <7, 16]$, $C = [16, +\infty)$. Hallar $(A \cap B)' - C'$.
- Si $A = <-7, -3]$, $B = <-3, 4>$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$. Hallar: $C' - (A \cup B)'$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5, 5> \wedge x \in [0, 8]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-4, 6] \vee x \in [4, 10]\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-5, 2] \vee x \in [0, 8]\}$. Hallar: $(A \cap B) \Delta C$.
- Sean los intervalos: $A = [-2, 5]$, $B = <1, 3]$ y $C = <-3, 5]$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 - $A' \subset B'$
 - $(A - B)' \cap C' = \emptyset$
 - $A - B = C - [B \cup (C - A)]$
- Si se dan los conjuntos en $\mathbb{R}$: $A = <-3, 8> - \{1\}$, $B = <-\infty, 3]$ y $C = [6, +\infty)$. Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 - $(A \cup B) \subset <-\infty, 7]$
 - $(A \cap C) \cup B = <6, 8> \cup <-\infty, -3>$
 - $(C - A) = [8, +\infty)$
 - $A' = <-\infty, -3] \cup [8, +\infty)$
- Sean: $A = \mathbb{N} \cap (<5, 8] \cup [20, 36])$, $B = \mathbb{N} \cap <7, 24]$; $C = \mathbb{N} \cap <22, 40]$; $D = [(B \cup C) - (C - B)] \cup (A - B')$; $E = C \cup [(A - B) \cup C']'$. Hallar el número de elementos de $D \cap E$.
- Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 4 < x - 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 2x < x + 8\}$, $C = [1, 3]$. De las afirmaciones siguientes, cuántas son verdaderas?
 - $(B \cup C) - A = B$
 - $(B - C) \cup <1, 3> = <-1, +\infty>$

- c) $A' - B = [-11, -1] \cup [8, +\infty)$ d) $(A \cup C) \cup \langle -11, 1 \rangle = \langle -\infty, 3 \rangle$
8. Demostrar que:
- a) Si $x \in \langle -3, 2 \rangle \rightarrow 0 < \frac{x+3}{7} < \frac{5}{7}$ c) Si $x \in \langle -1, 5 \rangle \rightarrow (\frac{3}{2x+5}) \in \langle 0, 1 \rangle$
- b) Si $x \in \langle -3, 5 \rangle \rightarrow (\frac{1}{x+5}) \in \langle 0, 1 \rangle$ d) Si $x \in \langle 2, 4 \rangle \rightarrow (\frac{1}{2x+3}) \in \langle \frac{1}{11}, \frac{1}{7} \rangle$
9. Determinar el menor M y el mayor m tal que si $x \in [-2, 3]$, entonces:
- $$m \leq \frac{x+5}{x+7} \leq M$$
10. Determinar el mayor valor de M de modo que si $x \in \langle -4, 4+M \rangle \rightarrow \sqrt{x} \in \langle 1, 3 \rangle$.
11. Si $(2x+1) \in [5, 9]$, hallar el menor valor de M que satisface $\frac{x+3}{x-5} \leq M$.
12. Para $x \in [1/2, 3/2]$, sea M el menor valor y m el mayor valor que satisface la desigualdad: $m \leq \frac{x+2}{x-2} \leq M$; hallar $M-m$.
13. Determinar el menor M y el mayor m , tal que $\forall x \in [2, 5]$, entonces:
- $$m \leq \frac{4x^3+x^2+8x+2}{2x^3+2x} \leq M$$
14. Hallar el menor número M con la propiedad de que $\forall x \in \mathbb{R}: 3+36x-12x^2 \leq M$.
15. Hallar el mayor número m con la propiedad de que $\forall x \in \mathbb{R}: m \leq 4x^2-12x+3$.
16. Sabiendo que $x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$, hallar M y m , si M y m son respectivamente el menor y el mayor valor que satisfacen: $m < [\frac{6}{x(7-x^2)} - 2]^2 < M$
17. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 7\}$, $C = \{7, 8, 9, 10\}$. Hallar: $(A-B) \cup C \cup (B \cap A')$.
18. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in [-3, 5]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{2-x}{3}) \in \langle -2, 4 \rangle\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin B \leftrightarrow x \in A\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A + x \in C\}$. Hallar los intervalos que corresponden a las siguientes operaciones:
- a) $(A-B) \cap C$ b) $(A \cup B) - D$ c) $(C \cap D) \cup A$ d) $(A' - D') - B$
20. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{5-x}{3}) \in [-4, 4]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{x-2}{2}) \in [-6, 2]\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (4x-2) \in \langle -1, 3 \rangle\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (3-2x) \in \langle -6, 4 \rangle\}$. Hallar los intervalos correspondientes a los siguientes conjuntos: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow x \in D\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow x \in B\}$; $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin B \vee x \notin C\}$; $T = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin C + x \notin D\}$.
21. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x-3) \in [-2, 6]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x/5) \in [-10, 2]\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A \leftrightarrow x \notin B\}$. Hallar $(C-B) \cup (A \cap C)$.

22. Dados los conjuntos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{x-3}{2}) \in [-3, 2]\}$, $T = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{2-x}{3}) \in [-4, 1]\}$, $M = \{x \in \mathbb{R} \mid (4x-1) \in [-2, 2]\}$; $P = \{x \in \mathbb{R} \mid (2-3x) \in [-3, 1]\}$. Hallar los intervalos correspondientes a los siguientes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin S + x \in T\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M \leftrightarrow x \in P\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in S \vee x \notin P\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin T \wedge x \in M\}$.
23. Dados los conjuntos: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid (-x/3) \in [-2, 4]\}$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \in [-2, 3]\}$, $T = \{x \in \mathbb{R} \mid (1-x) \in [-1, 5]\}$. Hallar el intervalo correspondiente a $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (M \cap T) + x \in S\}$.
24. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x/3) \in [-3, 2]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \in [-1, 3]\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (2-x) \in [-1, +\infty)\}$; efectuar: a) $A - B$, b) $B' \cap C'$, c) $A' \cup C'$, d) $A' - (B \cap C)$.
25. Dados los conjuntos: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{2-x}{3}) \in [-2, 2]\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid (3x/2) \in [-1, 4]\}$, $P = \{x \in \mathbb{R} \mid (2-x) < 3 + x > 2\}$. Hallar el o los intervalos que corresponden al conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M \leftrightarrow x \in (N \cap P)\}$.
26. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{1-x^2}{2}) \in [-2, 4]\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x + 1 < 0\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2 + x^2 < -2\}$. Efectuar: $(A-B) \cup (B \cap C)$.
27. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \geq 0 \wedge x^2 - 16 \leq 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6 \geq -x \vee x^2 - x < -1\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 > 0 + x^2 < x\}$. Hallar el intervalo correspondiente al conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A-B) \leftrightarrow x \in (C-A)\}$.
28. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3) \in [-3, 6]\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (3 - 2x) \in [-4, 2]\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A + x \in B\}$. Hallar el conjunto D , si $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow x \in C\}$.
29. Sean $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ y $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$. Dado un número $2 \in [a, b]$, determinar el número $t \in [0, 1]$ tal que: $2 = ta + (1-t)b$.
30. Sean a y b números reales fijos, tales que $a < b$. Demostrar que dado $k \in [a, b]$, existe un número único $t \in [0, 1]$, tal que $k = ta + (1-t)b$.
31. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{2}{2x+3}) \in [1/4, 2]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{x-2} \geq x+6\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3x^2-4}{x-6} \leq x+6\}$. Construir el conjunto: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (C-A) + x \in B\}$.



4.12 RESOLUCIÓN GRÁFICA DE INECUACIONES EN $\mathbb{R}$

Cuando realizamos el estudio de la técnica para resolver inecuaciones cuadráticas y racionales, habíamos visto como éstas se podían resolver en forma sencilla aplicando el Teorema 30 (Regla de los signos):

$$i) \quad ab > 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ii) \quad ab < 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Obviamente, si el producto hubiera consistido de tres o más factores lineales, la aplicación de este teorema se haría muy difícil y complicado por el mayor número de alternativas que aparecerían. Para evitar esta dificultad existe un método de resolver inecuaciones en $\mathbb{R}$ haciendo uso de la representación gráfica de los números reales en la recta real, y consiste en lo siguiente:

(1) Dada una inecuación en $\mathbb{R}$, se descompone ésta en factores lineales dándole la forma: $ab > 0$ o $ab < 0$

(2) Se resuelve la ecuación $ab=0 \leftrightarrow a=0 \vee b=0$

(Las raíces de esta ecuación se llaman valores o puntos críticos de la inecuación dada)

(3) Se ubica los puntos críticos en la recta real, determinando en ella los intervalos de variación, luego se estudia el signo de cada factor en dichos intervalos, por el criterio siguiente: Por ejemplo, si c es un punto crítico:

A la derecha de c , $\forall x \in \mathbb{R}: x > c \rightarrow (x-c) > 0$, se escribe (+)

A la izquierda de c , $\forall x \in \mathbb{R}: x < c \rightarrow (x-c) < 0$, se escribe (-)

		(-)		(+)		
$x < c$			c		$x > c$	
$(x-c) < 0$					$(x-c) > 0$	

(4) Se determina el signo de cada intervalo multiplicando verticalmente los signos de cada factor. El resultado se ubica en la recta real.

(5) Según sea el sentido de la desigualdad dada se eligen el o los intervalos que constituirán el conjunto solución.

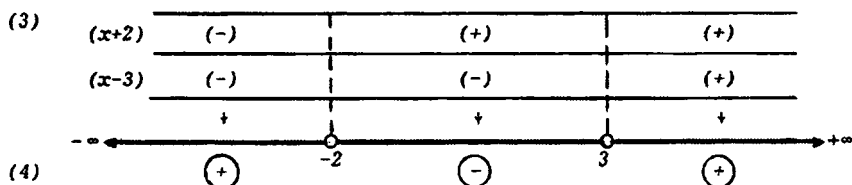
Si la inecuación tiene la forma $P(x) < 0$, el conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos donde aparece el signo (-).

Si la inecuación es de la forma $P(x) > 0$, el conjunto solución estará dada por la unión de los intervalos donde aparece el signo (+).

EJEMPLO 1. Resolver: $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 6 < 0\}$

Solución. (1) $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

(2) $(x+2)(x-3) = 0 \leftrightarrow x = -2$ o $x = 3$ (Puntos críticos)

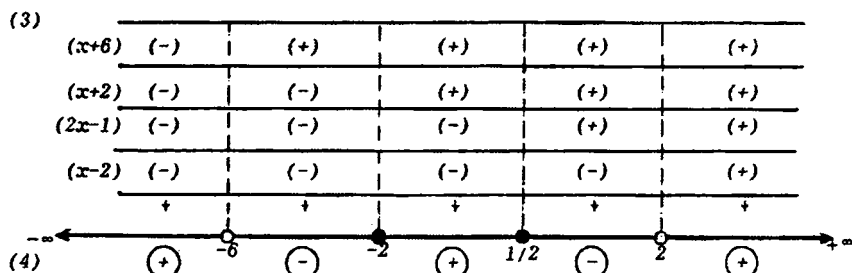


- (5) Dado que $P(x) < 0$, el signo (-) corresponde al intervalo $<-2, 3>$, entonces
 $S = <-2, 3> = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

EJEMPLO 2. Resolver: $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} > 0$

Solución. $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} = \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+6)(x-2)} > 0$

- (1) Inecuación equivalente: $(2x-1)(x+2)(x+6)(x-2) > 0$, $x \neq -6$, $x \neq 2$
 (2) $(2x-1)(x+2)(x+6)(x-2) = 0 \iff x = 1/2, x = -2, x = -6, x = 2$; son los puntos críticos de los cuales deben ser excluidos $x = -6$ y $x = 2$.



- (5) En este caso $P(x) > 0$, entonces interesa los intervalos con signo positivo.
 $\therefore S = <-\infty, -6> \cup [-2, 1/2] \cup <2, +\infty>$

Observación. Nótese que en la solución de las inecuaciones de los ejemplos anteriores, el signo del último intervalo (derecha) es siempre positivo, después los signos se van alternando en cada intervalo, de derecha a izquierda: (+), (-), (+), ... De este suceso se puede establecer una técnica para resolver inecuaciones de orden superior y que es mucho más sencillo y práctico que la regla gráfica de los signos. Esta nueva técnica se basa en la aplicación del algoritmo de la división para un polinomio $P(x)$ y que es llamada: el método de los valores críticos.

4.13 INECUACIONES POLINOMICAS

Las inecuaciones polinómicas tienen la forma:

$$P(x): a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 > 0 \quad (1)$$

$$P(x): a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 < 0 \quad (2)$$

y son llamadas también inecuaciones de orden superior.

Para un polinomio de grado n , con coeficientes reales:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

existen n números reales $r_1, r_2, \dots, r_n$ (no necesariamente distintos) tales que:

$$P(x) = a_n (x-r_1)(x-r_2) \dots (x-r_n) \quad (3)$$

Si uno de los factores de (3) es $(x-r)$, entonces se dice que r es un **cero o raíz** de $P(x)$; si m de estos factores son precisamente $(x-r)$, r se llama un **cero de multiplicidad m** .

Se dice que un valor crítico es un **cero simple** si su multiplicidad es uno, en todo caso, se dice que es un **cero múltiple**. Por ejemplo, si:

$$P(x) = (x+1)(x-1)^2(x-4)^3$$

entonces: -1 es un cero de multiplicidad simple

1 " " " " " 2

4 " " " " " 3

Existen tres casos para resolver inecuaciones polinómicas y son los siguientes:

CASO I. Los ceros del polinomio $P(x)$ son de multiplicidad simple, es decir, son reales y diferentes. Esto es:

$$P(x) = a(x-r_1)(x-r_2) \dots (x-r_n)$$

donde: $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n$

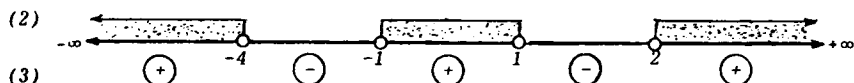
Los pasos a seguir son los siguientes:

- (1) Se halla los valores críticos factorizando el polinomio $P(x)$ y resolviendo la ecuación $P(x)=0$.
- (2) Se ubica los valores críticos sobre una recta real y se señalan los intervalos de variación.
- (3) Se anota con signo (+) el último intervalo $\langle r_n, +\infty \rangle$, luego en los demás intervalos se alterna los signos (-), (+), (-), ..., de derecha a izquierda.
- (4) El conjunto solución lo conforman la unión de intervalos con signo positivo si $P(x) > 0$, o la unión de intervalos con signo (-) si $P(x) < 0$.

EJEMPLO 1. Resolver: $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 > 0$.

Solución. Sea $P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 = (x+4)(x+1)(x-1)(x-2)$

(1) Si $P(x)=0 \rightarrow x=-4, x=-1, x=1, x=2$ (valores críticos)



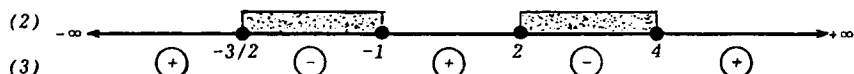
(4) Como $P(x) > 0$, el conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos con signo positivo, esto es:

$$S = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

EJEMPLO 2. Resolver: $2x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 22x + 24 \leq 0$

Solución. Sea $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 22x + 24 = (2x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$

(1) Si $P(x)=0 \rightarrow x=-3/2, x=-1, x=2, x=4$ son los valores críticos.



(4) Como $P(x) \leq 0$, el conjunto solución lo constituye la unión de los intervalos con signo negativo, esto es:

$$S = [-3/2, -1] \cup [2, 4]$$

Observación. Las inecuaciones racionales de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos de grado > 2 , también pueden ser resueltos por el método de los valores críticos, teniendo cuidado de restringir las raíces de $Q(x)=0$.

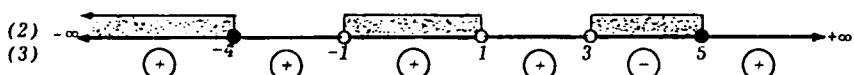
EJEMPLO 3. Resolver: $\frac{x^2 - x - 20}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \leq 0$

Solución. $\frac{x^2 - x - 20}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{(x+4)(x-5)}{(x+1)(x-1)(x-3)} \leq 0$

Inecuación equivalente: $(x+4)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5) \leq 0$

Valores restringidos: $x \neq \pm 1, x \neq 3$

(1) Puntos críticos: $P(x)=0 \rightarrow x=-4, x=-1, x=1, x=3, x=5$



(4) Como $P(x) \leq 0$, el conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos con signo negativo, esto es:

$$S = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$$

CASO II. Los factores de $P(x)$ son todos lineales y algunos son ceros de multiplicidad múltiple. Supongamos que $(x-r_i)$ es el factor que se repite m veces, entonces puede ocurrir lo siguiente:

A) Si m es **par**, los signos de los intervalos donde figure r_i son iguales, es decir, no son alternados. Entonces se elimina el factor $(x-r_i)$ y se trabaja con los demás factores como en el Caso I. Esto es, si:

- a) $(x-r_i)^m(x-a)(x-b) > 0 \leftrightarrow (x-a)(x-b) > 0$ y $x \neq r_i$ (restricción)
- b) $(x-r_i)^m(x-a)(x-b) < 0 \leftrightarrow (x-a)(x-b) < 0$ y $x \neq r_i$ (restricción)
- c) $(x-r_i)^m(x-a)(x-b) \geq 0 \leftrightarrow (x-a)(x-b) \geq 0$ ó $x=r_i$
- d) $(x-r_i)^m(x-a)(x-b) \leq 0 \leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0$ ó $x=r_i$

Obsérvese que en las desigualdades estrictas (>0 ó <0) se restringe la raíz $x=r_i$, lo contrario sucede para las desigualdades no estrictas (≥ 0 ó ≤ 0).

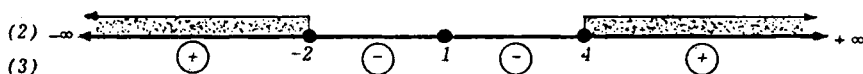
EJEMPLO 4. Resolver: $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 \geq 0$

Solución. Sea $P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 = (x+2)(x-1)^2(x-4)$

Dado que $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, entonces, según el Caso II Ac, se tiene:

Inecuación equivalente: $(x+2)(x-4) \geq 0$ o $x=1$

(1) Valores críticos: $P(x)=0 \rightarrow x=-2, x=4$



(4) El conjunto solución es la unión de los intervalos con signo (+).

$$\therefore S = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \{1\} \cup [4, +\infty)$$

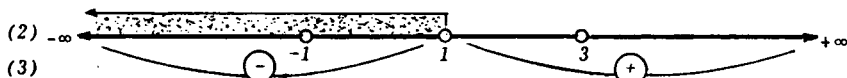
EJEMPLO 5. Resolver: $x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 14x^2 - 3x - 9 < 0$

Solución. Sea $P(x) = x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 14x^2 - 3x - 9 = (x+1)^2(x-1)(x-3)^2$

Como $(x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ y $(x-3)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, hay dos restricciones: $x \neq -1$ y $x \neq 3$

Inecuación equivalente: $x-1 < 0$

(1) En este caso, el único valor crítico es $x=1$



(4) Como $P(x) < 0 \rightarrow S = \langle -\infty, 1 \rangle - \{-1\}$

B) Si m es impar, el factor $(x-r_i)^m$ tiene el mismo signo del factor $(x-r_i)$, en consecuencia, la inecuación se resuelve como en el Caso I, esto es, si

$$a) (x-r_i)^m(x-a)(x-b) > 0 \leftrightarrow (x-r_i)(x-a)(x-b) > 0$$

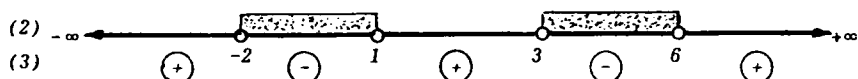
$$b) (x-r_i)^m(x-a)(x-b) < 0 \leftrightarrow (x-r_i)(x-a)(x-b) < 0$$

EJEMPLO 6. Resolver: $(x+2)(x-1)^3(x-3)(x-6) < 0$

Solución. Según el Caso IIB, la inecuación equivalente es:

$$P(x): (x+2)(x-1)(x-3)(x-6) < 0$$

(1) Valores críticos: Si $P(x)=0 \leftrightarrow x=-2, x=1, x=3, x=6$



(4) Como $P(x) < 0$, el conjunto solución es la unión de los intervalos con signo negativo: $S = \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 3, 6 \rangle$

CASO III. Cuando los factores de $P(x)$ son lineales y cuadráticos, siendo los ceros del factor cuadrático no reales.

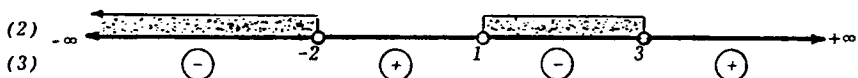
Ilustraremos el caso con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 7. Resolver: $x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 20x + 24 < 0$

Solución. $x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 20x + 24 = (x+2)(x-1)(x-3)(x^2+4)$

El factor x^2+4 tiene raíces no reales ($\Delta < 0$), por lo que $x^2+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Podemos entonces prescindir de este factor y analizar los signos de los intervalos para la inecuación equivalente: $(x+2)(x-1)(x-3) < 0$

(1) Valores críticos: $P(x)=0 \leftrightarrow x=-2, x=1, x=3$



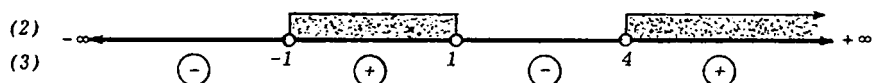
(4) Como $P(x) < 0$, el conjunto solución es la unión de los intervalos con signo negativo: $\therefore S = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$

EJEMPLO 8. Resolver: $x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 12x + 16 > 0$

Solución. Factorizando obtenemos: $(x+1)(x-1)(x-4)(x^2-2x+4) > 0$

El factor cuadrático tiene soluciones no reales (comprobar que $\Delta < 0$), por lo que $x^2-2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Prescindiendo de este factor, la inecuación equivalente es $P(x): (x+1)(x-1)(x-4) > 0$

(1) Valores críticos: $P(x)=0 \leftrightarrow x=-1, x=1, x=4$



(4) Dado que $P(x) > 0$, el conjunto solución lo conforman los intervalos con signo positivo, esto es: $S = <-1, 1> \cup <4, +\infty>$

EJEMPLO 9. Resolver: $\frac{(x^3-8)(x^2-9)^2(x^2+4)}{(x^2-4)(x-1)} \leq 0$

Solución. Factorizando en el numerador y denominador se tiene:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(x+3)^2(x-3)^2(x^2+4)}{(x+2)(x-2)(x-1)} \leq 0$$

Observamos aquí lo siguiente:

- Existen tres valores restringidos: $x \neq -2, x \neq 1, x \neq 2$
- Se debe prescindir de los factores $(x+3)$ y $(x-3)$ por el Caso II:A.d y el factor $(x-2)$ por cancelación.
- Se debe prescindir de los factores (x^2+4) y (x^2+2x+4) por ser ambos positivos $\forall x \in \mathbb{R}$ (Verificar que $\Delta < 0$).

Entonces, de la inecuación original queda: $\frac{1}{(x+2)(x-1)} \leq 0, x \neq 2, x \neq \pm 3$

Inecuación equivalente $P(x)$: $(x+2)(x-1) \leq 0, x \neq 2, x \neq -2, x \neq 1, x \neq \pm 3$

(1) Valores críticos: $P(x)=0 \leftrightarrow x=-2, x=1$



(4) Como $P(x) < 0$, entonces: $S = <-2, -1> \cup \{-3, 3\}$

EJEMPLO 10. Resolver: $\frac{(x^2-2x+2)^3(1-x)^3(x+2)^2}{x^2(x^2+5x+4)} \geq 0$

Solución. Según el Caso II.B.a, la inecuación es equivalente a:

$$\frac{(x^2-2x+2)(1-x)(x+2)^2}{x^2(x+1)(x+4)} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(x^2-2x+2)(1-x)}{(x+1)(x+4)} \geq 0, x \neq 0, x = -2$$

Como $x^2-2x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Verificar que $\Delta < 0$), entonces, de la inecuación original queda: $\frac{1-x}{(x+1)(x+4)} \geq 0 \leftrightarrow \frac{x-1}{(x+1)(x+4)} \leq 0, x \neq 0, x = -2$

Inecuación equivalente: $P(x)$: $(x-1)(x+1)(x+4) \leq 0, x \neq 0, -1, -4, x = -2$

(1) Valores críticos: $P(x)=0 \leftrightarrow x=-4, x=-1, x=1$



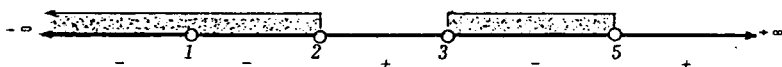
(4) Como $P(x) \leq 0$, el conjunto solución lo conforma la unión de intervalos con signo negativo y el número $x=-2$, esto es:

$$S = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \{-2\} \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \{0\}$$

EJEMPLO 11. Construir una inecuación entera o polinómica de grado mínimo cuyo conjunto solución sea $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$.

Solución. Si $x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle \rightarrow x \in \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle - \{1\}$

Como $x=1$ es un valor restringido, el polinomio $P(x)$ tiene la forma: $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$. Siendo m par $\rightarrow m=2$ (grado mínimo)
Para saber si $P(x) < 0$ o $P(x) > 0$, ubicamos los valores críticos: $x=1, 2, 3, 5$ en la recta real y aplicamos la regla conocida:



$$\begin{aligned}\therefore P(x) < 0 &\rightarrow (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-5) < 0 \\ &\leftrightarrow x^5 - 12x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 30 < 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 12. Si A es el conjunto solución de: $\frac{(1-x)(2+x)}{(x+1)^2(x^2+4)} > 0$, y B es el conjunto solución de la inecuación $\frac{3x+2}{x-1} < 8$ hallar $A' \cap B$

Solución. En A se tiene: $\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)^2(x^2+4)} < 0$

Como $(x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ y $x^2+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la inecuación equivalente a A es $(x-1)(x+2) < 0, x \neq -1$

Por el método de los valores críticos obtenemos: $A = \langle -2, 1 \rangle - \{-1\}$ (Verificar)

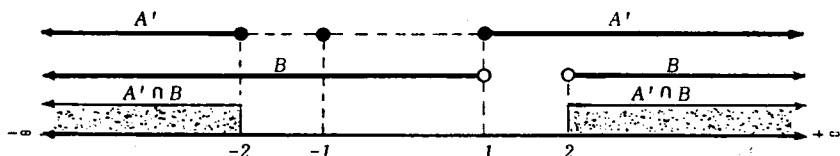
Entonces: $A' = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [1, +\infty) \cup \{-1\}$

En B : $\frac{3x+2}{x-1} - 8 < 0 \leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} > 0$

$$\leftrightarrow B = \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

(Verificar)

Ilustración gráfica de $A' \cap B$:



$$\therefore A' \cap B = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \{-1\} \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

EJERCICIOS: Grupo 25

En los ejercicios siguientes resolver la inecuación dada. Representar la solución sobre una recta real y expresar el resultado como un intervalo o unión de intervalos.

1. $(x^2+2x-3)(3x-4-x^2) > 0$
2. $4x^4+4x^3+x^2+4x-3 \leq 0$
3. $x^4-3x^3-15x^2+19x+30 < 0$
4. $x^4-4x^3-3x^2+14x-8 \geq 0$
5. $(x^3+x^2-9x-9)(x-2)^3 < 0$
6. $2x^3+7x^2+2x-3 < 0$
7. $(x-2-x^2)(x^2+2x-8) < 0$
8. $x^3-5x^2+5x^3-3x^2-6x+8 \geq 0$
9. $(x^3-1)(x^3-x^2+2x-2)(x-2) < 0$
10. $\frac{3x-2}{x+1} < \frac{4}{x-2}$
11. $\frac{6}{x-1} - \frac{5}{x-2} > -2$
12. $\frac{2x^2-3x+3}{6+x-2x^2} < \frac{1}{2}$
13. $3x-6 \leq 2 - \frac{36}{3x+4}$
14. $\frac{(x^2-x-6)^3(2-x)^3(3+x)^2}{(2x+1)(x^3-8)(x^2-4x)} \leq 0$
15. $\frac{x^4-2x^3-x^2-4x-6}{x^3-4x^2+x-4} \geq 0$
16. $\frac{x}{x-a} - \frac{2}{x+a} < \frac{8a^2}{x^2-a^2}, a > 0$
17. $x^6-2x^5-4x^4+14x^3-33x^2+60x-35 \leq 0$
18. $x^7-2x^6-10x^5+20x^4+5x^3-7x^2+7x-24 \leq 0$
19. Hallar una inecuación entera de coeficientes racionales, de grado mínimo, cuya solución es: $<-\infty, -3> \cup <-2, 2> \cup <3, +\infty>$
20. Hallar la inecuación racional más simple cuyo conjunto solución es: $<-\infty, -3> \cup [-1, 1] \cup [4, +\infty>$
21. Construir una inecuación racional cuyo conjunto solución sea: $<-\infty, -2> \cup [-1, 3] \cup [4, +\infty>$
22. Si A y B son los conjuntos solución correspondientes a las inecuaciones en R: $\frac{(x-1)^2-1}{(x+3)(2-5x)} < 0$; $\frac{(x+3)(3-5x)}{(x+1)(2x+3)} \geq 0$; hallar: $A \cap B$
23. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2-5x+4} > \frac{2x^2}{(x-1)(x^2-3x-4)}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x^4+2)(x-1)^3(2x-1)(x^2-4)}{(x-2)(x-3)(x-1)(-3x-1)} > 0\}$. Hallar $A \Delta B$.
24. Si A es el conjunto solución de la inecuación $\frac{2x^4+x^3-x^2+6x-8}{x+2} \leq 0$ hallar $A \cap ([0, 1])'$.

4.14 ECUACIONES E INECUACIONES CON RADICALES**4.14.1 ECUACIONES CON RADICALES**

Son aquellas en que la variable aparece bajo un signo radical.
 Por ejemplo, si $p(x)$ es una proposición que contiene a la variable x , entonces:

$$\sqrt{p(x)} = b, \quad \sqrt[p(x)]{c} = c, \quad \sqrt[p(x)]{d} = d, \text{ etc.}$$

son ecuaciones con radicales.

Aquí solo desarrollaremos una técnica para resolver ecuaciones radicales que contengan raíces cuadradas. Pero antes de empezar directamente con el problema, recordemos que si:

$$p(x) \text{ es un número real positivo} \rightarrow p(x) \in \mathbb{R} \text{ y } p(x) \geq 0$$

Esta inecuación constituye el universo U dentro del cual se resuelve la ecuación radical.

La técnica de resolver ecuaciones con radicales consiste en escribir una ecuación equivalente que contenga un solo radical en un lado y todos los demás términos en el otro. Después eliminar el radical elevando al cuadrado ambos lados, aplicando el siguiente teorema:

TEOREMA 40. Si $b \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$\sqrt{a} = b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (b \geq 0 \wedge a = b^2)$$

EJEMPLO 1. Resolver: $12 - \sqrt{x+8} = 2-2x$

Solución. Ordenando términos: $\sqrt{x+8} = 10+2x$

Universo de la ecuación U : $x+8 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -8$

Por el Teorema 40: $x \in U \wedge (10+2x \geq 0 \wedge (x+8) = (10+2x)^2)$

$$\rightarrow x \in U \wedge [x \geq -5 \wedge (4x^2 + 39x + 92 = 0)] \rightarrow x \geq -5 \wedge (x = -4 \vee x = -23/4)$$

Dado que: $-4 > -5$ y $-23/4 < -5$, entonces, $x = -4$ es la única solución válida.

EJEMPLO 2. Resolver: $\sqrt{2x} + \sqrt{2x+4} = 4$

Solución. Como $b=4 > 0$, elevamos al cuadrado obtenemos: $\sqrt{2x+4} = 2(8-x)$

Universo de la ecuación: $2x+4 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -2$

Por el Teorema 40: $(x \geq -2) \wedge (8-x \geq 0) \wedge \{2x+4 = 4(8-x)^2\}$

$$\leftrightarrow (x \geq -2) \wedge (x \leq 8) \wedge (2x^2 - 33x + 26 = 0) \leftrightarrow (-2 \leq x \leq 8) \wedge (x = 6 \vee x = 21/2)$$

Vemos que: $6 \in [-2, 8]$ y $21/2 \notin [-2, 8]$ $\rightarrow x = 6$ es la única solución válida.

EJEMPLO 3. Resolver: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3$

Solución. Los universos parciales son: $U_1: 2x-1 \geq 0 \leftrightarrow U_1 = x \in [1/2, +\infty)$

$$U_2: x+3 \geq 0 \leftrightarrow U_2 = x \in [-3, +\infty)$$

Universo de la ecuación: $U = U_1 \cap U_2 = x \in [1/2, +\infty)$

Ecuación equivalente: $\sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{x+3}$

Elevando al cuadrado obtenemos: $6\sqrt{x+3} = 13-x$

Por el Teorema 40: $(x \geq 1/2 \wedge 13-x \geq 0) \wedge [36(x+3) = (13-x)^2]$

$$\leftrightarrow (1/2 \leq x \leq 13) \wedge (x^2 - 62x + 61 = 0)$$

$$\leftrightarrow (1/2 \leq x \leq 13) \wedge (x=1 \vee x=61) \rightarrow 1 \in [1/2, 13] \text{ y } 61 \notin [1/2, 13]$$

Luego, la única solución válida es $x=1$

EJEMPLO 4. Resolver: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+8} = \sqrt{6x+1}$

Solución. Universos parciales: $x+1 \geq 0$, $x+8 \geq 0$, $6x+1 \geq 0$

$$\rightarrow U = (x \geq -1) \cap (x \geq -8) \cap (x \geq -1/6) \leftrightarrow U = x \in [-1/6, +\infty)$$

Elevando ambos lados al cuadrado obtenemos: $\sqrt{x^2+9x+8} = 2x-4$

Por el Teorema 40: $(x \geq -1/6 \wedge 2x-4 \geq 0) \wedge [x^2+9x+8 = (2x-4)^2]$

$$\leftrightarrow (x \geq -1/6 \wedge x \geq 2) \wedge (3x^2 - 25x + 8 = 0) \leftrightarrow (x \geq 2) \wedge (x=1/3 \vee x=8)$$

Vemos que: $1/3 \notin [2, +\infty)$ y $8 \in [2, +\infty)$; luego: $S = \{8\}$

EJERCICIOS: Grupo 26

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

11. $\sqrt{x-2a} = \sqrt{x-5a} - \sqrt{x+3a}$, $a > 0$

2. $\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x} = x$

12. $\sqrt{3x^2-2x+9} + \sqrt{3x^2-2x-4} = 13$

3. $\sqrt{3x-6} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{9x+4}$

13. $\sqrt{2x-3} = \sqrt{8x-12} - \sqrt{x+3}$

4. $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x}$

14. $\sqrt{4x^2-4x-3} - \sqrt{2x^2+5x-12} = \sqrt{2x-3}$

5. $\sqrt{x-2a} = \sqrt{x-5a} - \sqrt{x+3a}$, $a > 0$

15. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-11} = \sqrt{2x-16}$

6. $\sqrt{x+2a} + \sqrt{x} = \sqrt{12x+a}$, $a > 0$

16. $\sqrt{4x^2+7x+15} - \sqrt{2x^2+5x-3} = \sqrt{x^2+2x-3}$

7. $\sqrt{3x+16} - \sqrt{2x+9} = 1$

17. $\sqrt{3x-5} = \sqrt{4x-3} - \sqrt{x-6}$

8. $\sqrt{3x^2-7x-30} - \sqrt{2x^2-7x-5} = x-5$

18. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{3x+10}$

9. $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 3$

19. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-8}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-8}} = 2$

10. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x+10} + \sqrt{x-1} = 0$

20. $\sqrt{2x^2-8x+4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2+21x-11}$

21. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+5} + \sqrt{x-1} - \sqrt{2x+3} = 1\}$, hallar el conjunto potencia de A .
22. En $\mathbb{R}$, sean A el conjunto solución de $\sqrt{11-x} - \sqrt{x+6} = 3$ y B el conjunto solución de $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x+2}}$. Hallar la suma de los elementos de $A \cup B$.
23. Dada la ecuación $\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$. El valor de x que la satisfice es $x=c/d$ con c y d enteros primos entre sí. Hallar c^2-d .



4.14.2 INECUACIONES CON RADICALES

En la resolución de inecuaciones con radicales se sigue el mismo criterio para resolver ecuaciones con radicales, pero fundamentalmente mediante la aplicación de los Teoremas 35, 36, 37, 38 y 39.

EJEMPLO 1. Resolver: $\sqrt{x^2+x-20} - \sqrt{x+16} < 0$

Solución. Por el Teorema 35ii, se tiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x-20} < \sqrt{x+16} &\leftrightarrow 0 \leq x^2+x-20 < x+16 \\ &\leftrightarrow (x^2+x-20 > 0) \wedge (x^2+x-20 < x+16) \\ &\leftrightarrow (x+5)(x-4) > 0 \wedge (x^2 < 36) \\ &\leftrightarrow (x < -5 \vee x > 4) \wedge (-6 < x < 6) \end{aligned}$$

de donde:

$$S = x \in (-6, -5] \cup [4, 6)$$

EJEMPLO 2. Resolver: $\sqrt{x^2-6x+5} < -\sqrt{x^2-7x+10}$

Solución. $\sqrt{x^2-6x+5} + \sqrt{x^2-7x+10} < 0$

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow (x^2-6x+5=0) \wedge (x^2-7x+10=0) && (T.37ii) \\ &\leftrightarrow (x=1 \vee x=5) \wedge (x=2 \vee x=5) \leftrightarrow x=5 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver: $\sqrt{x^2-2x-15} > -3$

Solución. La raíz cuadrada de todo número real positivo es siempre mayor que cero, entonces, la proposición dada es válida $\forall x \in U$, donde U es el universo de la variable x . Esto es:

$$\begin{aligned} \text{Si } x^2-2x-15 > 0 &\leftrightarrow (x-5)(x+3) > 0 \leftrightarrow x < -3 \vee x > 5 \\ \therefore S &= x \in (-\infty, -3) \cup [5, +\infty) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Resolver: $\sqrt{x^2-x-2} < 5-x$

Solución. Según el T.38ii: $\sqrt{a} < b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a < b^2)$ (a)

Resolveremos las siguientes inecuaciones:

$$(1) \text{ Cálculo del universo, } a \geq 0: x^2 - x - 2 \geq 0 \rightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \\ \rightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 2)$$

$$(2) b > 0 \rightarrow 5 - x > 0 \leftrightarrow x < 5$$

$$(3) \text{ Eliminación del radical } (a < b^2): x^2 - x - 2 < (5-x)^2 \leftrightarrow x < 3$$

$$(4) \text{ En (a): } S = (x \leq -1 \vee x \geq 2) \wedge (x < 5 \wedge x < 3) \\ = (x \leq -1 \vee x \geq 2) \wedge (x < 3) = x \leq -1 \vee (2 \leq x < 3) \\ \therefore S = x \in (-\infty, -1] \cup [2, 3)$$

EJEMPLO 5. Resolver: $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq 2 - x$

Solución. Por el T.39i: $\sqrt{a} \geq b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge [b < 0 \vee (b \geq 0 \wedge a \geq b^2)]$ (a)

Resolveremos las siguientes inecuaciones:

$$(1) \text{ Cálculo del universo } (a \geq 0): x^2 - 3x - 10 \geq 0 \leftrightarrow (x-5)(x+2) \geq 0 \leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 5$$

$$(2) b \geq 0 \rightarrow 2 - x \geq 0 \leftrightarrow x \leq 2; \quad (b < 0 \rightarrow x > 2)$$

$$(3) \text{ Eliminación del radical } (a \geq b^2): x^2 - 3x - 10 \geq (2-x)^2 \leftrightarrow x \geq 14$$

$$(4) \text{ En (a): } S = (x \leq -2 \vee x \geq 5) \wedge [(x > 2) \vee (x \leq 2 \wedge x \geq 14)] \\ = (x \leq -2 \vee x \geq 5) \wedge [(x > 2) \vee (\emptyset)] = (x \leq -2 \vee x \geq 5) \wedge (x > 2) \\ \therefore S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\} = [5, +\infty)$$

EJEMPLO 6. Resolver: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} < 5$

Solución. En este caso, el universo de la inecuación es la intersección de los universos parciales: $U = (x+5 \geq 0) \wedge (x \geq 0) = x \in [0, +\infty)$

Siendo ambos extremos positivos $\forall x \in U$, elevando al cuadrado se tiene:

$$(\sqrt{x+5} + \sqrt{x})^2 < 25 \leftrightarrow \sqrt{x(x+5)} < 10 - x$$

Según el T.38ii: $\sqrt{a} < b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a < b^2)$ (a)

$$(1) \text{ Cálculo del universo parcial } U_1(a \geq 0): x(x+5) \geq 0 \leftrightarrow x \leq -5 \vee x \geq 0$$

$$\text{Entonces: } U \cap U_1 = x \in [0, +\infty)$$

$$(2) b > 0 \rightarrow 10 - x > 0 \leftrightarrow x < 10$$

$$(3) \text{ Eliminación del radical } (a < b^2): x^2 + 5x < (10-x)^2 \leftrightarrow x < 4$$

$$(4) \text{ En (a): } x \geq 0 \wedge (x < 10 \wedge x < 4) = x \geq 0 \wedge (x < 4) \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 4\} = [0, 4)$$

EJEMPLO 7. Resolver: $\sqrt{x} - \sqrt{2x+3} < 1$

Solución. Por el T.35ii: $\sqrt{a} < \sqrt{b} \leftrightarrow 0 \leq a < b$

$$\text{Entonces: } \sqrt{x} - \sqrt{2x+3} < 1 \leftrightarrow 0 \leq x - \sqrt{2x+3} < 1$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{2x+3} \leq x)}_{(A)} \wedge \underbrace{(\sqrt{2x+3} > x-1)}_{(B)}$$

$$(A): \sqrt{2x+3} \leq x \leftrightarrow 2x+3 \geq 0 \wedge (x > 0 \wedge 2x+3 \leq x^2) \quad (T.38ii)$$

$$\leftrightarrow x \geq -3/2 \wedge (x > 0 \wedge x^2 - 2x - 3 \geq 0)$$

$$\leftrightarrow x \geq -3/2 \wedge [x > 0 \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 3)]$$

$$\leftrightarrow x \geq -3/2 \wedge (x \geq 3) \leftrightarrow x \geq 3 \rightarrow S_1 = [3, +\infty)$$

$$(B): \sqrt{2x+3} > x-1 \leftrightarrow 2x+3 \geq 0 \wedge [x-1 < 0 \vee (x-1 \geq 0 \wedge 2x+3 > (x-1)^2)] \quad (T.39)$$

$$\leftrightarrow x \geq -3/2 \wedge [x < 1 \vee (x \geq 1 \wedge x^2 - 4x - 2 < 0)]$$

$$\leftrightarrow x \geq -3/2 \wedge [x < 1 \vee (x \geq 1 \wedge 2 - \sqrt{6} < x < 2 + \sqrt{6})]$$

$$\leftrightarrow x \geq -3/2 \wedge [x < 1 \vee (1 < x < 2 + \sqrt{6})]$$

$$\leftrightarrow (x > -3/2) \wedge (x < 2 + \sqrt{6}) \rightarrow S_2 = [-3/2, 2 + \sqrt{6})$$

$$\therefore S = S_1 \cap S_2 = [3, +\infty) \cap [-3/2, 2 + \sqrt{6}) = [3, 2 + \sqrt{6})$$

EJEMPLO 8. Resolver: $\frac{(\sqrt{x^2-4})(^3\sqrt{x+4})}{^3\sqrt{x^2-4x+3}} < 0$

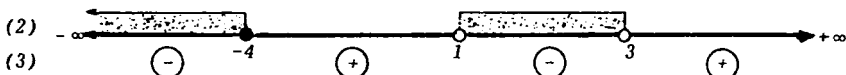
Solución. El universo de la inecuación lo obtenemos del radical de índice par, esto es, para $\sqrt{x^2-4}$, $U: x^2-4 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \geq 4 \leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$
Entonces: $U = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Según el Teorema 36iv, si n es un número entero positivo impar, entonces: $^n\sqrt{a}$ tiene el mismo signo de a . Luego, eliminando los radicales resolvemos la inecuación, dentro de U .

$$\frac{x+4}{x^2-4x+3} < 0 \leftrightarrow \frac{x+4}{(x-1)(x-3)} < 0 \quad (a)$$

Inecuación equivalente $P(x): (x+4)(x-1)(x-3) < 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$

(1) Valores críticos: $P(x)=0 \leftrightarrow x=-4$, $x=1$, $x=3$



(4) Los intervalos con signo negativo satisfacen (a) $\rightarrow S_1 = (-\infty, -4] \cup (1, 3)$

$$\therefore S = U \cap S_1 = (-\infty, -4] \cup [2, 3)$$

EJEMPLO 9. Resolver: $\sqrt{\frac{\sqrt{x+4} + 2}{2 - \sqrt{x+4}}} \leq x-4$

Solución. Universo parcial $U_1: x+4 \geq 0 \leftrightarrow U_1 = x \in [-4, +\infty)$

$$\text{Según el T.38i: } \sqrt{a} < b \leftrightarrow \underbrace{a \geq 0}_U \wedge \underbrace{(b > 0 \wedge a \leq b^2)}_{S_1}$$

$$(1) \text{ Cálculo del Universo: } a \geq 0 \rightarrow \frac{\sqrt{x+4} + 2}{2 - \sqrt{x+4}} \geq 0 \quad (a)$$

Dado que $\sqrt{x+4} + 2 > 0$, $\forall x \in U$, la desigualdad (a) se cumple si:

$$2 - \sqrt{x+4} > 0 \leftrightarrow \sqrt{x+4} < 2 \leftrightarrow 0 \leq x+4 < 4 \quad (T.35: \text{Corol. b})$$

$$\leftrightarrow -4 \leq x < 0 \rightarrow U = x \in [-4, 0)$$

$$(2) \text{ Nótese que } b = x-4 < 0, \forall x \in U, \text{ entonces: } S_1 = (b > 0 \wedge a \leq b^2) = \emptyset$$

$$(3) \text{ Por lo tanto: } S = U \cap S_1 = [-4, 0) \cap (\emptyset) = \emptyset$$

EJEMPLO 10. Resolver: $\sqrt{\frac{x^2-3x-4}{5-\sqrt{16-x^2}}} \geq x^2-2x-29$

Solución. Por el T.39i: $\sqrt{a} \geq b \leftrightarrow a \geq 0 \wedge [b < 0 \wedge (b \geq 0 \wedge a \geq b^2)]$

$$(1) \text{ Cálculo del universo: } a > 0 \rightarrow \frac{x^2-3x-4}{5-\sqrt{16-x^2}} > 0$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(x^2-3x-4 \geq 0 \wedge 5-\sqrt{16-x^2} > 0)}_A \vee \underbrace{(x^2-3x-4 \leq 0 \wedge 5-\sqrt{16-x^2} < 0)}_B$$

En A: $(x-4)(x+1) \geq 0 \wedge \sqrt{16-x^2} < 5$

$$\leftrightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 4) \wedge (0 \leq 16-x^2 < 25) \quad (T.35ii)$$

$$\leftrightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 4) \wedge (x^2 \leq 16 \wedge x^2 > -9)$$

$$\leftrightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 4) \wedge (-4 \leq x \leq 4 \wedge \mathbb{R})$$

$$\leftrightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 4) \wedge (-4 \leq x \leq 4)$$

En B se niega las proposiciones dadas en A, luego, su solución lo obtenemos tomando complementos en las soluciones de A, esto es:

$$B: \leftrightarrow (-1 < x < 4) \wedge (x < -4 \vee x > 4) = \emptyset$$

Por lo tanto: $U = A = (x \leq -1 \vee x \geq 4) \wedge (-4 \leq x \leq 4) = x \in [-4, -1] \cup \{4\}$

(2) Nótese que $b = x^2-2x-29 < 0$, $\forall x \in U$. En consecuencia, la ecuación original

se puede escribir: $\sqrt{\frac{x^2-3x-4}{5-\sqrt{16-x^2}}} \geq 0 > x^2-2x-29$

cuya solución es precisamente $x \in U \rightarrow S = x \in [-4, -1] \cup \{4\}$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Determinar el valor de m de modo que la inecuación:

$$(2m^2-3m)x^2+(4m-6)x+(18-8m^2) < 0, \text{ se satisfaga } \forall x \in (-5/2, 4/3)$$

Solución. La inecuación cuadrática que tiene por conjunto solución el intervalo dado es: $(x+5/2)(x-4/3) < 0 \leftrightarrow 6x^2+7x-20 < 0$

Esta inecuación es equivalente a la dada, entonces sus coeficientes deben ser proporcionales, esto es:

$$\frac{2m^2-3m}{6} = \frac{4m-6}{7} = \frac{18-8m^2}{-20}$$

$$+ (14m^2-21m = 24m-36) \wedge (-80m+120 = 126-56m^2)$$

$$+ (14m^2-4m+36=0) \wedge (28m^2-40m-3=0) \leftrightarrow (m=3/2 \vee m=12/7) \wedge (m=3/2 \vee m=-1/14)$$

de donde: $m = 3/2$

EJERCICIO 2. Hallar el valor de m para que la desigualdad

$$-3 < \frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1} < 2, \text{ se cumpla } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solución. El trinomio $x^2-x+1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (verificar que $\Delta < 0$)

Entonces en la desigualdad tenemos:

$$-3(x^2-x+1) < x^2+mx-2 < 2(x^2-x+1)$$

$$\leftrightarrow (-3x^2+3x-3 < x^2+mx-2) \wedge (x^2+mx-2 < 2x^2-2x+2)$$

$$\leftrightarrow [4x^2+(m-3)x+1 > 0] \wedge [x^2-(m+2)x+4 > 0]$$

Ambas desigualdades se verifican $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \Delta < 0$

$$+ [(m-3)^2-4(4)(1) < 0] \wedge [(m+2)^2-4(1)(4) < 0]$$

$$+ [(m-3)^2 < 16] \wedge [(m+2)^2 < 16] \leftrightarrow (-4 < m-3 < 4) \wedge (-4 < m+2 < 4)$$

$$\leftrightarrow (-1 < m < 7) \wedge (-6 < m < 2) \leftrightarrow -1 < m < 2$$

Luego, si $m \in (-1, 2)$, entonces la desigualdad dada se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-6 < -2x+8 < 5-8x\}$ y

$$B = \{m \mid x = \frac{m^2-m+3x-6}{m^2+2m}, x \text{ es negativo}\}; \text{ hallar } A \Delta B.$$

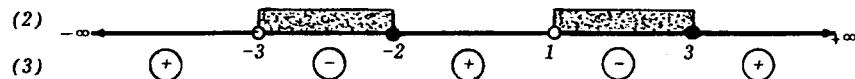
Solución. En A : $(3x-6 < -2x+8) \wedge (-2x+8 < 5-8x) \leftrightarrow x < -1/2$

$$\text{Entonces: } A = x \in (-\infty, -1/2)$$

$$\text{En } B: x(m^2+2m) = m^2-m+3x-6 \rightarrow x = \frac{m^2-m-6}{m^2+2m-3} = \frac{(m-3)(m+2)}{(m+3)(m-1)}$$

$$\text{Si } x < 0 \rightarrow \frac{(m-3)(m+2)}{(m+3)(m-1)} \leq 0, m \neq -3, m \neq 1 \quad (\alpha)$$

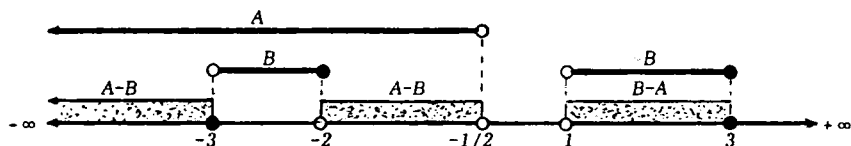
(1) Valores críticos: $m = -3, m = -2, m = 1, m = 3$



(4) Los intervalos con signo negativo satisfacen (α)

$$\therefore B = (-3, -2] \cup (1, 3]$$

Ilustración gráfica de $A \Delta B$:



$$\therefore A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = (-\infty, -3] \cup (-2, -1/2) \cup [1, 3]$$

EJERCICIO 4. Sean m y n raíces de la ecuación $(a-2)x^2 + \sqrt{2}x - a = 0$, $a \neq 2$, hallar los valores de a que satisfacen: $m^3n^3 + m^3n^5 > 0$.

Solución. De las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática obtenemos:

$$m+n = -\frac{\sqrt{2}}{a-2} \text{ y } m \cdot n = -\frac{a}{a-2}$$

$$\begin{aligned} m^3n^3 + m^3n^5 &= m^3n^3(m^2+n^2) = (mn)^3[(m+n)^2 - 2mn] \\ &= -\frac{a^3}{(a-2)^3} \left[\frac{2}{(a-2)^2} + \frac{2a}{a-2} \right] = -\frac{2a^3(a-1)^2}{(a-2)^5} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, si } m^3n^3 + m^3n^5 > 0 \rightarrow \frac{2a^3(a-1)^2}{(a-2)^5} < 0$$

Inecuación equivalente: $a(a-2) < 0$, $a \neq 2$, $a \neq 1$

Finalmente, por el método de los valores críticos obtenemos:

$$a \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$$

EJERCICIO 5. Resolver: $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x+4}}} \geq x-4$

Solución. Por el T.39i: $\sqrt{a} > b \iff a \geq 0 \wedge [b < 0 \vee (b \geq 0 \wedge a \geq b^2)]$

$$(1) \text{ Cálculo del universo, } a \geq 0: \frac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x+4}} \geq 0$$

$$\iff (\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \wedge 2-\sqrt{x+4} > 0) \vee (\sqrt{x^2-x-2} \leq 0 \wedge 2-\sqrt{x+4} < 0)$$

$$\iff \underbrace{(\sqrt{x^2-x-2} \geq 2 \wedge \sqrt{x+4} < 2)}_A \vee \underbrace{(\sqrt{x^2-x-2} \leq 2 \wedge \sqrt{x+4} > 2)}_B$$

$$\text{En A: } (x^2-x-2 \geq 0 \wedge x^2-x-2 \geq 4) \wedge (0 \leq x+4 < 4)$$

$$\iff (x^2-x-2 \geq 4) \wedge (-4 \leq x < 0) \iff (x \leq -2 \vee x \geq 3) \wedge (-4 \leq x < 0)$$

$$\iff (-4 \leq x \leq -2) \rightarrow A = x \in [-4, -2]$$

$$\text{En B: } (0 \leq x^2-x-2 \leq 4) \wedge (x+4 \geq 0 \wedge x+4 > 4)$$

$$\iff (x^2-x-2 \geq 0 \wedge x^2-x-2 \leq 4) \wedge (x \geq -4 \wedge x > 0)$$

$$\iff [(x-2)(x+1) \geq 0 \wedge (x-3)(x+2) \leq 0] \wedge (x > 0)$$

$$\iff [(x \leq -1 \vee x \geq 2) \wedge (-2 \leq x \leq 3)] \wedge (x > 0) \iff 2 \leq x \leq 3$$

$$\text{Luego: } B = x \in [2, 3] \rightarrow U = A \cup B = [-4, -2] \cup [2, 3]$$

(2) Nótese que $b=x-4 < 0$, $\forall x \in U$. En consecuencia, resolver la inecuación da-

da equivale a resolver la inecuación: $\frac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x+4}} > 0$

cuya solución es U . Entonces: $S = x \in [-4, -2] \cup [2, 3]$

EJERCICIO 6. Dados los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-5} - \sqrt{13-x} \geq 0\}$,

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2-9} > x/3\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x-6)^2(x+2)}{\sqrt{x-9}(x+5)} \geq 0\}$$

Hallar: a) $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in B \vee x \in A\}$; b) $C-A$

Solución. En A se tiene: $\sqrt{x-5} - \sqrt{13-x} \geq 0 \iff \sqrt{13-x} \leq \sqrt{x-5}$

$$0 \leq 13-x \leq x-5 \iff (13-x \geq 0) \wedge (13-x \leq x-5) \iff 9 \leq x \leq 13$$

Entonces $A = x \in [9, 13]$

$$\text{En } B: \sqrt{x^2-9} > \frac{x}{3} \iff (x^2-9 \geq 0) \wedge \left[\frac{x}{3} < 0 \vee \left(\frac{x}{3} \geq 0 \wedge x^2-9 > \frac{x^2}{9} \right) \right] \quad (\text{T.38ii})$$

$$\iff (x^2 \geq 9) \wedge [x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 > 81/8)]$$

$$\iff (x \leq -3 \vee x \geq 3) \wedge [x < 0 \vee \{x \geq 0 \wedge (x > \frac{9\sqrt{2}}{4} \vee x < -\frac{9\sqrt{2}}{4})\}]$$

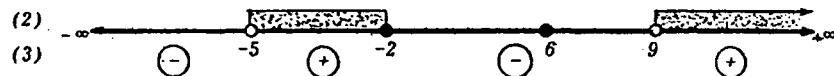
$$\iff (x \leq -3 \vee x \geq 3) \wedge [x < 0 \vee (x > \frac{9\sqrt{2}}{4})]$$

Entonces: $B = x \in (-\infty, -3] \cup (\frac{9\sqrt{2}}{4}, +\infty)$

$$\text{En } C: \frac{(x-6)^2(x+2)}{\sqrt{x-9}(x+5)} \geq 0 \iff \frac{x+2}{(x-9)(x+5)} > 0, \quad x=6 \quad (\alpha)$$

Inecuación equivalente: $(x+2)(x-9)(x+5) \geq 0$, $x \neq 9$, $x \neq -5$, $x=6$

(1) Valores críticos: $x=-5$, $x=-2$, $x=9$



(4) La proposición (α) es válida solo para los intervalos con signo positivo; luego: $C = \langle -5, -2 \rangle \cup \langle 9, +\infty \rangle \cup \{6\}$

$$a) P = x \in B \vee x \in A \equiv x \in B \vee x \in A \equiv B \cup A \quad (p \vee q \equiv \neg p \vee q)$$

$$\therefore P = \langle -3, \frac{9\sqrt{2}}{4} \rangle \cup [9, 13]$$

$$b) C-A = \langle -5, -2 \rangle \cup \langle 9, +\infty \rangle \cup \{6\} - [9, 13] = \langle -5, -2 \rangle \cup \langle 13, +\infty \rangle \cup \{6\}$$

EJERCICIO 7. Resolver: $\frac{(x-3)^2 \cdot \sqrt{x^2+13x+36} \cdot \sqrt{4-x}}{\sqrt{x+7}(x+2)^3(x^3+x^2-2x)} \leq 0$

Solución. Factorizando y eliminando radicales de índice impar se tiene:

$$\frac{(x-3)^2(x+9)(x+4) \cdot \sqrt{4-x}}{\sqrt{x+7}(x+2)^5(x+2)(x-1)x} \leq 0$$

De los radicales de índice par obtenemos el universo de la inecuación, esto es: $(4-x > 0) \wedge (x+7 > 0) \leftrightarrow (x \leq 4 \wedge x > -7) \rightarrow U = x \in (-7, 4]$

Resolvemos la inecuación: $\frac{(x-3)^2(x+9)(x+4)}{(x+2)^6(x-1)x} \leq 0, x \neq 4$ (a)

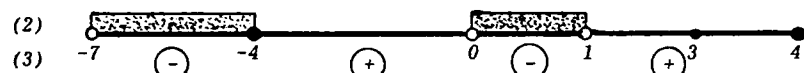
en el universo U .

Como $x \neq -9 \notin U$, el factor $(x+9)$ puede cancelarse y la inecuación se reduce a:

$$\frac{x+4}{x(x-1)} \leq 0, x \neq 3, x \neq -2, x \neq 0, x \neq 1 \quad (B)$$

Inecuación equivalente: $x(x+4)(x-1) \leq 0, x \neq 3, x \neq -2, x \neq 0, x \neq 1$

(1) Valores críticos: $x = -4, x = 0, x = 1$



(4) La proposición (B) es válida para los intervalos con signo negativo, entonces: $S_1 = \{-7, -4\} \cup \{0, 1\} \cup \{3, 4\}$

y según (a), la solución de la inecuación dada es:

$$S = \{-7, -4\} \cup \{0, 1\} \cup \{3, 4\}$$

EJERCICIOS: Grupo 27

Resolver las inecuaciones dadas y representar sus soluciones sobre una recta real.

1. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x-2} > 3$

2. $\sqrt{24-2x-x^2} < x$

3. $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} > 2$

4. $\sqrt{x^2+x-12} - \sqrt{x+13} < 0$

5. $\sqrt{x^2-3x+2} \leq 2-x$

6. $\sqrt{3-3x} \leq \sqrt{21+4x-x^2}$

7. $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x+1}$

8. $\sqrt{x^2-2x-15} > x+1$

9. $\sqrt{\frac{x+4}{x-2}} \geq \sqrt{x}$

10. $\sqrt{\frac{3x-9}{x+2}} + \sqrt{\frac{5-x}{x+1}} > 0$

11. $\sqrt{24-2x-x^2} \geq 2x-3$

12. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$

13. $\sqrt{x^2+4x} \geq 5x-1$

14. $\sqrt{\frac{x^2-2x-8}{x-2}} \geq -\sqrt[3]{x+1}$

15. $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$

16. $\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{4-\sqrt{x^2-9}}} \geq x-6$

17. $\sqrt{3+\sqrt{x-2}} < \sqrt{7-x}$

18. $\sqrt{x-1/x} + \sqrt{4-x} \geq 0$

19. $\sqrt{x^2-5x+6}(15+2x-x^2) \geq 0$

20. $\sqrt{x^2-x-12}(x-5)(2x^2-3x-2) \leq 0$

$$21. \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{2-\sqrt{x+4}} > x-3$$

$$22. \frac{\sqrt{x^2+x-2+3}}{\sqrt{9-x^2}-1} > x-4$$

$$23. \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}} > x-8$$

$$24. \frac{\sqrt{x^2-5x+4-2}}{2-\sqrt{x-2}} > x-6$$

25. Si $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3\sqrt{x-5} > 0\}$ y $B=\{x \in \mathbb{R} \mid x-6\sqrt{x-2}+8 > 0\}$; hallar $A \cap B$.

26. Si $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 12x^2-5x-3 > 0\}$ y $B=\{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{1}{6-x}) \in (\frac{1}{8}, 1] \text{ y } x > -1\}$; hallar $A \Delta B$.

27. Para qué valores de m , la inecuación $(3m^2-m)x^2+(2m-9)x+2m^2-5 < 0$, tiene como solución el intervalo $(1/2, 3/7)$.

28. Para qué valores de m , la inecuación $(m^2+1)x^2+(1-3m^2)x-(m^2+3) < 0$ se satisface $\forall x \in (-2/5, 3)$.

29. Determinar el valor de m para que la inecuación: $-4 < \frac{x^2-2mx-8}{x^2-2x+4} < 3$, se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$30. \text{ Resolver: } \frac{\sqrt{12-x} \cdot \sqrt{x^2-9x-10}(x-2)^4 \cdot \sqrt{x+6}(x-1)^7}{\sqrt{x+3}(x^2+7x-8)(x-12)(x^3-27)} \leq 0$$

31. Si $A=\{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{3-3x} - \sqrt{4x+21-x^2} \leq 0\}$ y $B=\{x \in A \mid \exists y \in \mathbb{Z} \mid x=y^2\}$, hallar el complemento de A en B .

32. Sea B el conjunto definido por: $B=\{p \in \mathbb{R} \mid \frac{8x^2-4(p-1)x-4(p-4)}{4x^2-4x+5} > 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$. Hallar el conjunto potencia de A , donde $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x \in B\}$.

$$33. \text{ Resolver: } \frac{\sqrt{x^2-1}(x-1)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

34. Determinar los valores de m para que la inecuación: $-3 < \frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1} < 3$, se cumpla $\forall x \in \mathbb{R}$.

35. Si $A=\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-6} > -2 \wedge \sqrt{x+6} < 0\}$ y $B=\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{x^2-7x+12}\}$; hallar:
a) $A \cap B$, b) $A' \cap B'$

$$36. \text{ Resolver: a) } \frac{\sqrt{x^2-2x-15}(x^3-6x^2+9x)}{(x-1)^4(x-2)^5} \leq 0$$

$$b) \frac{(x^2-16)(x-3)^3(x^2+4)^2(x+1)(x+8)}{(x^2+9x+8)(x^3-64)(\sqrt{x-1})x^2} \geq 0$$



4.15 VALOR ABSOLUTO

Definición 4.20 El valor absoluto de un número real a , denotado por $|a|$, se define por la regla:

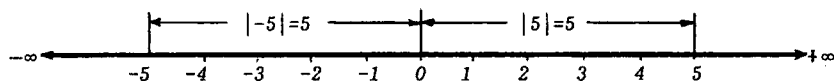
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, si $a=3 \rightarrow |a| = 3$

$$a=0 \rightarrow |0| = 0$$

$$a=-5 \rightarrow |-5| = -(-5) = 5.$$

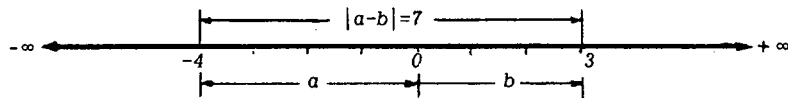
Vemos que el valor absoluto de un número positivo o cero es igual al mismo número, mientras que el valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente. Esto significa que para cada número real a , hay un número $-a$, cuyo valor absoluto representa su distancia al origen, el positivo a la derecha y el negativo a la izquierda. Geométricamente se representa como:



Para dos números a y b , $|a-b|=|b-a|$, representa la distancia entre estos puntos, sin importar la dirección; así, la distancia entre $a=-4$ y $b=3$ es:

$$|a-b| = |-4-3| = |-7| = 7; \quad |b-a| = |3-(-4)| = |7| = 7$$

Geométricamente se representa:



Tendremos ecuaciones e inecuaciones que involucran valores absolutos, éstas se resuelven basándose en los teoremas siguientes.

4.15.1 TEOREMAS SOBRE VALOR ABSOLUTO

TEOREMA 41. $\forall a \in \mathbb{R}$: i) $|a| \geq 0$

$$\text{ii) } |a| = 0 \leftrightarrow a=0$$

Demostración. i) En efecto, consideremos: $a < 0$, $a=0$, $a > 0$ (0.1)

$$(1) \text{ Si } a < 0 \rightarrow |a| = -a \rightarrow -|a| = a \rightarrow -|a| < 0 \leftrightarrow |a| > 0$$

(2) Si $a=0 \rightarrow |a| = a = 0$

(3) Si $a > 0 \rightarrow |a| = a \rightarrow |a| > 0 \quad \therefore |a| > 0$

ii) (1) Demostraremos que si $|a|=0 \rightarrow a=0$

En efecto, $|a|=0 \rightarrow 0=a \quad 0=-a$

(Def. 4.20)

$\rightarrow a=0 \quad a-0=0 \rightarrow a=0$

(2) Demostraremos que si: $a=0 \rightarrow |a|=0$

En efecto, si: $a=0 \rightarrow |a|=a \rightarrow |a|=0$

Por lo tanto: $|a|=0 \leftrightarrow a=0$

TEOREMA 42. $\forall a \in \mathbb{R}: |a|^2 = a^2$

Demostración. En efecto:

(1) Por definición de potencia: $|a|^2 = |a||a|$

(2) Si $a \geq 0 \rightarrow |a|^2 = a \cdot a \rightarrow |a|^2 = a^2$

(3) Si $a < 0 \rightarrow |a|^2 = (-a)(-a) \rightarrow |a|^2 = a^2$

TEOREMA 43. $\forall a \in \mathbb{R}: |a| = \sqrt{a^2}$

Demostración. En efecto:

(1) Por el T.42: $|a|^2 = a^2$

(2) Entonces: $\sqrt{|a|^2} = \sqrt{a^2}$

(3) $\therefore |a| = \sqrt{a^2}$

TEOREMA 44. $\forall a \in \mathbb{R}: |a| = |-a|$

Demostración. Consideremos los casos: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$

(1) Si $a > 0 \rightarrow |a| = a$

Por (-1): $-a < 0 \rightarrow |-a| = -(-a) = a \quad \therefore |a| = |-a|$

(2) Si $a = 0 \rightarrow |a| = 0$

Por (-1): $-a = 0 \rightarrow |-a| = 0 \quad \therefore |a| = |-a|$

(3) Si $a < 0 \rightarrow |a| = -a$

Por (-1): $-a > 0 \rightarrow |-a| = -a \quad \therefore |a| = |-a|$

TEOREMA 45. $\forall a, b \in \mathbb{R}: |ab| = |a||b|$

Demostración. En efecto:

(1) Por el T.43: $|ab| = \sqrt{(ab)^2}$

(2) Por propiedad de potencia: $|ab| = \sqrt{a^2 b^2}$

(3) Entonces: $|ab| = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a||b|$ (T.43)

TEOREMA 46. $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, entonces: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sea } \frac{a}{b} = c \rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = |c|$$

$$(2) \text{ Entonces: } a = bc \rightarrow |a| = |bc| = |b||c| \rightarrow \frac{|a|}{|b|} = |c|$$

$$(3) \text{ Luego, de (1) y (2): } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

TEOREMA 47. $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)

Demostración. En efecto:

$$(1) |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (T.42)$$

$$(2) \leq a^2 + 2|a \cdot b| + b^2 \quad (ab \leq |ab|)$$

$$(3) \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \quad (T.42 \text{ y } T.45)$$

$$(4) \leq (|a| + |b|)^2$$

$$(5) \text{ Como } |a+b| \text{ y } (|a|+|b|) \text{ son ambos positivos, entonces:}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

TEOREMA 48. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: i) $|a-b| \leq |a| + |b|$
 ii) $|a| - |b| \leq |a-b|$

Demostración. i) En efecto:

$$(1) |a-b| = |a+(-b)| \quad (\text{Def. de Diferencia})$$

$$(2) \text{ Entonces: } |a-b| \leq |a| + |-b| \quad (T.47)$$

$$(3) \text{ Luego: } |a-b| \leq |a| + |b| \quad (T.44)$$

La demostración de ii) se deja como ejercicio.

TEOREMA 49. $|a| = b \leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a = b \vee a = -b)$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Por el T.41: } |a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ Entonces, si } |a|=b, \text{ implica que: } b \geq 0$$

$$(3) \text{ Por definición: } |a| = a \vee -|a| = a$$

$$(4) \text{ Luego si: } |a| = b \rightarrow b = a \vee b = -a \rightarrow a = b \vee a = -b$$

$$(5) \text{ Por tanto, de 2 y 4: } |a|=b \leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a=b \vee a=-b)$$

TEOREMA 50. $|a| = |b| \leftrightarrow a = b \vee a = -b$

Demostración. Consideremos los casos: $b \geq 0$ y $b < 0$

$$(1) \text{ Si } b \geq 0 \rightarrow |b| = b$$

$$\text{Luego: } |a| = |b| \leftrightarrow |a| = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b \quad (T.49)$$

$$(2) \text{ Si } b < 0 \rightarrow |b| = -b > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } |a| = |b| \rightarrow |a| = -b \leftrightarrow a = -b \vee a = -(-b) \\ \leftrightarrow a = -b \vee a = b \end{aligned}$$

$$(3) \text{ Por lo tanto: } |a| = |b| \leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

TEOREMA 51. Si $b \geq 0$ y $|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$

Demostración. i) Demostraremos que si $b \geq 0$ y $|a| \leq b \rightarrow -b \leq a \leq b$

En efecto:

$$(1) \forall a \in \mathbb{R}: a \leq |a|, \text{ y por hipótesis: } |a| \leq b$$

$$(2) \text{ Luego, por transitividad: } a \leq b$$

$$(3) \text{ Del paso (1): } -b \leq -|a|$$

$$(4) \text{ Además, } \forall a \in \mathbb{R}: -|a| \leq a$$

$$(5) \text{ Entonces de (3) y (4): } -b \leq a \quad (\text{Transitividad})$$

$$(6) \text{ Finalmente de (2) y (5): } -b \leq a \leq b$$

$$\text{ii) Demostraremos ahora que si } b \geq 0 \text{ y } -b \leq a \leq b \rightarrow |a| \leq b$$

En efecto, considerando los casos: $a \geq 0$ y $a < 0$

$$(1) \text{ Por definición de V.A., si } a \geq 0 \rightarrow |a| = a$$

$$(2) \text{ Por hipótesis: } a \leq b$$

$$(3) \text{ Luego, de (1) y (2): } |a| \leq b$$

$$(4) \text{ Si } a < 0 \rightarrow |a| = -a \quad (\text{Def. V.A.})$$

$$(5) \text{ Por hipótesis: } -b \leq a \rightarrow -a \leq b$$

$$(6) \text{ Luego, de (4) y (5): } |a| \leq b$$

Por lo tanto, de i) y ii) queda demostrado:

$$\text{Si } b \geq 0 \text{ y } |a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

Corolario. Si $b \geq 0$ y $|a| < b \leftrightarrow -b < a < b$

TEOREMA 52. Si $|a| \geq b \leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

La demostración se deja como ejercicio.

Corolario. Si $|a| > b \leftrightarrow a > b \vee a < -b$

TEOREMA 53. $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a| \leq |b| \leftrightarrow a^2 \leq b^2$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Demostrar que si a y b son números reales cualesquiera, entonces:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Demostración. En efecto:

$$(1) |a| = |(a-b)+b| \rightarrow |a| \leq |a-b| + |b| \quad (T.47)$$

$$(2) \quad \rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$$

$$(3) \text{ Análogamente: } |b| = |(b-a)+a| \rightarrow |b| \leq |b-a| + |a|$$

$$(4) \quad \rightarrow |b| - |a| \leq |b-a|$$

$$(5) \text{ Pero por el T.44: } |b-a| = |a-b| \rightarrow -(|a| - |b|) \leq |a-b|$$

$$(6) \text{ Por el T.49: } ||a| - |b|| = (|a| - |b|) \vee -(|a| - |b|)$$

(7) Por lo tanto, de (2) y (5), queda demostrado que:

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

EJERCICIO 2. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } y \geq 0 \rightarrow |x| \leq y \leftrightarrow -y \leq x \leq y \quad (T.51)$$

$$(2) \text{ Por } -1: -|x| \geq -y \rightarrow -y \leq -|x|$$

(3) Como $x = |x|$ ó $x = -|x|$, de (1) y (2) obtenemos:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

(4) Entonces, para $a, c \in \mathbb{R}$ se cumplen: $-|a| \leq a \leq |a|$

$$-|c| \leq c \leq |c|$$

(5) Sumando se tiene: $-(|a| + |c|) \leq a + c \leq |a| + |c|$

(6) Entonces, por el T.51: $|a + c| \leq |a| + |c|$

(Otra forma de demostrar la desigualdad triangular)

(7) Haciendo $c = -b \rightarrow |a-b| \leq |a| + |b|$ ($|-b| = |b|$)

(8) Por el Ejercicio 1: $||a| - |b|| \leq |a-b|$

(9) De (3): $x \leq |x|$, si $x = |a| - |b| \rightarrow |a| - |b| \leq ||a| - |b||$

(10) Por lo tanto, de (6), (7) y (9), queda demostrado que:

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

EJERCICIO 3. Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$|a| - |b| - |c| \leq |a-b-c|$$

Demostración. En efecto:

- (1) $|a| = |a+(b+c)-(b+c)| = |(a-b-c) + (b+c)|$
- (2) $|(a-b-c) + (b+c)| \leq |a-b-c| + |b+c|$ (T.47)
- (3) $\leq |a-b-c| + |b| + |c|$ (T.47)
- (4) Luego, en (1): $|a| \leq |a-b-c| + |b| + |c|$
- (5) Por lo tanto: $|a| - |b| - |c| \leq |a-b-c|$

EJERCICIO 4. Si $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, demostrar que:

$$\left| \frac{bc}{a} \right| + \left| \frac{ac}{b} \right| + \left| \frac{ab}{c} \right| \geq |a + b + c|$$

Demostración. En efecto, se sabe que para dos números $a, b \in \mathbb{R}^+$, su media geométrica es menor o igual que su media aritmética, esto es:

$$MG \leq MA \quad \rightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \leftrightarrow \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Utilizando esta propiedad podemos escribir:

$$(1) \quad \left| \frac{bc}{a} \right| + \left| \frac{ac}{b} \right| \geq 2\sqrt{\left| \frac{bc}{a} \right| \left| \frac{ac}{b} \right|} = 2\sqrt{c^2} = 2|c| \quad (T.43)$$

$$(2) \quad \left| \frac{bc}{a} \right| + \left| \frac{ab}{c} \right| \geq 2\sqrt{\left| \frac{bc}{a} \right| \left| \frac{ab}{c} \right|} = 2\sqrt{b^2} = 2|b| \quad (T.43)$$

$$(3) \quad \left| \frac{ac}{b} \right| + \left| \frac{ab}{c} \right| \geq 2\sqrt{\left| \frac{ac}{b} \right| \left| \frac{ab}{c} \right|} = 2\sqrt{a^2} = 2|a| \quad (T.43)$$

(4) Sumando ambos extremos de estas desigualdades se tiene:

$$2\left(\left| \frac{bc}{a} \right| + \left| \frac{ac}{b} \right| + \left| \frac{ab}{c} \right|\right) \geq 2(|a| + |b| + |c|)$$

(5) Pero, por el T.47: $|a| + |b| + |c| \geq |a + b + c|$.

(6) Por lo tanto: $\left| \frac{bc}{a} \right| + \left| \frac{ac}{b} \right| + \left| \frac{ab}{c} \right| \geq |a + b + c|$

EJERCICIO 5. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demostrar que: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4|abcd|$

Demostración. En efecto:

$$(1) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}: (a^2 - b^2)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$$

$$(2) \quad \forall c, d \in \mathbb{R}: (c^2 - d^2)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2$$

$$(3) \quad \text{Así mismo: } (|ab| - |cd|)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad |ab|^2 + |cd|^2 \geq 2|ab||cd| \\ \rightarrow a^2b^2 + c^2d^2 \geq 2|abcd|$$

$$(4) \quad \text{Sumando (1) y (2): } a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2(a^2b^2 + c^2d^2)$$

$$(5) \quad \text{De (3) y (4) por 0.2: } a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4|abcd|$$

EJERCICIO 6. Establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

$$(1) \quad |x| < 1 \quad \rightarrow \quad |2x-3| < 1 \quad (2) \quad |x| < 1 \quad \rightarrow \quad \left| \frac{1}{2x-3} \right| < 1$$

$$(3) \text{ Si } |x| < 1 \rightarrow \left| \frac{1-5x}{2x-3} \right| < 6$$

Solución. (1) a) Si $|x| < 1 \leftrightarrow -1 < x < 1 \leftrightarrow -2 < 2x < 2$ (T.51)

b) Sumando -3 : $\leftrightarrow -5 < 2x-3 < -1$

c) Multiplicando por -1 : $1 < 3-2x < 5$

d) Pero como $1 > -5 \leftrightarrow -5 < 3-2x < 5 \leftrightarrow |3-2x| < 5$ (T.51)

e) Por el T.44: $\leftrightarrow |2x-3| < 5$

Por lo tanto, la afirmación es falsa

(2) a) Si $|x| < 1 \leftrightarrow -1 < x < 1 \leftrightarrow 1 < 3-2x < 5$ (Afirmación 1)

b) Invirtiendo: $\leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{3-2x} < 1 \leftrightarrow -1 < \frac{1}{3-2x} < 1$ ($-1 < \frac{1}{5}$)

c) Por el T.51 y T.44: $\leftrightarrow \left| \frac{1}{3-2x} \right| < 1 \leftrightarrow \left| \frac{1}{2x-3} \right| < 1$ (a)

Luego, la afirmación es verdadera.

(3) a) Si $|x| < 1 \leftrightarrow -1 < x < 1 \leftrightarrow -6 < 5x-1 < 4$

b) Multiplicando por -1 : $\leftrightarrow -4 < 1-5x < 6$

c) Pero como $-6 < -4$: $\leftrightarrow -6 < 1-5x < 6 \leftrightarrow |1-5x| < 6$ (B)

d) Multiplicando (a) por (B): $\left| \frac{1-5x}{2x-3} \right| < 6$

Luego, la afirmación es verdadera.

EJERCICIO 7. Establecer el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $(x-3) \in \langle -5, -1 \rangle \rightarrow |x-3| < 5$

b) $(x-2) \in \langle -3, -1 \rangle \rightarrow |x-2| > 1$

c) $|x-5| < 4 \leftrightarrow x \in \langle 1, 9 \rangle$

Solución. a) Si $(x-3) \in \langle -5, -1 \rangle \leftrightarrow -5 < x-3 < -1 \leftrightarrow -5 < x-3 < 5$ ($-1 < 5$)
 $\leftrightarrow |x-3| < 5$ (T.51)

La afirmación es verdadera.

b) Si $(x-2) \in \langle -3, -1 \rangle \leftrightarrow -3 < x-2 < -1 \leftrightarrow -1 < x < 1 \leftrightarrow |x| < 1$ (T.51)

Luego, $\underbrace{|x| < 1}_p \rightarrow \underbrace{|x-2| > 1}_q$, es la implicación equivalente a la original.

En efecto, vemos que para $x=0$, $V(p) = V$ y $V(q) = V$

$x=4$, $V(p) = F$ y $V(q) = V$

En ambos casos: $V(p \rightarrow q) = V$ $\therefore$ La afirmación es verdadera.

c) (*) Si $|x-5| < 4 \leftrightarrow -4 < x-5 < 4 \leftrightarrow 1 < x < 9 \leftrightarrow x \in \langle 1, 9 \rangle$

(*) Si $x \in \langle 1, 9 \rangle \leftrightarrow 1 < x < 9 \leftrightarrow -4 < x-5 < 4 \leftrightarrow |x-5| < 4$

Luego la afirmación es verdadera.

EJERCICIO 8. Hallar el valor de $E = \frac{|5x+12|-2|2x-6|}{3x}$, si $x \in \langle 0, 3 \rangle$

Solución. Eliminamos las barras de valor absoluto, partiendo de la condición dada, esto es:

$$\text{Si } x \in (0, 3) \rightarrow 0 < x < 3 \rightarrow 0 < 5x < 15 \rightarrow 12 < 5x+12 < 27$$

$$\text{Dado que: } 5x+12 > 0, \forall x \in (0, 3) \rightarrow |5x+12| = 5x+12 \quad (\text{Def. V.A.})$$

$$\text{Si } x \in (0, 3) \rightarrow 0 < x < 3 \rightarrow 0 < 2x < 6 \rightarrow -6 < 2x-6 < 0$$

$$\text{Aquí se observa que: } 2x-6 < 0 \rightarrow |2x-6| = -(2x-6) \quad (\text{Def. V.A.})$$

$$\text{Por lo tanto: } E = \frac{(5x+12) + 2(2x-6)}{3x} = \frac{9x}{3x} = 3$$

EJERCICIO 9. Dado el conjunto $E = \left\{ \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + 3 \mid x \in (-1, 2] \right\}$, expresarlo como un intervalo

Solución. Sea $y = \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + 3$, tal que $x \in (-1, 2]$

$$\text{Entonces: } y-3 = \left| \frac{x-1}{x+2} \right| = \left| 1 - \frac{3}{x+2} \right| \quad (1)$$

$$\text{Si } x \in (-1, 2] \leftrightarrow -1 < x < 2 \leftrightarrow 1 < x+2 < 4 \leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < 1$$

$$\text{Multiplicando por } -3: -3 < -\frac{3}{x+2} < -\frac{3}{4} \leftrightarrow -2 < 1 - \frac{3}{x+2} < \frac{1}{4}$$

$$\text{Pero } \frac{1}{4} < 2 \rightarrow -2 < 1 - \frac{3}{x+2} < 2 \leftrightarrow 0 \leq \left| 1 - \frac{3}{x+2} \right| < 2 \quad (|a| \geq 0)$$

$$\text{Luego, de (1): } 0 \leq y-3 < 2 \leftrightarrow 3 \leq y < 5 \rightarrow E = [3, 5)$$

EJERCICIO 10. Hallar el menor número M que satisfaga la desigualdad:

$$\left| \frac{2x+1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| \leq M, \text{ para } x \in [4, 7].$$

$$\text{Solución. } \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-2} \rightarrow \left| \frac{2x+1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| 2 + \frac{5}{x-2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{5}{x-2} \right| \leq M$$

$$(1) \text{ Si } x \in [4, 7] \leftrightarrow 4 \leq x \leq 7 \leftrightarrow 2 \leq x-2 \leq 5 \leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ Multiplicando por } 5: \leftrightarrow 1 \leq \frac{5}{x-2} \leq \frac{5}{2}$$

$$(3) \text{ Sumando } \frac{3}{2}: \leftrightarrow \frac{5}{2} \leq \frac{3}{2} + \frac{5}{x-2} \leq 4$$

$$(4) \text{ Pero } -4 < \frac{5}{2} \rightarrow -4 \leq \frac{3}{2} + \frac{5}{x-2} \leq 4 \leftrightarrow \left| \frac{3}{2} + \frac{5}{x-2} \right| \leq 4$$

$$(5) \text{ De donde se deduce que: } M=4$$

EJERCICIO 11. Hallar el mayor número m tal que $\frac{|x^2+6x+14|}{x^2+27} \geq m$, si

$$\text{Solución. } x^2+6x+14 = (x+3)^2+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |x^2+6x+14| = (x+3)^2+5$$

Luego, a partir de $x \in [-2, 2]$, formemos el numerador y denomina-

donde de la expresión dada:

$$(1) \text{ Si } x \in [-2, 2] \leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \leftrightarrow 1 \leq x+3 \leq 5 \leftrightarrow 1 \leq (x+3)^2 \leq 25$$

$$(2) \text{ Sumando 5: } \leftrightarrow 6 \leq (x+3)^2 + 5 \leq 30 \leftrightarrow 6 \leq |(x+2)^2 + 5| \leq 30 \quad (a)$$

$$(3) \text{ Para el denominador: } x \in [-2, 2] \leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \leftrightarrow -8 \leq x^3 \leq 8$$

$$(4) \text{ Sumando 27: } 19 \leq x^3 + 27 \leq 35 \leftrightarrow \frac{1}{35} \leq \frac{1}{x^3 + 27} \leq \frac{1}{19} \quad (b)$$

$$(5) \text{ Como la expresión } \frac{1}{x^3 + 27}, \text{ es decreciente en } [-2, 2], \text{ multiplicamos en as-}$$

$$\text{pa (a) y (b), resultando: } \frac{6}{19} \leq \frac{|x^2 + 6x + 14|}{x^3 + 27} \leq \frac{30}{35}$$

$$(6) \text{ Por lo tanto, el mayor número buscado es } m=6/19.$$

EJERCICIOS: Grupo 28

1. Demostrar la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:

$$a) \text{ Si } |x| < 3 \rightarrow \left| \frac{1}{4-x} \right| < 1 \quad c) x \in [-5, 4] \rightarrow |3x-5| \leq 20$$

$$b) \text{ Si } |x-1| < 4 \rightarrow \left(\frac{1}{x+5} \right) \in (0, 1) \quad d) |x| < 1 \rightarrow \left| \frac{1-5x}{2x-3} \right| < 6$$

$$e) \text{ Si } a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow |a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$$

2. En las siguientes implicaciones, el antecedente es verdadero, demostrar que el consecuente también es verdadero.

$$a) \text{ Si } x \in (0, 1) \rightarrow \left| \frac{2x}{x+3} \right| < \frac{2}{3} \quad c) \text{ Si } |x| < 1 \rightarrow \left| \frac{x+5}{x+1} \right| < 3$$

$$b) \text{ Si } a, b \in \mathbb{R} \rightarrow |a-b| \leq |a| + |b| \quad d) \text{ Si } |x-1| < 1 \rightarrow |x| + |x-2| = 2$$

3. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

$$a) \text{ Si } \left| \frac{x}{x+2} - 1 \right| < \frac{1}{7} \text{ y } x > 0 \rightarrow x > 12$$

$$b) \text{ Si } x \in [-3, 2] \rightarrow |x^3 - 2x^2 + 3x - 4| < 28$$

$$c) \text{ Si } |a-b| < c \rightarrow |a| < |b| + c, \text{ con } c > 0$$

4. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones para números reales.

$$a) \text{ Si } x < 0 \rightarrow (x-1)(3x-x^2-2) > 0 \quad c) x^2 - 7x + 10 < 0 \rightarrow |2x-7| < 3$$

$$b) \left| \frac{x+2}{x+3} \right| < \frac{3}{2} \rightarrow |x-5| < 2 \quad d) |x| < 3 \rightarrow \left(\frac{1}{x-7} \right) \in \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{10} \right)$$

5. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}: ||a| - |b|| \leq |a+b|$

6. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

$$a) |x-5| < 2 \rightarrow \left| \frac{x+2}{x+3} \right| < \frac{3}{2}$$

$$c) 0 < |x| < 1 \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x+2} < 1$$

$$b) |x| < 1 \rightarrow \left| \frac{x+5}{x+1} \right| < 3$$

$$d) \text{ Si } x \in (-2, 5) \rightarrow \left(\frac{1}{8-x} \right)^x < \frac{1}{10} + \frac{1}{4}$$

7. Demostrar que si $0 \leq b \leq a \rightarrow ||a| - |b|| \leq \sqrt{(a+b)(a-b)}$

8. Sabiendo que $b > 0$ y $|x-a| < 2b$, demostrar que $\left(\frac{b}{x-a+3b} \right)^x < \frac{1}{5}, 1 >$

9. Demostrar que si $a \leq b \leq c \rightarrow |b| \leq |a| + |c|$

10. Demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}: |a-d| \leq |a-b| + |b-c| + |c-d|$

11. Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$; se cumple:

$$(|a| + |b|)(|a| + |c|)(|b| + |c|) \geq \sqrt{8}|abc|$$

12. Sean los números reales a, b, c tales que a y c son de signos diferentes demostrar que si $a < b < c \rightarrow |b| < |a| + |c|$.

13. Demostrar que:
$$\frac{|2+x| - |2-x|}{x} = \begin{cases} 2 & , \text{ si } 0 < x < 2 \\ 4/x & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

14. En los ejercicios siguientes, hallar el valor de la expresión E en el intervalo indicado.

$$a) E = \frac{|4x+1| - |x-1|}{x}, \text{ si } x \in (-1, 1) \quad c) E = \frac{3|3x-8| - |5x+24|}{2x}, \text{ si } x \in (-5, -4)$$

$$b) E = \frac{|7x+2| - |3x+2|}{x}, \text{ si } x \in (-1, 3) \quad d) E = \frac{|6x+32| - 4|8-x|}{5x}, \text{ si } x \in (-3, -2)$$

15. Si $x \in [1, 3]$, hallar el menor número M , tal que: $\left| \frac{x-5}{2x+1} \right| \leq M$

16. Si $(2/x) \in [1/5, 6]$, hallar el menor número M tal que: $\left| \frac{x+3}{x+6} \right| \leq M$.

17. Si $(1/x) \in \mathbb{R} \setminus (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, hallar el menor número M tal que $\left| \frac{x-7}{x+5} \right| \leq M$

18. Si $|2x-5| \leq 3$, hallar el menor número M tal que se cumpla $\left| \frac{x+2}{2x-1} \right| \leq M$.

19. Si $x \in [1, 3]$, determinar el menor número M tal que: $\left| \frac{x^3+2x}{x^2-2x+8} \right| \leq M$.

20. Si $(2/x) \in [1/6, 1/2]$, hallar el menor número M , tal que: $\left| \frac{3-2x}{x-1} \right| \leq M$.

21. Hallar el mayor número m tal que $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 4|x+2| - 6 \geq m$.



4.15.2 ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Los teoremas que permiten la solución de ecuaciones con valor absoluto son los siguientes:

Teorema 49: Si $|a| = b \leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a=b \vee a=-b)$

Aquí, b es el universo dentro del cual se resuelve la ecuación.

Teorema 50: Si $|a| = |b| \leftrightarrow a=b \vee a=-b$

EJEMPLO 1. Resolver: $|3x-5| = 7-x$

Solución. Usaremos el T.49:

$$\begin{aligned} |3x-5|=7-x &\leftrightarrow (7-x \geq 0) \wedge (3x-5=7-x) \vee (3x-5=-7+x) \\ &\leftrightarrow (x \leq 7) \wedge (x=3 \vee x=-1) \end{aligned}$$

$x=3$ y $x=-1$ pertenecen al universo $U=\langle-\infty, 7\rangle \rightarrow S = \{-1, 3\}$

EJEMPLO 2. Resolver: $|2x-1| = 5$

Solución. Siendo $5 = |5| > 0$, cumple la condición de que $b \geq 0$, entonces, $b \in \langle-\infty, +\infty\rangle = \mathbb{R}$. Utilizaremos el T.50.

$$\begin{aligned} |2x-1| = 5 &\leftrightarrow (2x-1=5) \vee (2x-1=-5) \\ &\leftrightarrow (x=3) \vee (x=-2) \rightarrow S = \{-2, 3\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver: $|2x-7| = x-5$

$$\begin{aligned} |2x-7|=x-5 &\leftrightarrow (x-5 \geq 0) \wedge [(2x-7=x-5) \vee (2x-7=-x+5)] \quad (\text{T.49}) \\ &\leftrightarrow (x \geq 5) \wedge (x=2 \vee x=4) \end{aligned}$$

En este caso, $x=2$ y $x=4$ no pertenecen al universo $U=\{5, +\infty\rangle \rightarrow S = \emptyset$

EJEMPLO 4. Resolver: $|x-2| = |3-2x|$

Solución. Aquí el universo es $U=\mathbb{R}$, por tanto, usaremos el T.50:

$$\begin{aligned} |x-2| = |3-2x| &\leftrightarrow (x-2 = 3-2x) \vee (x-2 = -3+2x) \\ &\leftrightarrow (x = 5/3) \vee (x = 1) \rightarrow S = \{1, 5/3\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5. Resolver: $3|x-3|^2 - 14|x-3| - 5 = 0$

Solución. Sea $|x-3|=m$, tal que, $m \geq 0$

$$\text{Entonces: } 3m^2 - 14m - 5 = 0 \leftrightarrow (m = -1/3) \vee (m = 5)$$

$$\begin{aligned} \text{Para } m=5 > 0, \text{ se tiene: } |x-3| = 5 &\leftrightarrow (x-3=5) \vee (x-3=-5) \quad (\text{T.50}) \\ &\leftrightarrow (x=8 \vee x=-2) \rightarrow S = \{-2, 8\} \end{aligned}$$

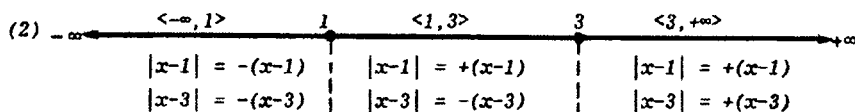
Nota. Cuando se trata de resolver ecuaciones en las que figuran dos o más términos, no semejantes, con barras de valor absoluto, no se utilizan directamente los Teoremas 49 y 50 para su solución. En estos casos es conveniente utilizar el método de los valores críticos, que consiste en lo siguiente:

- (1) Se iguala a cero cada término entre barras de valor absoluto, se resuelve la ecuación resultante, hallando de este modo los valores críticos.
- (2) Se ubican los valores críticos en una recta real, obteniendo de esta manera los intervalos de variación (Universos parciales).
- (3) Se analiza por intervalo el signo de cada valor absoluto, luego reemplazando en la ecuación original obtendremos la solución parcial de cada intervalo.
- (4) Se establece el conjunto solución uniendo las soluciones parciales.

EJEMPLO 6. Resolver: $4|x-1| + x = |x-3| + 5$ (*)

Solución. (1) Obtención de los valores críticos:

$$(x-1=0) \vee (x-3=0) \leftrightarrow x=1 \vee x=3$$



(3) Para $x \in (-\infty, 1)$, en (*): $-4(x-1) + x = -(x-3) + 5 \leftrightarrow x = -2$

$$-2 \in (-\infty, 1) \rightarrow S_1 = \{-2\}$$

Para $x \in (1, 3)$, en (*): $4(x-1) + x = -(x-3) + 5 \leftrightarrow x = 2$

$$2 \in (1, 3) \rightarrow S_2 = \{2\}$$

Para $x \in (3, +\infty)$, en (*): $4(x-1) + x = (x-3) + 5 \leftrightarrow x = 3/2$

$$(3/2) \notin (3, +\infty) \rightarrow S_3 = \emptyset$$

(4) Por lo tanto: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{-2, 2\}$

4.15.3 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

En la resolución de inecuaciones con valor absoluto intervienen fundamentalmente los siguientes teoremas:

Teorema 51. Si $b \geq 0$ y $|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$

Teorema 52. Si $|a| \geq b \leftrightarrow (a \geq b) \vee (a \leq -b)$

Teorema 53. $\forall a, b \in \mathbb{R}: |a| \leq |b| \leftrightarrow a^2 \leq b^2$

EJEMPLO 1. Resolver: $|2x-3| \leq 3x-8$

Solución. Según el Teorema 51:

$$\begin{aligned} |2x-3| \leq 3x-8 &\leftrightarrow (3x-8 \geq 0) \wedge (-3x+8 \leq 2x-3 \leq 3x-8) \\ &\leftrightarrow (x \geq 8/3) \wedge [-3x+8 \leq 2x-3] \wedge [2x-3 \leq 3x-8] \\ &\leftrightarrow (x \geq 8/3) \wedge [(5x \geq 11) \wedge (x \geq 5)] \\ &\leftrightarrow (x \geq 8/3) \wedge (x \geq 5) \rightarrow x \geq 5 \\ \therefore S &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 5\} = [5, +\infty) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Resolver: $|5-3x| > 2x+6$

Solución. Por el Teorema 52, se tiene:

$$\begin{aligned} |5-3x| > 2x+6 &\leftrightarrow (5-3x > 2x+6) \vee (5-3x < -2x-6) \\ &\leftrightarrow (x < -1/5) \vee (x > 11) \\ \therefore S &= \{x \in \mathbb{R} | x < -1/5 \vee x > 11\} = (-\infty, -1/5) \cup (11, +\infty) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver: $|4-x| < |3+2x|$

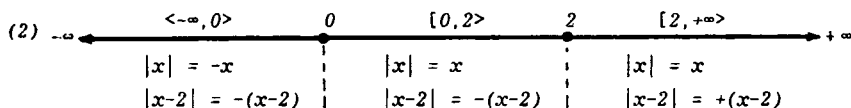
Solución. Según el Teorema 53:

$$\begin{aligned} |4-x| < |3+2x| &\leftrightarrow (4-x)^2 < (3+2x)^2 \\ &\leftrightarrow 16-8x+x^2 < 9+12x+4x^2 \leftrightarrow 3x^2+20x-7 > 0 \\ &\leftrightarrow (3x-1)(x+7) > 0 \leftrightarrow x < -7 \vee x > 1/3 \\ \therefore S &= x \in (-\infty, -7) \cup (1/3, +\infty) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Resolver: $3|x| + |x-2| \leq 6$ (*)

Solución. Siguiendo el mismo criterio para resolver ecuaciones con varios términos con valor absoluto, se tiene:

(1) Obtención de los valores críticos: $x=0$ y $x=2$



(3) a) Para $x \in (-\infty, 0)$, en (*): $-3x-(x-2) \leq 6 \leftrightarrow x \geq -1 \rightarrow x \in [-1, +\infty)$

Entonces: $S_1 = (-\infty, 0) \cap [-1, +\infty) = [-1, 0)$

b) Para $x \in [0, 2)$, en (*): $3x-(x-2) \leq 6 \leftrightarrow x \leq 2 \rightarrow x \in (-\infty, 2]$

Entonces: $S_2 = [0, 2) \cap (-\infty, 2] = [0, 2)$

c) Para $x \in [2, +\infty)$, en (*): $3x+x-2 \leq 6 \leftrightarrow x \leq 2 \rightarrow x \in (-\infty, 2]$

Entonces: $S_3 = [2, +\infty) \cap (-\infty, 2] = \{2\}$

$\therefore S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-1, 0) \cup [0, 2) \cup \{2\} = [-1, 2]$

EJEMPLO 5. Resolver: $x^2 - 3|x - 2| - 4 > 0$ (*)

Solución. En el punto crítico $x=2$ se tiene:

$$a) \text{ Para } x < 2 \leftrightarrow x - 2 < 0 \rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \quad (\text{Def. V.A.})$$

$$\text{Entonces en (*): } (x < 2) \wedge [x^2 + 3(x - 2) - 4 > 0]$$

$$\leftrightarrow (x < 2) \wedge [(x + 5)(x - 2) > 0]$$

$$\leftrightarrow (x < 2) \wedge (x < -5 \vee x > 2) \rightarrow S_1 = x \in (-\infty, -5)$$

$$b) \text{ Para } x > 2 \leftrightarrow x - 2 > 0 \rightarrow |x - 2| = (x - 2) \quad (\text{Def. V.A.})$$

$$\text{En (*): } (x > 2) \wedge [x^2 - 3(x - 2) - 4 > 0] \leftrightarrow (x > 2) \wedge [(x - 1)(x - 2) > 0]$$

$$\leftrightarrow (x > 2) \wedge [(x < 1) \vee (x > 2)] \rightarrow S_2 = x \in (2, +\infty)$$

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$$

EJEMPLO 6. Resolver: $|3x - 1| < |2x + 1| + |x - 2|$

Solución. Según el T.47: $|a + b| \leq |a| + |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

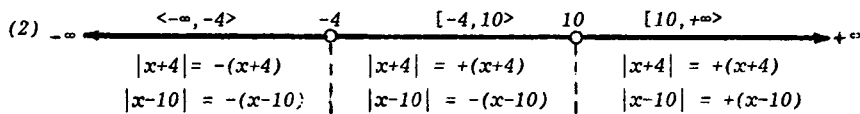
$$\begin{aligned} \text{Luego, si } (3x - 1) &= (2x + 1) + (x - 2) \rightarrow |3x - 1| = |(2x + 1) + (x - 2)| \\ &\rightarrow |3x - 1| \leq |2x + 1| + |x - 2| \end{aligned}$$

Es una desigualdad triangular que es válida $\forall x \in \mathbb{R}$. $\therefore S = (-\infty, +\infty)$

EJEMPLO 7. Resolver: $\frac{|x - 10| - x + |x + 4|}{x + 1} < 2$ (*)

Solución. (1) Obtención de los valores críticos:

$$x - 10 = 0 \rightarrow x = 10; \quad x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$



$$(3) a) \text{ Para } x \in (-\infty, -4), \text{ en (*): } \frac{-(x - 10) - x + (x + 4)}{x + 1} < 2 \leftrightarrow \frac{6 - 3x}{x + 1} < 2$$

$$\leftrightarrow \frac{5x - 4}{x + 1} > 0 \leftrightarrow x < -1 \vee x > 4/5$$

$$\text{Entonces: } S_1 = (-\infty, -4) \cap (x < -1 \vee x > 4/5) = (-\infty, -4)$$

$$b) \text{ Para } x \in [-4, 10], \text{ en (*): } \frac{-(x - 10) - x + (x + 4)}{x + 1} < 2 \leftrightarrow \frac{14 - x}{x + 1} < 2$$

$$\leftrightarrow \frac{x - 4}{x + 1} > 0 \leftrightarrow x < -1 \vee x > 4$$

$$\text{Entonces: } S_2 = [-4, 10] \cap (x < -1 \vee x > 4) = [-4, -1] \cup (4, 10]$$

$$c) \text{ Para } x \in [10, +\infty), \text{ en (*): } \frac{(x - 10) - x + (x + 4)}{x + 1} < 2 \rightarrow \frac{x - 6}{x + 1} < 2$$

$$\leftrightarrow \frac{x + 8}{x + 1} > 0 \leftrightarrow x < -8 \vee x > -1$$

$$\begin{aligned}
 + S_3 &= [10, +\infty) \cap (x < -8 \vee x > -1) = [10, +\infty) \\
 \therefore S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \langle -\infty, -4 \rangle \cup [-4, -1] \cup \langle 4, 10 \rangle \cup [10, +\infty) \\
 &= \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x-2} > 2 - |x-2|\}$, hallar el complemento de A .

Solución. a) Si $x > 2 \rightarrow x-2 > 0 \rightarrow |x-2| = +(x-2)$

$$+ \frac{1}{x-2} > 2 - (x-2) \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{x-2} > 0$$

Como $(x-3)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \rightarrow S_1 = \langle 2, +\infty \rangle - \{3\}$

b) Si $x < 2 \rightarrow x-2 < 0 \rightarrow |x-2| = -(x-2)$

$$+ -\frac{1}{x-2} > 2 + (x-2) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x-2} < 0$$

Como $(x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \rightarrow S_2 = \langle -\infty, 2 \rangle - \{1\}$

Luego, $A = S_1 \cup S_2 = \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle - \{1, 3\} = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$

$$\therefore A' = \{1, 2, 3\}$$

EJERCICIO 2. Sean los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2|^2 - 3|x-2| - 4 > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{1}{2x+6}) \in [\frac{1}{10}, 1]\}$. Hallar $A' - B'$.

Solución. En A : $(|x-2|-4)(|x-2|+1) > 0$. Dado que el factor $(|x-2|+1) > 0$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, entonces los elementos de A se obtienen de: $|x-2|-4 > 0$

$$+ |x-2| > 4 \Leftrightarrow (x-2 > 4) \vee (x-2 < -4) \Leftrightarrow (x > 6) \vee (x < -2)$$

Luego, si $A = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 6, +\infty \rangle \rightarrow A' = [-2, 6]$

$$\text{En } B: (\frac{1}{2x+6}) \in [\frac{1}{10}, 1] \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{2x+6} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x+6 \leq 10 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq 2$$

Si $B = [-5/2, 2] \rightarrow B' = \langle -\infty, -5/2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

$$\therefore A' - B' = [-2, 2]$$

EJERCICIO 3. Si A es el conjunto solución de la inecuación:

$$||8-2x|-4| \leq 6-x, \text{ hallar } n(\cap A).$$

Solución. $||8-2x|-4| \leq 6-x \Leftrightarrow (|8-2x|-4 \leq 6-x) \wedge (|8-2x|-4 \geq -6+x) \wedge (6-x \geq 0)$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow (x \leq 6) \wedge \underbrace{(|8-2x| \leq 10-x)}_{(1)} \wedge \underbrace{(|8-2x| \geq x-2)}_{(2)}
 \end{aligned}$$

Resolveremos (1) y (2) teniendo en cuenta que el universo es $U: x \leq 6$

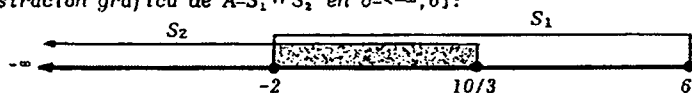
$$\text{En (1): } |8-2x| \leq 10-x \leftrightarrow (8-2x \leq 10-x) \wedge (8-2x \geq -10+x)$$

$$\leftrightarrow (x \geq -2) \wedge (x \leq 6) \rightarrow S_1 = [-2, 6]$$

$$\text{En (2): } |8-2x| \geq x-2 \leftrightarrow (8-2x \geq x-2) \vee (8-2x \leq -x+2)$$

$$\leftrightarrow (x \leq 10/3) \vee (x \geq 6) \rightarrow S_2 = (-\infty, 10/3] \cup [6, +\infty)$$

Ilustración gráfica de $A=S_1 \cap S_2$ en $U=(-\infty, 6]$:



$$\text{Luego: } A = S_1 \cap S_2 = [-2, 10/3] \cup \{6\} \rightarrow N \cap A = \{1, 2, 3, 6\} \rightarrow n(N \cap A) = 4$$

EJERCICIO 4. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2-|4-3x|| > 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{|x-1|} \leq 3\}$, hallar $A' \cap B$

$$\text{Solución. En A: } |2-|4-3x|| > 1 \leftrightarrow (2-|4-3x| > 1) \vee (2-|4-3x| < -1) \quad (\text{T.52})$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(|3x-4| < 1)}_{(1)} \vee \underbrace{(|3x-4| > 3)}_{(2)} \quad (\text{T.44})$$

$$\text{En (1): } |3x-4| < 1 \leftrightarrow 1 < 3x-4 < -1 \leftrightarrow 5/3 < x < 1 \rightarrow S_1 = (5/3, 1)$$

$$\text{En (2): } |3x-4| > 3 \leftrightarrow (3x-4 > 3) \vee (3x-4 < -3) \leftrightarrow (x > 7/3) \vee (x < 1/3)$$

$$\rightarrow S_2 = (-\infty, 1/3) \cup (7/3, +\infty)$$

$$\text{Luego, } A = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1/3) \cup (5/3, 1) \cup (7/3, +\infty)$$

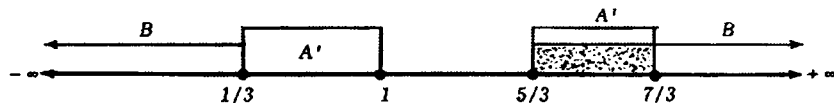
$$\therefore A' = [1/3, 1] \cup [5/3, 7/3]$$

$$\text{En B: } \frac{2}{|x-1|} \leq 3. \text{ Como } |x-1| > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \text{ se tiene:}$$

$$2 \leq 3|x-1| \rightarrow |x-1| \geq 2/3 \leftrightarrow (x-1 \geq 2/3) \vee (x-1 \leq -2/3), x \neq 1 \quad (\text{T.52})$$

$$\leftrightarrow (x \geq 5/3) \vee (x \leq 1/3), x \neq 1$$

$$\therefore B = (-\infty, 1/3) \cup [5/3, +\infty)$$



$$\therefore A' \cap B = \{1/3\} \cup [5/3, 7/3]$$

EJERCICIO 5. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{5}{2x-1}| \geq |\frac{1}{x-2}|\}$, hallar A' .

$$\text{Solución. Por el T.46: } \frac{5}{|2x-1|} \geq \frac{1}{|x-2|}. \text{ Dado que los denominadores son}$$

siempre positivos, se tiene: $5|x-2| \geq |2x-1|, x \neq 1/2, x \neq 2$

$$\rightarrow 25(x-2)^2 \geq (2x-1)^2 \leftrightarrow 25(x-2)^2 - (2x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Factorizando: } \leftrightarrow [5(x-2) + (2x-1)][5(x-2) - (2x-1)] \geq 0$$

$$\leftrightarrow (7x-11)(x-3) \geq 0 \leftrightarrow (x \leq 11/7) \vee (x \geq 3), x \neq 1/2, x \neq 2$$

$$\text{Luego: } A = (-\infty, 11/7] \cup [3, +\infty) - \{1/2\} \rightarrow A' = (11/7, 3) \cup \{1/2\}$$

EJERCICIO 6. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|2x+1|-x}{x} \leq 2\}$, hallar:

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x}, x \in A, x \neq 0\}.$$

Solución. En A consideremos los casos: $x > 0$ y $x < 0$

a) Si $x > 0 \rightarrow |2x+1|-x \leq 2x \rightarrow |2x+1| \leq 3x$

$$\leftrightarrow x > 0 \wedge [(2x+1 \leq 3x) \wedge (2x+1 \geq -3x)]$$

$$\leftrightarrow x > 0 \wedge [(x \geq 1) \wedge (x \geq -1/5)] \leftrightarrow x \geq 1 \rightarrow S_1 = [1, +\infty)$$

b) Si $x < 0 \rightarrow |2x+1|-x > 2x$ (Se cambia el sentido de la desigualdad)

$$\rightarrow |2x+1| > 3x \leftrightarrow (2x+1 > 3x) \vee (2x+1 < -3x)$$

$$\leftrightarrow (x \leq 1) \vee (x \leq -1/5) \leftrightarrow x \leq 1$$

Luego: $(x < 0) \wedge (x \leq 1) \rightarrow S_2 = (-\infty, 0]$

$$\therefore A = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \rightarrow A' = [0, 1]$$

Para B : $y = 1/x$, $x \in A'$, $x \neq 0 \rightarrow x \in (0, 1] \rightarrow 0 < x \leq 1$

Si $x < 1 \rightarrow \frac{1}{x} > 1$, y si $x > 0 \rightarrow \frac{1}{x} < +\infty$. Por lo tanto: $B = (1, +\infty)$

EJERCICIO 7. Resolver: $|\frac{x-1}{x-4x+2}| > |\frac{1}{x-1}|$

Solución. Siendo positivos ambos extremos de la inecuación, entonces:

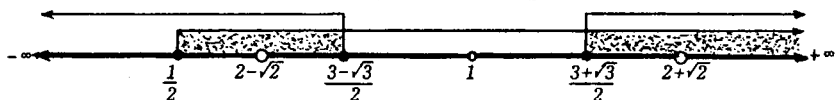
$$|x-1|^2 > |x^2-4x+2|, \text{ si } x \neq 1 \text{ y } x^2-4x+2 \neq 0$$

$$\leftrightarrow |x^2-4x+2| < x^2-2x+1, \text{ si } x \neq 1, x \neq 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\leftrightarrow (x^2-4x+2 \leq x^2-2x+1) \wedge (x^2-4x+2 \geq -x^2+2x-1)$$

$$\leftrightarrow (-2x \leq -1) \wedge (2x^2-6x \geq -3) \leftrightarrow (x \geq 1/2) \wedge [(x-3/2)^2 \geq 3/4]$$

$$\leftrightarrow (x \geq \frac{1}{2}) \wedge [(x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2}) \vee (x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2})], x \neq 1, x \neq 2 \pm \sqrt{2}$$



$$\therefore S = [\frac{1}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty) - \{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$$

EJERCICIO 8. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-3x-6| > |x+6|\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1|+x > \sqrt{-x}\}$, hallar $A' \cup B'$.

Solución. En A : $|x^2-3x-6| > |x+6| \rightarrow (x^2-3x-6)^2 > (x+6)^2$ (T.53)

$$\leftrightarrow (x^2-3x-6)^2 - (x+6)^2 > 0 \leftrightarrow x(x-2)(x+2)(x-6) > 0$$
 (*)

(1) Valores críticos: $x=-2$, $x=0$, $x=2$, $x=6$



(4) Los intervalos con signo positivo satisfacen (*), luego:

$$A = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 6, +\infty \rangle$$

En B, el universo del radical es $-x > 0 \leftrightarrow x < 0 \rightarrow x-1 \leq 0 + |x-1| = -(x-1)$

Entonces: $(x \leq 0) \wedge [-(x-1)+x] > \sqrt{-x} \leftrightarrow (x \leq 0) \wedge (1 > \sqrt{-x})$

$$\leftrightarrow (x \leq 0) \wedge (1 > -x) \leftrightarrow (x \leq 0) \wedge (x > -1) \rightarrow B = \langle -1, 0 \rangle$$

Ubicando B en la solución gráfica de A observamos que: $A \cap B = \emptyset$

$$\therefore A' \cup B' = (A \cap B)' = (\emptyset)' = R$$

EJERCICIO 9. Dados los siguientes conjuntos $A = \{x \in R \mid |\frac{x-2}{x+3}| < 1\}$, $B = \{x \in R \mid |x-3| + |x-2| > -2\}$, $C = \{x \in R \mid |x^2-4| = |x^2-3x+2|\}$. Hallar el conjunto M, si $M = \{x \in R \mid x \in A + x \in (B-C)\}$.

Solución. En A: $|\frac{x-2}{x+3}| < 1 \leftrightarrow (\frac{x-2}{x+3} < 1) \wedge (\frac{x-2}{x+3} > -1)$ (T.51)

$$\leftrightarrow (\frac{5}{x+3} > 0) \wedge (\frac{2x+1}{x+3} > 0)$$

$$\leftrightarrow (x > -3) \wedge (x < -3 \vee x > -1/2) \leftrightarrow (x > -1/2) \rightarrow A = \langle -1/2, +\infty \rangle$$

En B: $|x-3| + |x-2| > -2$

Por definición de valor absoluto, $|x-3|$ y $|x-2|$ son siempre positivos, entonces su suma también lo es, por lo tanto: $B = \langle -\infty, +\infty \rangle = R$

En C: $|x^2-4| = |x^2-3x+2| \leftrightarrow (x^2-4=x^2-3x+2) \vee (x^2-4 = -x^2+3x-2)$ (T.50)

$$\leftrightarrow (3x=6) \vee (2x^2-3x-2=0)$$

$$\leftrightarrow (x=2) \vee (x=-1/2 \vee x=2) \rightarrow C = \{-1/2, 2\}$$

Luego: $M = \{x \in R \mid x \in A + x \in (B-C)\} = \{x \in R \mid x \notin A \vee x \in (B-C)\}$ ($p + q \equiv \sim p \vee q$)

$$\rightarrow M = A' \cup (B-C) = \langle -\infty, -1/2 \rangle \cup (R - \{-1/2, 2\}) = R - \{2\}$$

EJERCICIO 10. Resolver en R la siguiente inecuación:

$$||2x^2-14x+24| + |x^2+4|| < ||3x^2-27x+54| + x^2+4|$$

Solución. Dado que $x^2+4 > 0$, $\forall x \in R \rightarrow |x^2+4| = x^2+4$

$$\rightarrow ||2x^2-14x+24| + |x^2+4|| < ||3x^2-27x+54| + x^2+4|$$

Aplicando la desigualdad triangular en cada lado de la inecuación se tiene:

$$|2x^2-14x+24| + |x^2+4| < |3x^2-27x+54| + |x^2+4|$$

$$\leftrightarrow |2x^2-14x+24| < |3x^2-27x+54| \leftrightarrow (2x^2-14x+24)^2 - (3x^2-27x+54)^2 < 0$$

$$\leftrightarrow (5x^2-41x+78)(-x^2+13x-30) < 0 \leftrightarrow (5x-26)(x-3)(x-10)(x-3) > 0$$

Inecuación equivalente: $(5x-26)(x-10) > 0$, $x \neq 3$

Por el método de los valores críticos: $S = \langle -\infty, 26/5 \rangle \cup \langle 10, +\infty \rangle - \{3\}$

EJERCICIO. Sean los conjuntos: $A = \{x \in R \mid |4x/3-8| < |x/3-6| + |x-2|\}$,

$B = \{x \in Z \mid |x^2+x| < |x+4|\}$. Hallar $A \Delta B$.

Solución. En A: si $\frac{4}{3}x - 8 = (\frac{1}{3}x - 6) + (x-2)$

$$+ \left| \frac{4}{3}x - 8 \right| = \left| \left(\frac{1}{3}x - 6 \right) + (x-2) \right| \rightarrow \left| \frac{4}{3}x - 8 \right| \leq \left| \frac{1}{3}x - 6 \right| + |x-2|$$

Es una desigualdad triangular que es válida $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow A = \mathbb{R}$

En B: $|x^2+x| < |x+4| \iff (x^2+x)^2 < (x+4)^2 \iff (x^2+x)^2 - (x+4)^2 < 0 \quad (T.53)$

de donde: $(x^2+2x+4)(x+2)(x-2) < 0 \quad (1)$

Pero: $x^2+2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Verificar que: $\Delta < 0$)

Entonces, la desigualdad (1) se cumple si $(x+2)(x-2) < 0 \iff -2 < x < 2$

Luego: $B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$

$$\therefore A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

EJERCICIO 12. Si A es el conjunto solución de $||x-2|-3| \leq 4-x$ y B es el conjunto solución de: $\left| \frac{x-1}{x^2-4x+8} \right| \leq \frac{1}{|x-1|}$, hallar $A \cap B$.

Solución. En A: $||x-2|-3| \leq 4-x$

$$\iff (4-x \geq 0) \wedge (|x-2|-3 \leq 4-x \wedge |x-2|-3 > -4+x) \quad (T.51)$$

$$\iff (x \leq 4) \wedge (|x-2| \leq 7-x \wedge |x-2| > x-1)$$

$$\iff (x \leq 4) \wedge [(x-2 \leq 7-x \wedge x-2 > -7+x) \wedge (x-2 \geq x-1 \vee x-2 \leq -x+1)]$$

$$\iff (x \leq 4) \wedge [(x \leq 9/2 \wedge 5 > 0) \wedge (-1 > 0 \vee x \leq 3/2)]$$

$$\iff (x \leq 4) \wedge [(x \leq 9/2 \wedge R) \wedge (\phi \vee x \leq 3/2)]$$

$$\iff (x \leq 4) \wedge [(x \leq 9/2) \wedge (x \leq 3/2)] \iff x \leq 3/2 \rightarrow A = (-\infty, 3/2]$$

En B, por el T.46: $\frac{|x-1|}{|x^2-4x+8|} \leq \frac{1}{|x-1|}$

Dado que $x^2-4x+8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (verificar que $\Delta < 0$) $\rightarrow |x-1|^2 \leq x^2-4x+8, x \neq 1$

$$\iff x^2-2x+1 \leq x^2-4x+8, x \neq 1 \iff x \leq 7/2, x \neq 1 \rightarrow B = (-\infty, 1) \cup (1, 7/2]$$

$$\therefore A \cap B = (-\infty, 1) \cup (1, 3/2]$$

EJERCICIO 13. Resolver: $\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} > 0$

Solución. $\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} > \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \quad (*)$

El segundo miembro de (*) es siempre positivo, también lo es el denominador del primer miembro. Por lo tanto, la desigualdad es válida si y sólo si:

$$x||x|-1|-12 > 0 \rightarrow x||x|-1| > 12 \quad (1)$$

Habrà solución en (1), si $x > 0$, dado que $||x|-1|$ es siempre positivo.

Luego, si $x > 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow x|x-1| > 12$

a) Para $x > 1 \rightarrow x(x-1) > 12 \iff x^2-x-12 > 0 \iff x < -3 \vee x > 4$

$$\therefore S_1 = (x > 1) \wedge (x \leq -3 \vee x \geq 4) = x \in [4, +\infty)$$

$$b) \text{ Para } 0 < x < 1 \rightarrow x(1-x) \geq 12 \leftrightarrow x^2 - x + 12 \leq 0$$

$$\text{Pero } x^2 - x + 12 > 0, \forall x \in \mathbb{R} (\Delta < 0) \rightarrow S_2 = \emptyset$$

Por lo tanto, el universo de (*) es: $U = S_1 \cup S_2 = [4, +\infty)$

$$\text{En } U: |x| = x, |x+2| = x+2, |x-1| = x-1$$

$$\text{Luego, en (*): } \frac{x(x-1)-12}{x+2+1} \geq \frac{|x-1-3|}{x-1+4} \leftrightarrow \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} \geq \frac{|x-4|}{x+3}$$

$$\text{También en } U: |x-4| = x-4 \rightarrow \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} \geq \frac{x-4}{x+3}$$

$$\text{Siendo } (x+3) \text{ positivo en } U: \rightarrow (x-4)(x+3) \geq (x-4)$$

$$\leftrightarrow (x-4)(x+2) \geq 0 \leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 4$$

$$\text{Por lo tanto, en } U: S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 4\} = [4, +\infty)$$

EJERCICIO 14. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | \frac{x^2}{|x-4|} < \frac{x}{|x^2-16|}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x^2-1} \in (-4, 4)\}$. Hallar el conjunto: $C = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \wedge x \in B\}$.

Solución. El primer miembro de A es siempre positivo, entonces el segundo miembro de A también tiene que ser positivo, esto se verifica para $x > 0 \rightarrow |x| = x$. Luego, en A se tiene:

$$\frac{x^2}{|x-4|} < \frac{x}{|x-4||x+4|}, \quad x > 0, \quad x \neq \pm 4$$

$$\text{Ahora bien: } \frac{x}{|x-4|} > 0, \text{ por ser } x > 0 \text{ y } x \neq \pm 4$$

Eliminando esta expresión, la inequación equivalente es:

$$\begin{aligned} x < \frac{1}{|x+4|} &\rightarrow x|x+4| < 1 \rightarrow x(x+4) < 1 & (x+4 > 0) \\ &\leftrightarrow (x+2)^2 < 5 \leftrightarrow -2-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}-2 \\ &\leftrightarrow 0 < x < \sqrt{5}-2 & (x > 0) \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } A = (0, \sqrt{5}-2)$$

$$\begin{aligned} \text{En } B: \sqrt{x^2-1} \in (-4, 4) &\leftrightarrow -4 < \sqrt{x^2-1} < 4 & (\text{Pero: } \sqrt{a} \geq 0) \\ &\rightarrow 0 \leq \sqrt{x^2-1} < 4 \leftrightarrow 0 \leq x^2-1 < 16 \leftrightarrow (x^2 > 1) \wedge (x^2 < 17) \\ &\leftrightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 1) \wedge (-\sqrt{17} < x < \sqrt{17}) \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } B = (-\sqrt{17}, -1] \cup [1, \sqrt{17})$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \vee x \in B\} \quad (p \wedge q \equiv \neg p \vee \neg q)$$

$$\text{Luego: } C = A' \cup B, \text{ pero } B \subset A' \rightarrow C = A' \quad \therefore C = (-\infty, 0] \cup [\sqrt{5}-2, +\infty)$$

EJERCICIO 15. Si $A = \{x \in \mathbb{R} | \frac{x}{|x-1|-2} > 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | \frac{|x-1|}{x-3} < 1\}$, determinar el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} | A \leftrightarrow B\}$.

Solución. En A consideremos los casos: $x < 1$ y $x > 1$

$$a) \text{ Si } x < 1 \rightarrow |x-1| = -(x-1) \rightarrow \frac{x}{-(x-1)-2} > 1 \leftrightarrow \frac{2x+1}{x+1} < 0$$

$$\text{Entonces: } (x < 1) \wedge (-1 < x < -1/2) \leftrightarrow -1 < x < -1/2$$

$$b) \text{ Si } x > 1 \rightarrow |x-1| = +(x-1) \rightarrow \frac{x}{(x-1)-2} > 1 \leftrightarrow \frac{3}{x-3} > 0 \leftrightarrow x > 3$$

$$\rightarrow (x > 1) \wedge (x > 3) \leftrightarrow x > 3$$

$$\text{Luego: } A = \langle -1, -1/2 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

Análogamente se determina el conjunto: $B = \langle -\infty, 3 \rangle$

Si $p(x)=x \in A$ y $q(x)=x \in B$, entonces por la equivalencia bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \wedge q), \text{ tendremos: } S = \{x \in \mathbb{R} | x \in (A \cap B) \vee x \notin (A \cap B)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cup B)^c\}$$

$$\text{Pero: } A \cap B = \langle -1, -1/2 \rangle \text{ y } A \cup B = \mathbb{R} - \{-1, -1/2, 3\}$$

$$\text{Entonces: } S = \langle -1, -1/2 \rangle \cup \{-1, -1/2, 3\} = [-1, -1/2] \cup \{3\}$$

EJERCICIOS: Grupo 29

En los ejercicios del 1 al 18, determinar el conjunto solución de las ecuaciones dadas.

$$1. |3x-1| = 2x+5$$

$$10. 2|x^2-2|+5 = 6|2x^2-3|$$

$$2. |x^2-4| = 4-2x$$

$$11. 3||x+1|-4|^2-5||x+1|-4| = 2$$

$$3. 2+3\left|\frac{3x-1}{2}\right| = 3x+5$$

$$12. |3x-1|-|x+2| = 1$$

$$4. |x-4|^2-5|x-4|+6 = 0$$

$$13. 3|x+1|-2|x-2| = 2x-1$$

$$5. ||x+2|-1|^2-5||x+2|-1|-6 = 0$$

$$14. x^2+|x+1| = |3x-2|+5$$

$$6. |4x+6|+x = 2|2x+3|$$

$$15. ||x^2-5x+15|-x^2+8| = |3x+9|$$

$$7. |2x-3|+2 = |x-6|$$

$$16. |2x-3|-1 = |x-3|$$

$$8. ||x|-3| = |3x+2|$$

$$17. |x+1|+2|x-2| = |x-8|$$

$$9. 2|x+1|-3|x-2|+|x-5| = x+2$$

$$18. 2||x-5|+2|^2-11||x-5|+2|+12 = 0$$

19. Sean $A=\{x \in \mathbb{R} | |3x-1|=2x+5\}$; $B=\{x \in \mathbb{R} | |x+1|+9=3x\}$. Hallar la suma de los elementos de $A \cup B$.

20. Si $A=\{x \in \mathbb{R} | |2x+3|=|x+3|\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} | |2x+12|=2x+12\}$ y $C=\{x \in \mathbb{R} | |3x+4| < x\}$; hallar $(A \cap B) \cup C$.

En los ejercicios del 21 al 36, hallar los números reales que satisfagan la

desigualdad dada; dar el intervalo solución.

21. $|3-2x| < 3x-8$

29. $|x|+2|x-1|-|2x-5| < 3$

22. $|5x-4| > 3x-2$

30. $|x^2-1|-|x+3| \leq |x-1|$

23. $|2x^2-3| \geq 5x$

31. $|6x^2-9x-3| < |2x^2-9x+2|$

24. $|x^2-2x-5| \geq |x^2+4x+1|$

32. $(|x|-1)(2x+1)(|x|+3) \geq 0$

25. $(|x-2|+|x+2|)(|1-x|-|2-x|) \geq x^2-6$

33. $|x^2-4|-|x-9| \leq |x-2|$

26. $3|x-3|^2-2|x-3| < 8$

34. $|x+4|-|2x+3| \leq 4$

27. $|x-3|+2|x| < 5$

35. $|x^2-5|^2-|x^2-5| \leq 12$

28. $|2x+8| \leq |x+1|+3$

36. $(|x-2|+|x-3|)(|2-x|-|3-x|) \geq |x^2-1|$

En los ejercicios del 37 al 52, determinar el conjunto solución de las inequaciones dadas.

37. $\frac{|x^2-2|+x}{x+2} \leq 3$

45. $\frac{|x^2-16|}{x-3} + \frac{8(x+4)}{9-x^2} \leq 0$

38. $\frac{|x-6|-x+|x+2|}{x-2} < 3$

46. $\frac{x+2}{|x+8|} \geq \frac{x-4}{x-3}$

39. $\frac{|x-8|-x+|x+4|}{x+2} < 3$

47. $\frac{|x-5|+|x+1|}{x-1} \leq 3$

40. $\frac{|x+4|-|x-5|}{x-7} \leq 1$

48. $\frac{|x^2+3x+11|}{x-2} \leq 3$

41. $\frac{|x-4|}{x-5} \leq \frac{x}{x+1}$

49. $\left|\frac{x+2}{x}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

42. $\frac{||x+1|-2|}{2-|x|} \geq 1$

50. $\left|\frac{x-1}{x^2-4x+8}\right| \leq \left|\frac{1}{x-1}\right|$

43. $\frac{|2x-1|-x}{x-5} < 2$

51. $\frac{|x-4|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$

44. $\frac{|x-1|-2}{x+3} \leq 0$

52. $\frac{|x|-3}{5-|x|} \geq \frac{2-|x|}{|x|+1}$

53. Resolver: $(\sqrt{|x-1|-3} - \sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3} + \sqrt{5-|x-4|}) \leq x-6$

54. Resolver: $(\sqrt{|x-2|-4} - \sqrt{6-|x-3|})(\sqrt{|x-2|-4} + \sqrt{6-|x-3|}) \leq |x-2|-5$

55. Resolver: $\sqrt{\frac{|x+1|}{|x-1|} \cdot \frac{|x-1|-2}{|x-1|} - 1} + \sqrt{\frac{x}{x^2+4} - \frac{x-3}{x^2+x+4}} \geq 0$

56. Resolver: $\sqrt{\frac{|x||x+1|-2|}{|x-2|+5} - \frac{||x+3|-1|}{|x+1|+2}} + \sqrt{9-x} \geq 0$
57. Expresar los siguientes conjuntos como un intervalo de números reales.
- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{|x|-4} < 0 \rightarrow |x-3| \geq 0\}$
- b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|2x-1|-|3x+6|} \leq \sqrt{|4x-2|-|x-8|}\}$
- c) $A = \{1 + \frac{x-1}{x+2} \mid |x| < -1, 2\}$
58. Si A es el conjunto solución de la inequación $||6-2x|-6| \leq 6-x$, hallar $n(N \cap A)$.
59. Hallar m de modo que la solución de $mx^2+2mx \leq 5mx-1$ sea la misma de: $|x-3/2| \leq 7/2$.
60. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| > |x|-1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{3}{x-2}| < 1\}$. Hallar $A-B'$.
61. Resolver el sistema: $|\frac{x^2}{|x|-4}| < \frac{x}{|x^2-16|}$ y $|x| < \frac{1}{x}$
62. Si A es el conjunto solución de la inequación $|x-3| < 2x+5$ y B el conjunto solución de la inequación $3 < x^2-1 < 8$, hallar $A-B$.
63. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} + |\frac{x-2}{3}| \geq x\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < |2x+1| < 5\}$, hallar $A \cap B$.
64. Sea M el conjunto solución, en $\mathbb{R}$, de $|\frac{4-2x}{3x+2} + \frac{2}{3}| < \frac{1}{300}$, se tiene que: $M \cap [0, +\infty) = \langle N, +\infty \rangle$; hallar N .
65. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |9-x^2| \geq 7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{1}{2x-3}| < 1\}$, hallar $A-B$.
66. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-x| < x+3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-2| \geq x+6\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-2| = |x^2-4|\}$. Hallar el conjunto M , si $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A + x \in (B \cap C)\}$.
67. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+4} \leq \frac{3x+2}{x+2}\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|4-x| + |2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2\}$. Hallar $A \cap B$.
68. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{1}{x-2}| + |x-2| > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (|x-1| + |x-2|) \times (|1-x| - |2-x|) \leq x^2-6\}$. Si $C = A-B$, hallar en C la solución de la inequación $||8-2x|-4| \leq 6-x$.
69. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| + |x+2| > |x-3|\}$, hallar el $n(Z \cap A')$.
70. Hallar $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{|5a-20|-|3a-20|}{a} + |2x-3| \leq |x|-2\}$ donde $a \in \langle -3, -2 \rangle$

71. Sean a, b, c números enteros positivos y consecutivos tal que $a=1$. Si $x \in \mathbb{R}$ resolver y analizar las soluciones de la inecuación $||x-a|-b| \leq (c-x)$.
72. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3|^2 - 3|x-3| - 18 > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (\frac{1}{2x+8}) \in [\frac{1}{12}, 2]\}$ Hallar $A' \cap B'$
73. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x-4|}{x-1} > 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} < 3\}$. Hallar $A \cap B$.
74. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < \frac{15}{|x|}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x^2-7x+12|}{2-|x|} < \frac{7(x-3)}{|x^2-4|}\}$. Hallar $A \cap B$.
75. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + \frac{1}{x}| \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |5x+7| - |x-1| - 17 < 2x+3\}$, $C = A \cap B$. Si $x \in C$, hallar el valor de $E = \frac{|5x-20| - |3x-6| - 26}{x}$



4.16 EL MAXIMO ENTERO DE UN NUMERO REAL



Sean x un número real fijo y M_x el conjunto de los números enteros n que son menores o iguales a x , esto es,

$$M_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Entonces, al mayor de los números enteros de este conjunto se le conoce como el máximo entero real de x , y se denota:

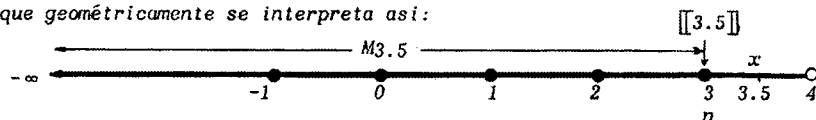
$$\begin{aligned} \llbracket x \rrbracket &= \max(M_x) \\ &= \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \end{aligned}$$

Por ejemplo, para $x=7/2=3.5$ tendremos el conjunto:

$$M_{3.5} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 3.5\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

es decir: $\llbracket 3.5 \rrbracket = \max(M_{3.5}) = 3$

que geométicamente se interpreta así:



Definición 4.21 En el sistema de los números reales se define el máximo entero de un número real x , a la expresión denotada por $\llbracket x \rrbracket = n$, donde n es el mayor entero, menor o igual a x , es decir:

$$\llbracket x \rrbracket = n \iff \llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Ejemplos:

$$n \leq x$$

$$(1) \quad x = 2.7 \rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor 2.7 \rfloor = 2, \text{ porque: } 2 \leq 2.7$$

$$(2) \quad x = -\sqrt{2} \rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2, \text{ porque: } -2 \leq -\sqrt{2}$$

$$(3) \quad x = -5 \rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor -5 \rfloor = -5, \text{ porque: } -5 \leq -5$$

Para calcular $\lfloor x \rfloor$ gráficamente, se construye los elementos del conjunto M a la izquierda de x , el mayor de todos ellos es obviamente $\lfloor x \rfloor$. Así para $x = -\sqrt{2}$, del ejemplo (2):



Cuando x es entero entonces n y x coinciden, es decir, $\lfloor x \rfloor = x$ (Ejemplo 3).

4.16.1 TEOREMAS SOBRE EL MAXIMO ENTERO DE UN NUMERO REAL

TEOREMA 54. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$

Demostración. En efecto:

$$\text{Por definición: } \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} = n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Luego, } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$$

TEOREMA 55. Si $\lfloor x \rfloor = x \leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Demostración. En efecto:

$$(1) \quad (+) \text{ Por el T.54: } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Luego, si } \lfloor x \rfloor = x \rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad (\rightarrow) \text{ Si } x \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} \quad (\text{Def. } \lfloor \cdot \rfloor)$$

$$\rightarrow \lfloor x \rfloor = x$$

TEOREMA 56. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Por definición: } \lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \text{ Si } n \leq x \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$(3) \text{ Si } x < n+1 \rightarrow x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$(4) \text{ Luego, de (2) y (3): } \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

TEOREMA 57. Si $\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$

Demostración. En efecto:

- (1) $(+)$ Si $\lfloor x \rfloor = n \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ (Def. $\lfloor \cdot \rfloor$)
 (2) Según el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
 (3) $\rightarrow n \leq x < n + 1$
 (4) $(+)$ Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq x < n+1 \rightarrow n = \lfloor x \rfloor$

TEOREMA 58. Si $a \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor \geq a \leftrightarrow x \geq a$

Demostración. En efecto:

- (1) $(+)$ Por el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
 (2) Por hipótesis: $\lfloor x \rfloor \geq a$ y por definición: $\lfloor x \rfloor \leq x$
 (3) $\rightarrow a \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
 (4) $\rightarrow a \leq x \leftrightarrow x \geq a$
 (5) $(+)$ Si $x \geq a$ y $a \in \mathbb{Z}$, entonces por definición:
 (6) $\lfloor x \rfloor = \max\{\forall a \in \mathbb{Z} \mid \lfloor a \rfloor \leq x\}$, pero $\lfloor a \rfloor = a$ (T.55)
 (7) $\rightarrow a \leq x \leq \lfloor x \rfloor \rightarrow a \leq \lfloor x \rfloor \leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq a$

TEOREMA 59. Si $\lfloor x \rfloor < a \leftrightarrow x < a, \forall a \in \mathbb{Z}$

Demostración. En efecto:

- (1) $(+)$ Si $\lfloor x \rfloor < a$, donde $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq a-1$
 (Puesto que: $a-2 < a-1 < a$)
 (2) $\rightarrow a-1 \leq x < (a-1)+1$ (T.57)
 (3) $\rightarrow a-1 \leq x < a \rightarrow x < a$
 (4) $(+)$ Por el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
 (5) Entonces, si $x < a$ y $\lfloor x \rfloor < x$
 (6) Por transitividad: $\lfloor x \rfloor < a$

TEOREMA 60. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $\lfloor x \rfloor \leq a \leftrightarrow x < a+1$

Demostración. En efecto:

- $(+)$ (1) Si $\lfloor x \rfloor \leq a \leftrightarrow (\lfloor x \rfloor = a \vee \lfloor x \rfloor < a)$
 (2) Si $\lfloor x \rfloor = a$, tal que $a \in \mathbb{Z} \rightarrow a \leq x < a+1$ (T.57)
 (3) $\rightarrow x < a+1$
 (4) Si $\lfloor x \rfloor < a \rightarrow x < a$
 (5) Luego, de (3) y (4): $\lfloor x \rfloor < a \rightarrow x < a+1$
 $(+)$ (6) Por el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x$
 (7) Si $x < a+1 \rightarrow \lfloor x \rfloor < x < a+1 \rightarrow \lfloor x \rfloor < a+1$
 (8) Si $a \in \mathbb{Z} \rightarrow (a+1) \in \mathbb{Z}$ y como $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor = a, a-1, a-2, \dots$
 (9) $\rightarrow \lfloor x \rfloor \leq a$

TEOREMA 61. Si $m \in \mathbb{Z}$: $\llbracket x + m \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + m$

Demostración. En efecto:

- (1) Por el T.57: $\llbracket x \rrbracket = n$, $n \leq x < n+1$
- (2) Sumando m se tiene: $n + m \leq x + m < n + 1 + m$
- (3) Si $m \in \mathbb{Z}$: $(m + n) \in \mathbb{Z}$:
- (4) $n + m \leq x + m < (n + m) + 1$
- (5) Por definición: $\llbracket x+m \rrbracket = n+m$
- (6) Pero $n = \llbracket x \rrbracket$: $\llbracket x + m \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + m$, $m \in \mathbb{Z}$

TEOREMA 62. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket \leq \llbracket x + y \rrbracket$

Demostración. En efecto:

- (1) Si $n \leq x < n+1$: $\llbracket x \rrbracket = n$
- (2) Si $m \leq y < m+1$: $\llbracket y \rrbracket = m$
- (3) Sumando: $n + m \leq x + y < (n+1) + (m+1)$
- (4) $n + m \leq x + y < (n+m+1) + 1$
- (5) Como $m, n \in \mathbb{Z}$: $(n+m) \in \mathbb{Z}$
- (6) Luego, por el T.58: $\llbracket x + y \rrbracket \geq n + m$
- (7) : $\llbracket x + y \rrbracket \geq \llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket \leftrightarrow \llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket \leq \llbracket x + y \rrbracket$

TEOREMA 63. $\forall x \in \mathbb{R}$: $\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{si } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$

Demostración. En efecto:

- (1) Si $x \in \mathbb{Z}$: $\llbracket x \rrbracket = x$ (T.55)
- (2) Si $x \in \mathbb{Z}$: $\exists (-x) \in \mathbb{Z}$: $\llbracket -x \rrbracket = -x$
- (3) Sumando se tiene: $\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket = x - x = 0$
- (4) Si $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$: $x = \llbracket x \rrbracket + n$, donde $0 < n < 1 \leftrightarrow \llbracket n \rrbracket = 0$
- (5) Multiplicando (4) por -1 : $-x = -\llbracket x \rrbracket + (-n)$
- (6) : $\llbracket -x \rrbracket = \llbracket -\llbracket x \rrbracket + (-n) \rrbracket$: $\llbracket -x \rrbracket = \llbracket -\llbracket x \rrbracket \rrbracket + \llbracket -n \rrbracket$ (T.61)
- (7) Como $\llbracket x \rrbracket \in \mathbb{Z}$: $-\llbracket x \rrbracket \in \mathbb{Z}$, luego: $\llbracket -\llbracket x \rrbracket \rrbracket = -\llbracket x \rrbracket$
- (8) Además: $0 < n < 1 \rightarrow -1 < -n < 0 \rightarrow \llbracket -n \rrbracket = -1$
- (9) Luego, en (6): $\llbracket -x \rrbracket = -\llbracket x \rrbracket - 1$
- (10) Entonces: $\llbracket -x \rrbracket + \llbracket x \rrbracket = -1$, $\forall x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$
- (11) Por lo tanto, de (3) y (10) queda demostrado el T.63.

TEOREMA 64. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 < \llbracket x \rrbracket \leq x$

Demostración. En efecto:

- (1) Si $x \in \mathbb{R} \rightarrow x = \lfloor x \rfloor + n$, donde: $0 \leq n < 1$
- (2) $\rightarrow \lfloor x \rfloor = x - n$
- (3) Si $0 \leq n < 1 \rightarrow -1 < -n \leq 0$
- (4) Sumando x a cada extremo se tiene: $x-1 < x-n \leq x$
- (5) Luego de (2): $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

TEOREMA 65. $\forall y \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, si $y > x \rightarrow y \geq \lfloor x \rfloor + 1 > \lfloor x \rfloor$

Demostración. En efecto:

- (1) Por el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- (2) Por transitividad: $\lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 > \lfloor x \rfloor$
- (3) Por el T.64: $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- (4) Por hipótesis: $y > x$, $y \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (5) Entonces de (3) y (4): $\lfloor x \rfloor \leq x < y \rightarrow \lfloor x \rfloor < y$, $y \in \mathbb{Z}$
- (6) Como $\lfloor x \rfloor$ e y son enteros $\rightarrow \lfloor x \rfloor \leq y-1 \rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \leq y$
- (7) Por lo tanto, de (2) y (6): $y \geq \lfloor x \rfloor + 1 > \lfloor x \rfloor$

TEOREMA 66. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

Demostración. En efecto:

- (1) Por el T.64: $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- (2) Por hipótesis: $x \leq y \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq x \leq y$
- (3) Por transitividad: $\rightarrow \lfloor x \rfloor \leq y$
- (4) Por el T.56: $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$, $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$
- (5) De (3): $\lfloor x \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$
- (6) Como: $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor + 1 - 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

TEOREMA 67. Si $n = x - \lfloor x \rfloor \rightarrow 0 \leq n < 1$

Demostración. En efecto:

- (1) Por el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- (2) $\leftrightarrow (\lfloor x \rfloor \leq x) \wedge (x < \lfloor x \rfloor + 1)$
- (3) $\leftrightarrow (0 \leq x - \lfloor x \rfloor) \wedge (x - \lfloor x \rfloor < 1)$
- (4) $\leftrightarrow (0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1) \rightarrow 0 \leq n < 1$

TEOREMA 68. Si $x \in \mathbb{R} | x = y + n$, $0 \leq n < 1 \rightarrow y = \lfloor x \rfloor$

Demostración. En efecto:

- (1) Por hipótesis: $0 \leq n < 1$
- (2) Sumando y : $y \leq y + n < y + 1$

$$(3) \text{ Pero: } x = y+n \rightarrow y \leq x < y+1$$

$$(4) \text{ Como } y \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor = y \leftrightarrow y = \lfloor x \rfloor$$

TEOREMA 69. $\forall x \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, se cumple: $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Supongamos que: } \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = a$$

$$(2) \text{ Entonces: } a \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{n} < a+1 \rightarrow an \leq \lfloor x \rfloor < an+n \quad (n > 0)$$

(3) Como $\lfloor x \rfloor$ es un número entero puede tomar los siguientes valores entre an y $an+n$:

$$\lfloor x \rfloor = an \rightarrow an \leq x < an+1$$

$$\lfloor x \rfloor = an+1 \rightarrow an+1 \leq x < an+2$$

$$\lfloor x \rfloor = an+2 \rightarrow an+2 \leq x < an+3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\lfloor x \rfloor = an+(n-1) \rightarrow an+(n-1) \leq x < an+n$$

(4) Uniendo los intervalos obtenemos: $an \leq x < an+n$

$$(5) \rightarrow a \leq \frac{x}{n} < a+1 \rightarrow \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = a$$

$$(6) \text{ Por lo tanto, de (1) y (5): } \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Hallar el valor de $E = \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{6}-1} \right\rfloor$

Solución. Como: $2 < \sqrt{6} < 3 \rightarrow 1 < \sqrt{6}-1 < 2 \rightarrow \frac{3}{2} < \frac{3}{\sqrt{6}-1} < 3$

y si: $\frac{3}{2} < 2$, entonces: $2 \leq \frac{3}{\sqrt{6}-1} < 3 \rightarrow E = \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{6}-1} \right\rfloor = 2$

EJERCICIO 2. Hallar el valor de $E = \left\lfloor \frac{3-2\pi}{\pi+1} \right\rfloor$

Solución. Efectuando la división: $\frac{3-2\pi}{\pi+1} = -2 + \frac{5}{\pi+1}$

$$\text{Por el T.61: } E = \left\lfloor -2 + \frac{5}{\pi+1} \right\rfloor = -2 + \left\lfloor \frac{5}{\pi+1} \right\rfloor \quad (1)$$

Dado que: $3 < \pi < 4 \rightarrow 4 < \pi+1 < 5 \rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{\pi+1} < \frac{1}{4} \rightarrow 1 < \frac{5}{\pi+1} < \frac{5}{4}$

Entonces: $\left\lfloor \frac{5}{\pi+1} \right\rfloor = 1$; luego, en (1): $E = -2+1 = -1$

EJERCICIO 3. Si $x \in [-1, 1]$, hallar el valor de $E = \left\lfloor \frac{|x|-2}{3-x} \right\rfloor$

Solución. a) Si $x \in [-1, 0>$, o sea para $x < 0 \rightarrow |x| = -x$

$$\rightarrow E = \left\lfloor \frac{-x-2}{3-x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{x-3} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{5}{x-3} \right\rfloor$$

$$\text{Si } x \in [-1, 0> \rightarrow -1 \leq x < 0 \rightarrow -4 \leq x-3 < -3 \rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} \leq -\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{5}{x-3} \leq -\frac{5}{4} \rightarrow -\frac{2}{3} < 1 + \frac{5}{x-3} \leq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Entonces: } \left\lfloor 1 + \frac{5}{x-3} \right\rfloor = -1; \text{ luego: } E = -1, \forall x \in [-1, 0> \quad (1)$$

b) Si $x \in [0, 1]$, o sea para $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow \left\lfloor \frac{x-2}{3-x} \right\rfloor = \left\lfloor -1 + \frac{1}{3-x} \right\rfloor$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 1 \rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \rightarrow 2 \leq 3-x \leq 3 \rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3} < -1 + \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2} \rightarrow \left\lfloor -1 + \frac{1}{3-x} \right\rfloor = -1$$

Luego, $E = -1$, $\forall x \in [0, 1]$ (2)

Por lo tanto, de (1) y (2): $E = -1$, $\forall x \in [-1, 1]$

EJERCICIO 4. Determinar por extensión el conjunto $A = \{ \left\lfloor 3x-1 \right\rfloor \mid x \in [0, 1] \}$

Solución. Si $\left\lfloor 3x-1 \right\rfloor = n \leftrightarrow n \leq 3x-1 < n+1 \leftrightarrow \frac{n+1}{3} \leq x < \frac{n+2}{3}$, $x \in [0, 1]$

Dando valores a n hasta cubrir el intervalo $[0, 1]$, se tiene:

$$\text{Si } n = -1 \rightarrow 0 \leq x < 1/3 \quad n = 1 \rightarrow 2/3 \leq x < 1$$

$$n = 0 \rightarrow 1/3 \leq x < 2/3 \quad n = 2 \rightarrow x = 1$$

Por lo tanto: $A = \{-1, 0, 1, 2\}$

EJERCICIO 5. Hallar todos los elementos de $A = \{ \left\lfloor \frac{|x-6|-1}{x+3} \right\rfloor \mid x \in <-1, 8> \}$.

Solución. Dado que: $x \in <-1, 8> = x \in <-1, 6> \cup [6, 8>$, se tiene:

a) Si $x \in <-1, 6>$, o sea para $x < 6 \rightarrow |x-6| = -(x-6)$

$$\rightarrow A = \left\lfloor \frac{5-x}{x+3} \right\rfloor = \left\lfloor -1 + \frac{8}{x+3} \right\rfloor$$

$$x \in <-1, 6> \rightarrow -1 < x < 6 \rightarrow 2 < x+3 < 9 \rightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{8}{9} < \frac{8}{x+3} < 4 \rightarrow -\frac{1}{9} < -1 + \frac{8}{x+3} < 3$$

$$\text{Como: } -1 < -\frac{1}{9} \rightarrow -1 < -1 + \frac{8}{x+3} < 3 \rightarrow \left\lfloor -1 + \frac{8}{x+3} \right\rfloor = -1, 0, 1, 2$$

$$\text{Luego, } A = \{-1, 0, 1, 2\}, \text{ para } x \in (-1, 6) \quad (1)$$

$$b) \text{ Si } x \in [6, 8), \text{ o sea para } x > 6 \rightarrow |x-6| = x-6$$

$$\rightarrow A = \left\lfloor \frac{x-7}{x+3} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{10}{x+3} \right\rfloor$$

$$\text{Si } 6 \leq x < 8 \rightarrow 9 \leq x+3 < 11 \rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{9}$$

$$\rightarrow -\frac{10}{9} \leq -\frac{10}{x+3} < -\frac{10}{11} \rightarrow -\frac{1}{9} \leq 1 - \frac{10}{x+3} < \frac{1}{11}$$

$$\text{Como: } -1 < -\frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{11} < 1 \rightarrow -1 \leq 1 - \frac{10}{x+3} < 1 \rightarrow \left\lfloor 1 - \frac{10}{x+3} \right\rfloor = -1, 0$$

$$\text{Luego, } A = \{-1, 0\}, \text{ para } x \in [6, 8) \quad (2)$$

$$\text{Por lo tanto, de (1) y (2): } A = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{EJERCICIO 6. Resolver la ecuación: } \left\lfloor \frac{|x-2|+3}{2} \right\rfloor = 4$$

$$\text{Solución. } \left\lfloor \frac{|x-2|+3}{2} \right\rfloor = 4 \rightarrow 4 \leq \frac{|x-2|+3}{2} < 4+1 \quad (T.57)$$

$$\text{de donde: } 5 \leq |x-2| < 7 \leftrightarrow (|x-2| \geq 5) \wedge (|x-2| < 7)$$

$$\leftrightarrow (x-2 \geq 5 \vee x-2 \leq -5) \wedge (-7 < x-2 < 7)$$

$$\leftrightarrow (x \geq 7 \vee x \leq -3) \wedge (-5 < x < 9)$$



$$\therefore S = [-5, -3] \cup [7, 9]$$

$$\text{EJERCICIO 7. Si } x, b \in \mathbb{R}^+, x < b, \text{ hallar: } E = \left\lfloor \frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor + \frac{x}{b} \right\rfloor$$

$$\text{Solución. Si } x, b \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x > 0 \text{ y } b > 0$$

$$\text{Supongamos que: } y = \frac{b}{x} \rightarrow \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \quad (T.56)$$

$$\rightarrow \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{x} < \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor + 1$$

$$\text{Multiplicando por } \frac{x}{b}: \rightarrow \frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq 1 < \frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor + \frac{x}{b}$$

$$\rightarrow \left(\frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq 1 \right) \wedge \left(1 < \frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor + \frac{x}{b} \right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor + \frac{x}{b} \leq 1 + \frac{x}{b} \right) \wedge \left(1 < \frac{x}{b} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor + \frac{x}{b} \right) (*)$$

Como $x < b$ y $b > 0 \rightarrow \frac{x}{b} < 1 \rightarrow 1 + \frac{x}{b} < 2$

Luego, en (*): $\leftrightarrow (\frac{x}{b} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + \frac{x}{b} < 2) \wedge (1 < \frac{x}{b} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + \frac{x}{b})$

$$\leftrightarrow (1 < \frac{x}{b} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + \frac{x}{b} < 2)$$

y por el T.57: $E = \lfloor \frac{x}{b} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + \frac{x}{b} \rfloor = 1$

EJERCICIO 8. Resolver la ecuación: $\lfloor 4x \rfloor = 3x+3$

Solución. $\lfloor 4x \rfloor = 3x+3 \leftrightarrow (3x+3) \in \mathbb{Z} \wedge (3x+3 \leq 4x < 3x+3+1)$ (T.57)

Como $3 \in \mathbb{Z} \leftrightarrow (3x) \in \mathbb{Z} \wedge (x \geq 3 \wedge x < 4)$

$$\leftrightarrow (3x) \in \mathbb{Z} \wedge (3 \leq x < 4)$$

$$\leftrightarrow (3x) \in \mathbb{Z} \wedge (9 \leq 3x < 12)$$

Entonces: $3x = 9, 10, 11 \leftrightarrow x = 3, 10/3, 11/3 \rightarrow S = \{3, 10/3, 11/3\}$

EJERCICIO 9. Hallar todos los elementos del conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor \frac{m}{x} \rfloor - \sqrt{\frac{x-m}{x}} = \sqrt{x}, \text{ donde } 0 < m < 1/4\}$$

Solución. Universo de la ecuación: $(x > 0) \wedge (\frac{x-m}{x} \geq 0)$

$$\leftrightarrow (x > 0) \wedge (x-m \geq 0) \leftrightarrow (x > 0) \wedge (x \geq m), m \in (0, 1/4)$$

Si $x \geq m$ y $m > 0 \rightarrow \frac{x}{m} \geq 1 \leftrightarrow 0 < (\frac{x}{m})^{-1} \leq 1$ (T.24a)

$$\leftrightarrow 0 < \frac{m}{x} \leq 1 \leftrightarrow (0 < \frac{m}{x} < 1) \vee (\frac{m}{x} = 1)$$

Analicemos cada caso:

a) Si $0 < \frac{m}{x} < 1 \rightarrow \lfloor \frac{m}{x} \rfloor = 0$. En A: $|0 - \sqrt{\frac{x-m}{x}}| = \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{\frac{x-m}{x}} = \sqrt{x}$

de donde: $x^2 - x + m = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4m})$, si $m \in (0, 1/4)$

b) Si $\frac{m}{x} = 1 \rightarrow \lfloor \frac{m}{x} \rfloor = 1$. En A: $|1 - \sqrt{\frac{0}{x}}| = \sqrt{x} \rightarrow 1 = \sqrt{x} \leftrightarrow x = 1$

EJERCICIO 10. Resolver: $\lfloor x - \frac{2}{x} \rfloor \geq 1$

Solución. Según el T.58: $\lfloor x - \frac{2}{x} \rfloor \geq 1 \leftrightarrow x - \frac{2}{x} \geq 1$

$$\leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x} \geq 0$$

Por el método de los valores críticos, verificar que el conjunto solución de la inecuación es: $S = [-1, 0) \cup [2, +\infty)$

EJERCICIO 11. Resolver: $\sqrt{\left(\left\lfloor \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor - 1\right)^2} = 0$

Solución. Por el T.43: $|a| = \sqrt{a^2} \rightarrow \left| \left\lfloor \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor - 1 \right| = 0$

$$\leftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = 1 \leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} < 2 \quad (*)$$

donde: $\lfloor x \rfloor \neq 0 \leftrightarrow x \notin [0, 1>$

Entonces, debemos considerar dos casos:

a) Si $x \geq 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \text{Entonces en } (*): \lfloor x \rfloor \leq x < 2\lfloor x \rfloor &\leftrightarrow (\lfloor x \rfloor \leq x) \wedge (x < 2\lfloor x \rfloor) \\ &\leftrightarrow (\lfloor x \rfloor \leq x) \wedge \left(\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} < 2\right) \end{aligned}$$

$$(\text{Por el T.56: } \lfloor x \rfloor \leq x, \forall x \in \mathbb{R}) \quad \leftrightarrow (x \in \mathbb{R}) \wedge (x \geq 1) \rightarrow S_1 = [1, +\infty)$$

b) Si $x < 0 \rightarrow \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}^-$

$$\begin{aligned} \text{Entonces en } (*): \lfloor x \rfloor \geq x > 2\lfloor x \rfloor &\leftrightarrow 2\lfloor x \rfloor < x \leq \lfloor x \rfloor \\ &\leftrightarrow (\lfloor x \rfloor < \frac{x}{2}) \wedge (x \leq \lfloor x \rfloor) \\ &\rightarrow S_2 = \mathbb{Z}^- \cap \mathbb{R}^- = \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{Z}^- \cup [1, +\infty)$$

EJERCICIO 12. Resolver: $\left\lfloor \frac{|x| - 2}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \geq 3$

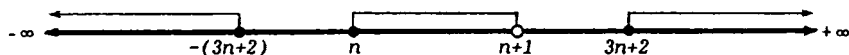
Solución. Si $\left\lfloor \frac{|x| - 2}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \geq 3 \leftrightarrow \frac{|x| - 2}{\lfloor x \rfloor} \geq 3, \lfloor x \rfloor \neq 0 \rightarrow x \notin [0, 1>$

$$\text{Sea } \lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{|x| - 2}{n} \geq 3 \quad (1)$$

Consideremos dos casos:

a) Si $(n > 0) \wedge (n \leq x < n+1)$

$$\text{En (1): } |x| - 2 \geq 3n \rightarrow |x| \geq 3n+2 \leftrightarrow (x \geq 3n+2) \vee (x \leq -(3n+2))$$



Como no existe intersección, el conjunto solución para este caso es:

$$S_1 = \emptyset, \forall n=1, 2, 3, \dots$$

b) Si $(n < 0) \wedge (n \leq x < n+1)$

$$\text{En (1): } |x| - 2 \leq 3n \rightarrow |x| \leq 3n+2$$

Como $n < 0 \rightarrow 3n+2 < 0$, por tanto, el conjunto solución para este caso

$$\text{es: } S_2 = \emptyset, \forall n=-1, -2, -3, \dots$$

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \emptyset$$

EJERCICIO 13. Resolver: $\left\lfloor \frac{3+x}{4-x} \right\rfloor \leq 2$

Solución. $\left\lfloor \frac{3+x}{4-x} \right\rfloor \leq 2 \leftrightarrow \frac{3+x}{4-x} < 2+1 \leftrightarrow \frac{4x-9}{x-4} > 0$ (T.60)

Por el método de los valores críticos: $(x > 4) \vee (x < 9/4)$

$$\therefore S = \langle -\infty, 9/4 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$$

EJERCICIO 14. Resolver: $\frac{\sqrt{|x|-2}}{\lfloor x^2-2x-3 \rfloor} \leq 0$

Solución. Universo de la inecuación: $|x|-2 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 2$

$$\leftrightarrow (x \leq -2) \vee (x \geq 2) \rightarrow U = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [2, +\infty)$$

La inecuación dada es válida si: $(x \in U) \wedge (\lfloor x^2-2x-3 \rfloor < 0)$

$$\leftrightarrow (x \in U) \wedge (x^2-2x-3 < 0) \leftrightarrow (x \in U) \wedge (x+1)(x-3) < 0$$

$$\leftrightarrow (x \in U) \wedge (-1 < x < 3) \rightarrow S = [2, 3>$$

EJERCICIO 15. Resolver: $\left\lfloor \sqrt{4+3x-x^2} \right\rfloor^2 < 4$

Solución. $\left\lfloor \sqrt{4+3x-x^2} \right\rfloor^2 < 4 \leftrightarrow -2 < \left\lfloor \sqrt{4+3x-x^2} \right\rfloor < 2$ (T.34ii)

$$\text{Pero: } \sqrt{a} \geq 0, \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow \left\lfloor \sqrt{a} \right\rfloor \geq 0$$

Luego: $0 \leq \left\lfloor \sqrt{4+3x-x^2} \right\rfloor < 2 \leftrightarrow 0 \leq \sqrt{4+3x-x^2} < 2$ (T.58 y T.59)

$$\leftrightarrow 0 \leq 4+3x-x^2 < 4$$

$$\leftrightarrow (x^2-3x-4 \leq 0) \wedge (4+3x-x^2 < 4)$$

$$\leftrightarrow (x-4)(x+1) \leq 0 \wedge x(x-3) > 0$$

$$\leftrightarrow (-1 \leq x \leq 4) \wedge (x < 0 \vee x > 3)$$

$$\therefore S = [-1, 0) \cup \langle 3, 4]$$

EJERCICIO 16. Resolver: $\lfloor x \rfloor^3 - 8 \lfloor x \rfloor^2 + 7 \geq 0$

Solución. Sea $m = \lfloor x \rfloor$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow m^3 - 8m^2 + 7 \geq 0 \leftrightarrow (m+1)(m-1)(m+\sqrt{7})(m-\sqrt{7}) \geq 0$$

Por el método de los puntos críticos: $m=-1$, $m=1$, $m=-\sqrt{7}$, $m=\sqrt{7}$

se determina que: $m \in \langle -\infty, -\sqrt{7} \rangle \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{7}, +\infty)$ (Verificar)

Para $m \in \langle -\infty, -\sqrt{7} \rangle \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq -\sqrt{7}$, pero $m \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq -3 \leftrightarrow x < -3+1$

$$\leftrightarrow x < -2 \rightarrow x \in \langle -\infty, -2 \rangle$$

$m \in [-1, 1] \rightarrow -1 \leq \lfloor x \rfloor \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq x < 1+1$ (T.58 y T.60)

$$\leftrightarrow -1 \leq x < 2 \rightarrow x \in [-1, 2>$$

$m \in [\sqrt{7}, +\infty) \rightarrow \lfloor x \rfloor \geq 3 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow x \in [3, +\infty)$

$$\therefore S = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [-1, 2> \cup [3, +\infty)$$

EJERCICIO 17. Resolver: $\left\lfloor \frac{|x-1|-1}{3-x} \right\rfloor < -\frac{13}{5}$

Solución. Como $(-13/5) \notin \mathbb{Z}$, no podemos aplicar directamente el Teorema 59.

$$\text{Pero si: } \left\lfloor \frac{|x-1|-1}{3-x} \right\rfloor < 2.6 \rightarrow \left\lfloor \frac{|x-1|-1}{3-x} \right\rfloor = \{-3, -4, -5, \dots\}$$

$$\text{Significa que: } \left\lfloor \frac{|x-1|-1}{3-x} \right\rfloor < -2 \rightarrow \frac{|x-1|-1}{3-x} < -2 \quad (T.59)$$

$$\text{de donde: } \frac{|x-1|-2x+5}{x-3} > 0 \quad (1)$$

$$\text{a) Si } x \geq 1 \rightarrow x-1 \geq 0 \rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\text{En (1): } (x \geq 1) \wedge \left(\frac{x-1-2x+5}{x-3} > 0 \right) \rightarrow (x \geq 1) \wedge \left(\frac{x-4}{x-3} < 0 \right)$$

$$\leftrightarrow (x \geq 1) \wedge (3 < x < 4) \rightarrow S_1 = \langle 3, 4 \rangle$$

$$\text{b) Si } x < 1 \rightarrow x-1 < 0 \rightarrow |x-1| = -(x-1)$$

$$\text{En (1): } (x < 1) \wedge \left(\frac{-x+1-2x+5}{x-3} > 0 \right) \leftrightarrow (x < 1) \wedge \left(\frac{x-2}{x-3} < 0 \right)$$

$$\leftrightarrow (x < 1) \wedge (2 < x < 3) \rightarrow S_2 = \emptyset$$

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = S_1 = \langle 3, 4 \rangle$$

EJERCICIO 18. Resolver: $\sqrt{\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor + 4} > 2$

Solución. Cálculo del universo de la inecuación:

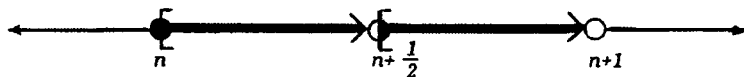
$$(1) \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor + 4 \geq 0 \rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \geq -4$$

$$(2) \text{ Si } \lfloor x \rfloor = n \rightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z} \quad (T.57)$$

$$(3) \text{ Multiplicando por (2): } 2n \leq 2x < (2n+1)+1$$

$$\text{Significa que: } \lfloor 2x \rfloor = 2n \text{ o } \lfloor 2x \rfloor = 2n+1$$

(4) Para obtener un único valor para $\lfloor 2x \rfloor$, dividamos el intervalo $[n, n+1)$ en dos partes de longitudes iguales, esto es:



$$[n, n+1) = [n, n + \frac{1}{2}) \cup [n + \frac{1}{2}, n+1)$$

$$(5) \text{ Si } n \leq x < n+1/2 \rightarrow 2n \leq 2x < 2n+1$$

$$(6) \text{ Luego, si } \lfloor x \rfloor = n \text{ y } \lfloor 2x \rfloor = 2n \rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 2n - 2(n) = 0$$

$$(7) \quad n+1/2 \leq x < n+1 \rightarrow 2n+1 \leq 2x < 2n+2$$

$$(8) \text{ Luego, si } \lfloor x \rfloor = n \text{ y } \lfloor 2x \rfloor = 2n+1 \rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 2n+1 - 2(n) = 1$$

$$(9) \text{ De (6) y (8) podemos escribir: } \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [n, n+1/2) \\ 1, & \text{si } x \in [n+1/2, n+1) \end{cases}$$

(10) Esto significa que el primer miembro de la desigualdad (1) toma valores 0 o 1 y que, ambos satisfacen dicha relación. Por lo tanto, la solución

de (1) es el conjunto $\mathbb{R}$, esto es: $U = \langle -\infty, +\infty \rangle$

(11) Eliminación de la raíz de: $\sqrt{\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor + 4} > 2$

(12) Elevando al cuadrado: $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor + 4 > 4 \rightarrow \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor > 0$

Pero de (9) sabemos que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ es 0 o 1, de los cuales 1 satisface la relación (12). En consecuencia, la unión de los intervalos de la forma: $[n+1/2, n+1\rangle$, es decir, la mitad derecha del intervalo $[n, n+1\rangle$ es la solución de la inecuación dada:

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + \frac{1}{2}, n+1\rangle$$

EJERCICIOS: Grupo 30

- Hallar el valor de: a) $\lfloor \frac{2\pi+3}{1-\pi} \rfloor$ b) $\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}-2} \rfloor$
- Determinar por extensión el conjunto $A = \{ \lfloor \frac{|x-3|-2}{x+2} \rfloor \mid x \in \langle -1, 5 \rangle \}$

3. Hallar el mayor y el menor elemento del conjunto

$$A = \{ x \lfloor x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \rfloor \mid x \in \langle 0, +\infty \rangle \}$$

En los ejercicios del 4 al 21, resolver las ecuaciones dadas:

- $\lfloor 2x-3 \rfloor = -5$
- $\lfloor \frac{|x-1|-1}{3} \rfloor = 2$
- $\lfloor \frac{|x-2|+|2x-1|-2}{3} \rfloor = 1$
- $\lfloor \sqrt{3-x} \rfloor = 2$
- $\lfloor x^2-2x \rfloor = 3$
- $\lfloor 3x-5 \rfloor = 2x+1$
- $\lfloor 3x \rfloor = 2x+2$
- $\lfloor \frac{x+2}{x-3} \rfloor = 2$
- $\lfloor x+1 \rfloor = 2x$
- $\lfloor 2x \rfloor - |x-1| = 2x-3$
- $\lfloor \frac{|x-2|+3}{2} \rfloor = 4$
- $\lfloor -x^2+x+3/4 \rfloor = 0$
- $\lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x \rfloor - 6 = 0$
- $\lfloor x-1 \rfloor^2 + 2\lfloor x \rfloor^2 = 57$
- $\sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = x$
- $\lfloor 5x \rfloor = 4x+3$
- $\lfloor \frac{2x-1}{x+2} \rfloor = 1$
- $\sqrt{9 - \lfloor x \rfloor^2} + \sqrt{|x|-3} = 0$
- Si A es el conjunto solución de la ecuación $\lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor + \lfloor 1-x \rfloor = 5$, cual de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 a) $A \subset [-7, -4\rangle$ b) $A \subset [-6, -5\rangle$ c) $A \subset \langle -6, -4]$ d) $A = \mathbb{R}$

23. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

$$a) \lfloor 2x + 1/2 \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$$

$$c) \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

$$b) \lfloor -x+1 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$$

$$d) \lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$$

24. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, entonces: $\lfloor a+b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$. En que caso ocurre la igualdad?

En los ejercicios siguientes, resolver las inecuaciones dadas.

$$25. \lfloor 2x - \frac{10}{x} \rfloor > 1$$

$$31. \lfloor x \rfloor^2 - 2 \lfloor x \rfloor - 2 < 0$$

$$26. \lfloor \frac{|x-2|+3}{2} \rfloor \geq 5$$

$$32. \frac{\sqrt{|x|-3}}{\lfloor x^2-2x-19 \rfloor} \leq 0$$

$$27. \lfloor \frac{5+x}{5-x} \rfloor \leq 1$$

$$33. \lfloor x \rfloor^3 - 10 \lfloor x \rfloor^2 + 9 \leq 0$$

$$28. \lfloor 4x^2 - 5x - 4 \rfloor \leq 1$$

$$34. \sqrt{\lfloor x \rfloor^2 - 12} (\lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x \rfloor - 6) > 0$$

$$29. \lfloor \frac{x^2+1}{x+2} \rfloor < 2$$

$$35. \sqrt{\lfloor x \rfloor^2 - 9} (\lfloor x \rfloor^2 - 2 \lfloor x \rfloor - 15) \leq 0$$

$$30. \lfloor |2x^2 + 5x| - 2 \rfloor < 1$$

$$36. 2|x| - \lfloor 2x \rfloor > 0$$

37. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$a) z = x - \lfloor x \rfloor + 0 \leq z < 1$$

$$b) \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x+n \rfloor^2 = \lfloor x \rfloor^2 + 2n \lfloor x \rfloor + n^2$$

$$c) \text{ Sea } n \in \mathbb{Z}, (z = x-n) \wedge (0 \leq z < 1) \rightarrow \lfloor x \rfloor = n$$

$$d) \text{ Si } x < -1 \rightarrow \lfloor \lfloor 1/x \rfloor + 1 \rfloor = \lfloor -1/x \rfloor$$

38. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2(x+2) - 8\sqrt{x+2} + 6 > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x-1 \rfloor^2 + 2 \lfloor x \rfloor^2 = 57\}$. Hallar $A \Delta B$.

39. Si $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x-1 \rfloor^2 + 2 \lfloor x \rfloor > 17, \text{ si } \lfloor x+2 \rfloor = 5\}$, hallar A .

40. Expresar el conjunto A en términos de intervalos:

$$a) A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x-4| + |2x+3|}{|x-1| - 1} \leq 0, \text{ si } \lfloor x^2 + 4x - 6 \rfloor < -3/2\}.$$

$$b) A = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor \sqrt{10-3x-x^2} \rfloor^2 \leq 9 \leftrightarrow \lfloor x-1 \rfloor = 3\}.$$





RELACIONES Y FUNCIONES EN $\mathbb{R}^2$

RELACIONES DEFINIDAS DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{R}$

5.1 EL PRODUCTO CARTESIANO DE $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

En la Sección 3.3 señalábamos que el producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) en los cuales la primera componente a , es elemento de A y la segunda componente b , es elemento de B , esto es:

$$A \times B = \{(a, b) \in A \times B \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Análogamente, el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que se denota $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, se define como:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

En el Capítulo 4, Sección 4.9, introdujimos la noción de la recta real y vimos la correspondencia biunívoca que existe entre puntos de la recta y el conjunto de números reales. Cada punto sobre una recta numérica es la gráfica de un solo número real y viceversa.

Para graficar una relación debemos disponer de un procedimiento para graficar pares ordenados. El dispositivo más comúnmente usado para este propósito es el sistema coordenado rectangular o sistema coordenado cartesiano. El sistema consiste en dos rectas numéricas, llamadas ejes de coordenadas, cortadas perpendicularmente en un punto O , llamado origen de coordenadas del sistema. El eje horizontal se llama eje X o eje de las x y el eje vertical, eje Y o eje de las y . Los puntos a la derecha del origen tienen coordenadas positivas y a la izquierda del origen, negativas. Análogamente los puntos

del eje Y arriba del origen tienen coordenadas positivas y los que están abajo del origen tienen coordenadas negativas. Los ejes X e Y dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes** y que se enumeran por I, II, III y IV (Fig. 5.1) en sentido antihorario.

Construido un sistema coordenado rectangular podemos establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto de los pares ordenados de números reales. Sea P un punto cualquiera del plano.

Su proyección perpendicular sobre el eje X es un punto cuya coordenada es el número real único a . La proyección perpendicular de P sobre el eje Y es un punto que tiene como coor-

denada al número real único b . Si tomamos a como el primer elemento de un par y b como el segundo, entonces con cada punto P del plano hemos asociado un par de números reales (a,b) , único, y viceversa. El asociar a cada par ordenado (a,b) un punto P nos lleva a las siguientes definiciones:

Definición 5.1 Si (a,b) es el par asociado con el punto P , entonces los números a y b se llaman **coordenadas** de P ; a se llama **coordenada x** o **abscisa** de P ; b es la **coordenada y** , u **ordenada** de P .

Definición 5.2 Si P es el punto asociado con el par ordenado (a,b) , entonces se dice que P es la **gráfica** de (a,b) .

Ejemplo. Graficar el conjunto de pares ordenados: $\{(2,3), (-3,2), (0,-2), (4,-1)\}$ y nombrar el cuadrante en que queda cada uno.

Solución. Construimos primero el sistema rectangular XY , luego representamos y marcamos cada uno de los puntos $P(2,3)$, $Q(-3,2)$, $S(0,-2)$ y $T(4,-1)$. Así, P queda en el I cuadrante, Q en el II, S queda sobre el eje Y , no está en ningún cuadrante y T en el IV cuadrante.

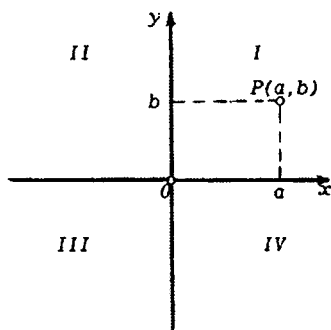
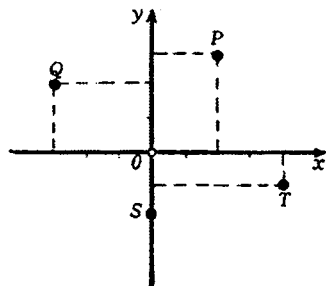


FIGURA 5.1



5.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ tres puntos en R^2 , tales que A y C estén situados sobre una línea horizontal y, B y C sobre una línea vertical. (Fig. 5.2)

Entonces, por lo visto en valor absoluto:

$$d(A, C) = |\overline{AC}| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

$$d(C, B) = |\overline{CB}| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

Luego, por el Teorema de Pitágoras:

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2$$

$$+ d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

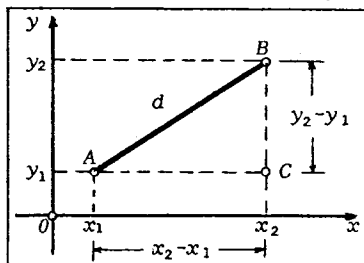


Figura 5.2

Ejemplo. Si $P(a, a+1)$ es un punto que equidista de $A(2, 1)$ y $B(-6, 5)$, hallar el valor de a .

Solución. Se debe verificar que: $d(A, P) = d(B, P)$

Entonces, por la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(a-2)^2 + [(a+1)-1]^2} = \sqrt{(a+6)^2 + [(a+1)-5]^2}$$

$$+ (a^2 - 4a + 4) + a^2 = (a^2 + 12a + 36) + (a^2 - 8a + 16), \text{ de donde: } a = -6$$

5.3 GRAFICAS DE RELACIONES DE R EN R

Un conjunto G de puntos del plano cartesiano es la gráfica de la relación R si verifican la propiedad:

$$"(P(a, b) \in G \leftrightarrow (a, b) \in R"$$

En la práctica, la gráfica de una ecuación de la forma $E(x, y) = 0$ o inecuaciones de las formas: $E(x, y) < 0$, $E(x, y) > 0$, $E(x, y) \leq 0$, $E(x, y) \geq 0$, en las variables x e y , es la gráfica de la relación:

$$R = \{(x, y) | E(x, y)\}$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de gráficas de relaciones más importantes.

5.3.1 GRAFICAS DE RELACIONES LINEALES DE LA FORMA:

$$R = \{(x, y) | ax + by + c = 0\}$$

Tienen por gráfica una línea recta.

EJEMPLO 1. Trazar la gráfica de la relación: $R_1 = \{(x, y) \in R^2 | 3x - 2y + 6 = 0\}$

Solución. Según un postulado de la geometría que afirma que dos puntos distintos de terminan una recta y sólo una, bastará hallar dos pares de la misma, de la siguiente manera:

Si $y=0 \rightarrow 3x+6=0 \leftrightarrow x=-2$. Así, $(-2,0)$ es una solución de la ecuación dada.

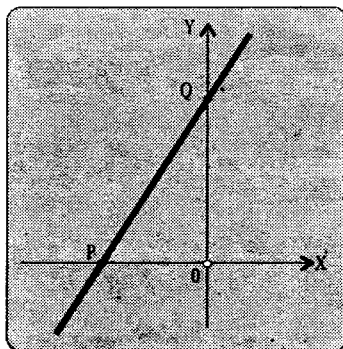
Si $x=0 \rightarrow -2y+6=0 \leftrightarrow y=3$

Luego, $(0,3)$ es una segunda solución.

Para obtener la gráfica requerida, solo necesitamos unir los puntos $P(-2,0)$ y $Q(0,3)$ con una línea recta, dada que:

$$G(R_1) = \{P(-2,0), Q(0,3), \dots, +\infty\}$$

Como vemos: $\text{Dom}(R_1) = \text{Ran}(R_1) = \langle -\infty, +\infty \rangle = \mathbb{R}$

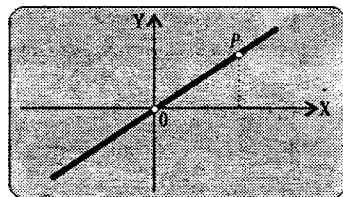


EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de la relación: $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x-3y=0\}$

Solución. La relación R_2 tiene la forma $ax+by+c=0$, en la que $c=0$. En estos casos $(0,0)$ es una solución de la ecuación $2x-3y=0$, es decir, la recta pasa por el origen de coordenadas. Necesitamos un segundo punto para determinar la recta.

Si $x=3 \rightarrow 2(3)-3y=0 \leftrightarrow y=2 \rightarrow P(3,2)$ es el otro punto.

Como $G(R_2) = \{(0,0), (3,2), \dots, +\infty\} \rightarrow \text{Dom}(R_2) = \text{Ran}(R_2) = \langle -\infty, +\infty \rangle = \mathbb{R}$



EJEMPLO 3 Trazar la gráfica de la relación: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x+2)(y-3)=0\}$

Solución. Según el T.4.14 $f: ab=0 \leftrightarrow a=0 \vee b=0$

$$\rightarrow (x+2)(y-3)=0 \leftrightarrow x+2=0 \vee y-3=0 \leftrightarrow x=-2 \vee y=3$$

La gráfica de S es la unión de las gráficas de

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x=-2\}$ con $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y=3\}$, es decir: $G(R_1) = \{(-2,0), (-2,1), (-2,2), \dots, (-2,n)\}$

es una recta vertical cuyos puntos tienen abscisa constante: $x=-2$

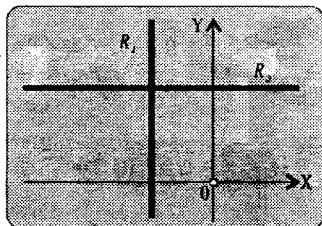
O sea $\text{Dom}(R_1) = \{-2\}$ y $\text{Ran}(R_1) = \mathbb{R}$

$$G(R_2) = \{(-2,3), (-1,3), (0,3), \dots, (n,3)\}$$

es una recta horizontal cuyos puntos tienen ordenada constante: $y=3$

O sea: $\text{Dom}(R_2) = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}(R_2) = \{3\} \rightarrow G(S) \cup G(R_2) = \text{ Toda la cruz}$

$$\therefore \text{Dom}(S) = \text{Dom}(R_1) = \mathbb{R} \text{ y } \text{Ran}(S) = \text{Ran}(R_1) = \mathbb{R}$$



EJEMPLO 4. Trazar la gráfica de la relación:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 3y + 7 = 0, x \in [-2, 4]\}.$$

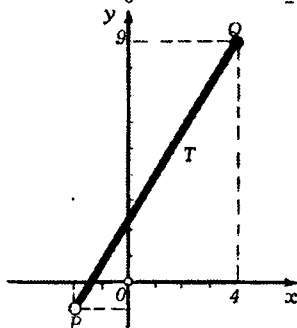
Solución. Podemos observar que el dominio de T está restringido al intervalo $[-2, 4]$. Luego, para esbozar su gráfica tomaremos los valores extremos de dicho intervalo, esto es:

$$\begin{aligned} \text{Si } x = -2 \rightarrow 5(-2) - 3y + 7 = 0 &\leftrightarrow y = -1 \\ &\rightarrow P(-2, -1) \notin G(T) \end{aligned}$$

$$\text{Si } x = 4 \rightarrow 5(4) - 3y + 7 = 0 \leftrightarrow y = 9 \rightarrow Q(4, 9) \in G(T)$$

Trazando el segmento PQ , sin incluir al punto P , tendremos la gráfica de T .

$$\therefore \text{Dom}(T) = [-2, 4] \text{ y } \text{Ran}(T) = [-1, 9]$$



5.3.2 GRÁFICAS DE RELACIONES DE LA FORMA:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}; R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

Tienen por gráfica una circunferencia de radio r y centro $C_1(0, 0)$ y $C_2(h, k)$ respectivamente. Así mismo, las relaciones de la forma $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\}$ tienen por gráfica una circunferencia o uno de sus casos especiales. En efecto, completando el cuadrado para las variables x e y se tiene:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F)$$

Haciendo: $t = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F)$, ocurre que:

- Si $t > 0$, la gráfica de R es una circunferencia de centro $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio $r = \sqrt{t}$
- Si $t = 0$, la gráfica de R es un punto $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$
- Si $t < 0$, R no tiene representación gráfica, es un conjunto vacío.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

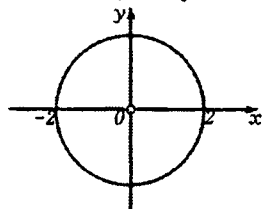
Solución. La gráfica de R_1 es una circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r = 2$

Para determinar el dominio despejamos y :

$$\begin{aligned} y = \pm\sqrt{4-x^2} &\rightarrow \exists y \leftrightarrow 4-x^2 \geq 0 \\ &\leftrightarrow x^2 \leq 4 \leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Para determinar el rango despejamos x :

$$x = \pm\sqrt{4-y^2} \rightarrow \exists x \leftrightarrow 4-y^2 \geq 0 \leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$$



$$\therefore \text{Dom}(R_1) = \text{Ran}(R_1) = [-2, 2]$$

Nota. Dado que la gráfica de una circunferencia, de radio r , es simétrica respecto de su centro, entonces, una forma práctica de hallar su dominio y su rango es la siguiente:

a) Si el centro está en $C(0,0) \rightarrow \text{Dom}(R) = \text{Ran}(R) = [-r, r]$

b) Si el centro está en $C(h,k) \rightarrow \text{Dom}(R)=[h-r, h+r]$ y $\text{Ran}(R)=[k-r, k+r]$

EJEMPLO 2. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 9 = 0\}$$

Solución. Completando el cuadrado para las variables x e y se tiene:

$$4(x^2 - 3x + 9/4) + 4(y^2 + 6y + 9) = -9 + 9 + 36$$

$$\text{de donde: } (x-3/2)^2 + (y+3)^2 = 9 \rightarrow h=3/2, k=-3$$

La gráfica de R_2 es una circunferencia de centro $C(3/2, -3)$ y radio $r=3$.

$$\text{Dominio de } R_2: y=f(x) \rightarrow y+3 = \pm\sqrt{9-(x-3/2)^2}$$

$$\rightarrow \exists y \rightarrow 9-(x-3/2)^2 \geq 0 \leftrightarrow (x-3/2)^2 \leq 9$$

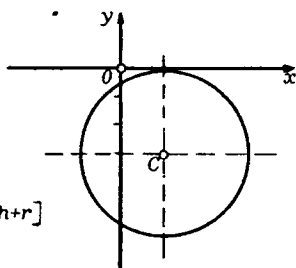
$$\leftrightarrow -3 \leq x-3/2 \leq 3 \leftrightarrow -3/2 \leq x \leq 9/2 = [h-r, h+r]$$

$$\text{Rango de } R_2: x=f(y) \rightarrow x-3/2 = \pm\sqrt{9-(y+3)^2}$$

$$\rightarrow \exists x \rightarrow 9-(y+3)^2 \geq 0 \leftrightarrow (y+3)^2 \leq 9$$

$$\leftrightarrow -3 \leq y+3 \leq 3 \leftrightarrow -6 \leq y \leq 0 = [k-r, k+r]$$

$$\therefore \text{Dom}(R_2) = [-3/2, 9/2] \text{ y } \text{Ran}(R_2) = [-6, 0]$$



Observaciones:

(1) Si de $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, despejamos $y=f(x)$, obtenemos las ecuaciones:

$$y = k \pm \sqrt{r^2 - (x-h)^2}$$

Obsérvese que ambas ecuaciones difieren en el signo $\pm$ antes del radical.

Con relación a sus gráficas puede ocurrir lo siguiente:

a) La gráfica de la relación $y=k+\sqrt{r^2-(x-h)^2}$ es una semicircunferencia de radio r y centro $C(h,k)$, ubicada en el semiplano superior de la recta $y=k$. Entonces: $\text{Dom}(R)=[h-r, h+r]$ y $\text{Ran}(R)=[k, k+r]$

b) La gráfica de la relación $y=k-\sqrt{r^2-(x-h)^2}$ es una semicircunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r , ubicada en el semiplano inferior de la recta $y=k$. Entonces: $\text{Dom}(R)=[h-r, h+r]$ y $\text{Ran}(R)=[k-r, k]$

(2) Si de $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ despejamos $x=f(y)$, obtenemos las ecuaciones:

$$x = h \pm \sqrt{r^2 - (y-k)^2}$$

a) La gráfica de $x=h+\sqrt{r^2-(y-k)^2}$ es una semicircunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r , ubicada en el semiplano derecho de la recta $x=h$. Entonces:

$$\text{Dom}(R)=[h, h+r] \text{ y } \text{Ran}(R)=[k-r, k+r]$$

- b) La gráfica de $x=h-\sqrt{r^2-(y-k)^2}$ es una semicircunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r , ubicada en el semiplano izquierdo de la recta $x=h$. Entonces:
 $\text{Dom}(R)=[h-r, h]$ y $\text{Ran}(R)=[k-r, k+r]$.

EJEMPLO 3. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_3 = \{(x, y) \in R^2 \mid y+2 = \sqrt{5+4x-x^2}\}$$

Solución. $y = -2 + \sqrt{9-(x-2)^2}$

El signo $+$ antes del radical indica que la gráfica de R_3 está en el semiplano superior de la recta $y=-2$ ($y > -2$)

Luego, la ecuación dada es equivalente a:

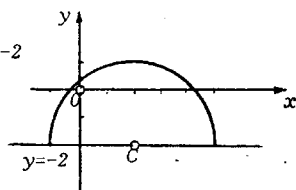
$$(y+2)^2 = 9 - (x-2)^2, \quad y > -2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9, \quad y > -2$$

Semicircunferencia de centro $C(2, -2)$ y $r=3$

Entonces: $h=2, k=-2$ y $r=3$

Luego: $\text{Dom}(R_3) = [h-r, h+r] = [-1, 5]$

$$\text{Ran}(R_3) = [k, k+r] = [-2, 1]$$



EJEMPLO 4. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_4 = \{(x, y) \in R^2 \mid y = -\sqrt{3-3x-x^2}\}$$

Solución. $y = -\sqrt{3-(x^2+2x+1)}+1 = -\sqrt{4-(x+1)^2}$

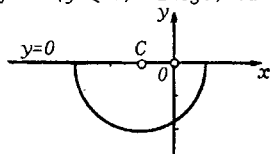
Aquí, $k=0$ y el signo negativo antes del radical indica que la gráfica de R_4 está en el semiplano inferior del eje X ($y \leq 0$). Luego, la ecuación dada es equivalente a:

$$y^2 = 4 - (x+1)^2, \quad y \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-0)^2 = 4, \quad y \leq 0$$

Entonces: $h=-1, k=0$ y $r=2$

$$\text{Dom}(R_4) = [h-r, h+r] = [-3, 1]$$

$$\text{Ran}(R_4) = [k-r, k] = [-2, 0]$$



EJEMPLO 5. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

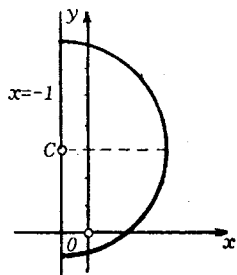
$$R_5 = \{(x, y) \in R^2 \mid x = -1 + \sqrt{7+6y-y^2}\}$$

Solución. $x = -1 + \sqrt{16-(y-3)^2}$

El signo $+$ antes del radical indica que la gráfica de R_5 está a la derecha del semiplano de la recta $x=-1$ ($x > -1$). Entonces la ecuación equivalente es: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16, x > -1$

$$h=-1, k=3 \text{ y } r=4 \rightarrow \text{Dom}(R_5)=[h, h+r]=[-1, 3]$$

$$\rightarrow \text{Ran}(R_5)=[k-r, k+r]=[-1, 7]$$



5.3.3 GRAFICAS DE RELACIONES DE LA FORMA:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\}$$

Tienen por gráfica una parábola. Mediante el método de completar el cuadrado, las ecuaciones de este tipo de relaciones pueden transformarse a la forma: $y = a(x-h)^2 + k$, en donde $V(h, k)$ es el vértice de cada parábola.

Hay dos características importantes que tienen en común todas las parábolas

a) **Simetría.** Cada parábola es simétrica con respecto a una línea vertical llamada **eje de simetría**.

b) **Vértice.** Es el punto donde la parábola interseca a su eje de simetría.

Si la gráfica de la parábola se abre hacia arriba ($a > 0$), su vértice es el punto más bajo de la curva; si se abre hacia abajo ($a < 0$) su vértice es el punto más alto.

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestran **parábolas típicas**, junto con las ecuaciones cuyas gráficas son las parábolas respectivas.

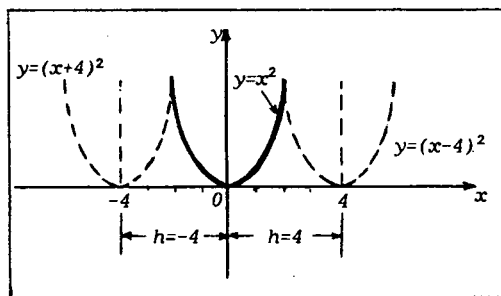


Figura 5.3

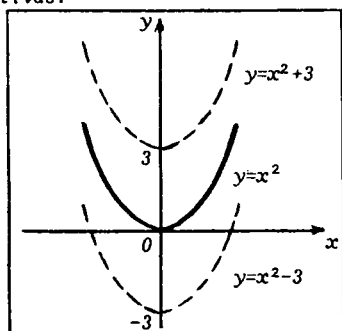


Figura 5.4

En la Fig. 5.3, se observa que tanto las gráficas de $y = (x-4)^2$ como la de $y = (x+4)^2$ tienen la misma forma que la de $y = x^2$, solo que están desplazadas horizontalmente 4 unidades a la derecha e izquierda respectivamente.

Análogamente, en la Fig. 5.4, las gráficas de $y = x^2 + 3$ y de $y = x^2 - 3$ son las mismas que la de $y = x^2$, solo que desplazadas verticalmente 3 unidades hacia arriba y abajo respectivamente.

En general:

- (1) La gráfica de $y = a(x-h)^2$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$, pero desplazada horizontalmente h unidades hacia la derecha si $h > 0$, o hacia la izquierda si $h < 0$.
- (2) La gráfica de $y = ax^2 + k$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$ pero desplazada verticalmente k unidades hacia arriba si $k > 0$ o hacia abajo si $k < 0$.

Combinando estos dos criterios podemos graficar parábolas de la forma: $y=a(x-h)^2+k$, tomando como base la gráfica de $y=ax^2$.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid y=x^2-6x+5\}$$

Solución. Completando el cuadrado: $y=(x^2-6x+9)-4 \rightarrow y=(x-3)^2-4$

Tomando como base la gráfica de $y=x^2$,

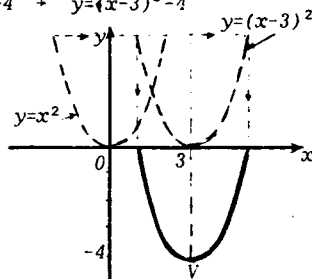
se desplaza $h=3$ ($h>0$) unidades a la derecha

y luego $k=-4$ ($k<0$) unidades hacia abajo.

Como $a > 0$, el punto más bajo de la parábola es el vértice $V(3, -4)$.

Entonces: $\text{Dom}(R_1) = R$

$$\text{Ran}(R_1) = \{-4, +\infty\}$$



EJEMPLO 2. Trazar la gráfica de la relación $R_2 = \{(x,y) \in R^2 \mid 4y+x^2-4x=0\}$.

Solución. Completando el cuadrado se tiene: $4y=-(x^2-4x+4)+4$

$$\leftrightarrow y = -\frac{1}{4}(x-2)^2+1 \rightarrow h=2, k=1$$

Como $a=-1/4 < 0$, la curva se abre hacia abajo

o sea que el punto más alto es el vértice de

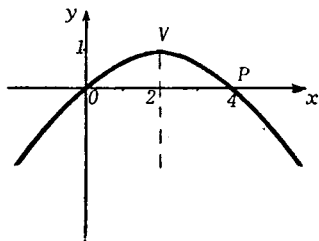
la parábola: $V(2,1)$. Sin usar el criterio anterior,

esbozamos la gráfica de R_2 encontrando

otros dos puntos de la parábola.

Para $y=0 \rightarrow x^2-4x=0 \leftrightarrow x=0$ o $x=4$

Uniendo el vértice con los puntos $O(0,0)$ y $P(4,0)$ obtenemos la gráfica de la relación. Entonces: $\text{Dom}(R_2)=R$ y $\text{Ran}(R_2)]=(-\infty, 1]$.



Observaciones:

(1) Las relaciones de la forma: $R=\{(x,y) \in R^2 \mid x=ay^2+by+c\}$ tienen por gráfica una parábola de eje horizontal. Mediante el método de completar el cuadrado es posible transformar la ecuación a la forma: $x=a(y-k)^2+h$, y esbozar su gráfica por los métodos ya conocidos.

Cuando $a > 0$, la curva se abre indefinidamente hacia la derecha, y cuando $a < 0$, la curva se abre indefinidamente hacia la izquierda.

EJEMPLO 3. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

$$R_3 = \{(x,y) \in R^2 \mid y^2-6y-4x+5=0\}$$

Solución. Completando el cuadrado para la variable y , se tiene:

$$(y^2 - 6y + 9) = 4x - 5 + 9 \leftrightarrow (y-3)^2 = 4(x+1)$$

$$\leftrightarrow x = \frac{1}{4}(y-3)^2 - 1 \rightarrow h = -1 \text{ y } k = 3$$

Vértice de la parábola: $V(-1, 3)$

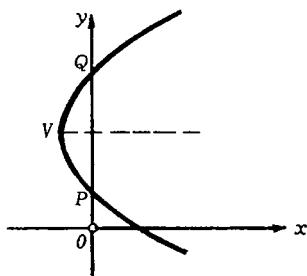
Como $a = 1/4 > 0$, la curva se abre hacia la derecha sin límite.

$$\text{Para } x=0 \rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \leftrightarrow y=1 \text{ o } y=5$$

Uniendo el vértice con los puntos $P(0, 1)$ y

$Q(0, 5)$ obtendremos la gráfica de R_3 .

$$\therefore \text{Dom}(R_3) = [-1, +\infty), \text{ Ran}(R_3) = \mathbb{R}$$



(2) Las relaciones de la forma: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k \pm b\sqrt{\pm(x-h)}, b > 0\}$ tienen por gráfica una semiparábola de eje horizontal ($y=k$).

En efecto, de la ecuación anterior: $x = a(y-k)^2 + h$, despejamos $y = f(x)$:

$$(y-k)^2 = \frac{1}{a}(x-h) \leftrightarrow y = k \pm \sqrt{\frac{1}{a}(x-h)}$$

Dado que a puede ser positivo o negativo, entonces haciendo: $\frac{1}{a} = (\pm b)^2$

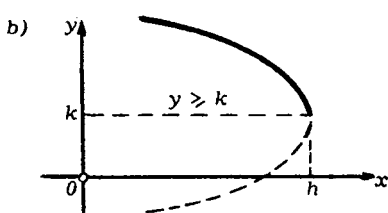
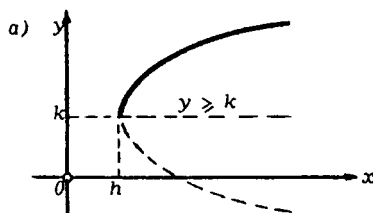
obtenemos: $y = k \pm b\sqrt{\pm(x-h)}, b > 0$

La forma como están ubicadas las gráficas de las parábolas respecto de su eje $y=k$, dependen de los signos $\pm$ antes del radical, y la forma como se extienden o se abren las parábolas (hacia la derecha o izquierda) dependen de los signos $\pm$ dentro del radical. En consecuencia, existirán dos casos:

$$\text{Caso 1: } y = k + b\sqrt{\pm(x-h)} \leftrightarrow \begin{cases} a) & y = k + b\sqrt{+(x-h)} \\ b) & y = k + b\sqrt{-(x-h)} \end{cases}$$

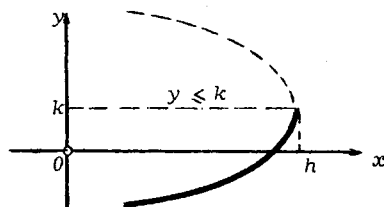
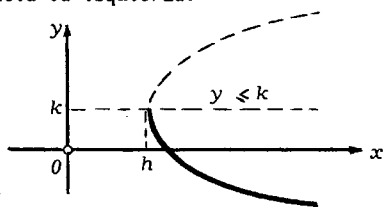
En este caso, la gráfica de la semiparábola se encuentra en el semiplano superior del eje $y=k$ ($y \geq k$).

En a) la curva se abre hacia la derecha y en b), hacia la izquierda.



$$\text{Caso 2. } y = k - b\sqrt{\pm(x-h)} \leftrightarrow \begin{cases} a) & y = k - b\sqrt{+(x-h)} \\ b) & y = k - b\sqrt{-(x-h)} \end{cases}$$

En este caso, la gráfica de la semiparábola se encuentra en el semiplano inferior del eje $y=k$ ($y \leq k$). En a) la curva se abre hacia la derecha y en b) hacia la izquierda.

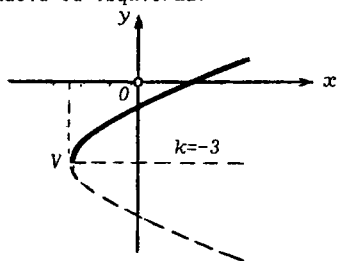


EJEMPLO 4. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de las relaciones: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y+3 = \sqrt{2x+5}\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y-1 = -\sqrt{2-x}\}$.

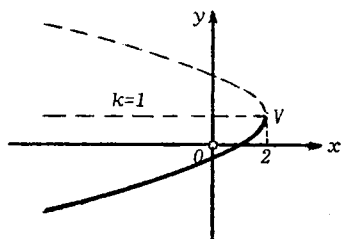
Solución. En R_1 : $y = -3 + (\sqrt{2})\sqrt{x+5/2}$ → $h=-5/2$ y $k=-3$

Tenemos el Caso 1a, la gráfica de la semiparábola está en el semiplano superior del eje $k=-3$ y la curva se abre hacia la derecha.

En R_2 : $y = 1 - \sqrt{-(x-2)}$ → $h=2$ y $k=1$. Tenemos el Caso 2b; la gráfica de la semiparábola está en el semiplano inferior del eje $k=1$, y la curva se abre hacia la izquierda.



Gráfica de R_1



Gráfica de R_2

$\text{Dom}(R_1) = [-5/2, +\infty)$, $\text{Ran}(R_1) = [-3, +\infty)$

$\text{Dom}(R_2) = (-\infty, 2]$, $\text{Ran}(R_2) = (-\infty, 1]$

5.3.4 GRÁFICAS DE RELACIONES DE LA FORMA

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\} ; R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\}$$

Tienen por gráfica una elipse, donde a es el semieje mayor, b es el semieje menor y $C(h, k)$ es el centro de la elipse.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

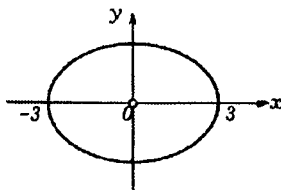
$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}.$$

Solución. $4x^2 + 9y^2 = 36 \leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

de donde: $a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$

$\text{Dom}(R_1) = [-a, a] = [-3, 3]; \text{Ran}(R_1) = [-b, b] = [-2, 2]$



EJEMPLO 2. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y - 71 = 0\}$$

Solución. Completando cuadrados para las variables x e y , se tiene:

$$16(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) = 144$$

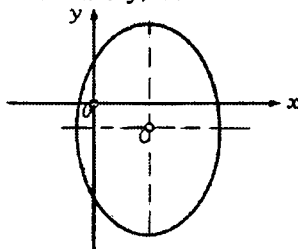
$$\leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

de donde: $a^2 = 16 \rightarrow a = 4; b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$h = 2$ y $k = -1 \rightarrow C(2, -1)$

$\text{Dom}(R_2) = [h-b, h+b] = [-1, 5]$

$\text{Ran}(R_2) = [k-a, k+a] = [-5, 3]$



5.3.5 GRÁFICAS DE RELACIONES DE LA FORMA:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}; R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\}; R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \pm a^2/2\}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)(y-k) = \pm a^2/2\}$$

Tienen por gráfica una hipérbola, donde a es el semieje transversal o real, b el semieje conjugado o imaginario y $C(h, k)$ el centro de la hipérbola.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9y^2 - 4x^2 = 36\}$$

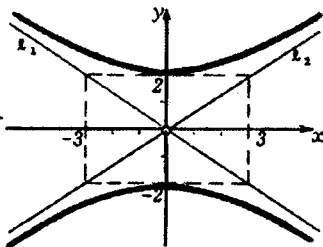
Solución. $9y^2 - 4x^2 = 36 \leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

de donde: $a^2 = 4 \rightarrow a = 2; b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

l_1 y l_2 son asíntotas de la hipérbola, se obtienen de: $9y^2 - 4x^2 = 0 \leftrightarrow (3y+2x)(3y-2x) = 0$

$\leftrightarrow l_1: 3y+2x=0$ o $l_2: 3y-2x=0$

$\text{Dom}(R_1) = \mathbb{R}; \text{Ran}(R_1) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



EJEMPLO 2. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 51 = 0\}.$$

Solución. Completando el cuadrado para x e y se tiene:

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 51 + 1 - 36$$

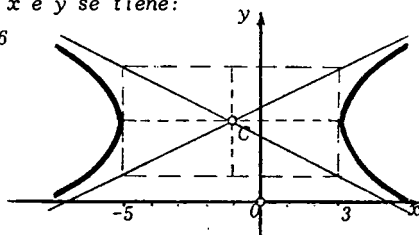
$$\rightarrow \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

de donde: $a^2 = 16 \rightarrow a = 4$, $b^2 = 4 \rightarrow b = 2$

$$h = -1 \text{ y } k = 3 \rightarrow C(-1, 3)$$

Luego, $\text{Dom}(R_2) = (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$

$$\text{Ran}(R_2) = \mathbb{R}$$



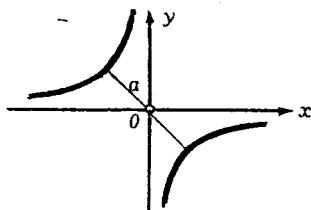
Nota. Las hipérbolas equiláteras de la forma: $xy = \pm a^2/2$, tienen como asíntotas a los ejes coordenados, y las hipérbolas equiláteras de la forma $(x-h)(y-k) = \pm a^2/2$, tienen como asíntotas a las rectas $x=h$, $y=k$.

EJEMPLO 3. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -2\}.$$

Solución. Si $xy = -2 \rightarrow -a^2/2 = -2 \rightarrow a^2 = 4$
 $\rightarrow a = 2$

Luego, $\text{Dom}(R_3) = \text{Ran}(R_3) = \mathbb{R} - \{0\}$



EJEMPLO 4. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 2x - 3y = 2\}.$$

Solución. Despejando $y=f(x)$ se tiene:

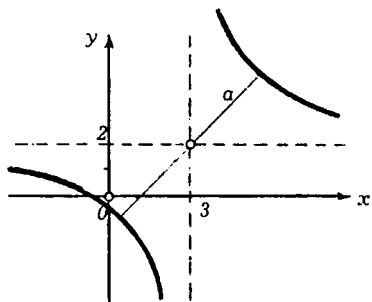
$$y = \frac{2x+2}{x-3} = 2 + \frac{8}{x-3}$$

$$\rightarrow y - 2 = \frac{8}{x-3} \rightarrow (x-3)(y-2) = 8$$

Entonces: $a^2/2 = 8 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

$$h = 3 \text{ y } k = 2$$

$\therefore \text{Dom}(R_4) = \mathbb{R} - \{3\}$, $\text{Ran}(R_4) = \mathbb{R} - \{2\}$



5.3.6 GRÁFICAS DE RELACIONES CON VALOR ABSOLUTO

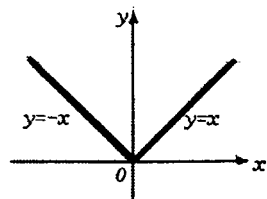
En $\mathbb{R}$, según el T.49: $|x| = y \leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (x = y \vee x = -y)$

Entonces, si: $y = |x| \leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (y = x \vee y = -x)$

y si aplicamos la definición de valor absoluto para el término $|x|$, ocurre

que: $y = |x| \leftrightarrow y = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

En consecuencia, la gráfica de $y = |x|$ equivale a la gráfica de cada una de las rectas: $y = x$, $y = -x$, pero en el semiplano superior del eje X . ($y \geq 0$).



Este mismo criterio se sigue para esbozar gráficas de relaciones que involucren el valor absoluto.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{|x-2|}{2-x}\}$$

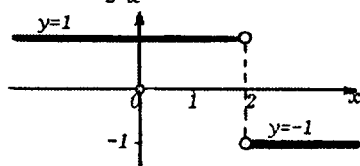
Solución. Si $x > 2 \rightarrow x-2 > 0 \rightarrow |x-2| = x-2$

$$x < 2 \rightarrow x-2 < 0 \rightarrow |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Luego, si $x > 2 \rightarrow y = \frac{x-2}{2-x} = -1$; si $x < 2 \rightarrow y = \frac{2-x}{2-x} = 1$

Entonces, la gráfica de R_1 consiste en dos partes: la parte de la recta $y = -1$ para $x > 2$, y la parte de la recta $y = 1$, para $x < 2$.

$\therefore \text{Dom}(R_1) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $\text{Ran}(R_1) = \{-1, 1\}$



EJEMPLO 2. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{(x-2) + |x-1|}{|x-2| + (x-1)}\}$$

Solución. Eliminaremos las barras de valor absoluto utilizando el método de los puntos críticos, que en este caso son: $x=1$ y $x=2$

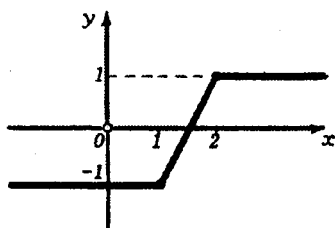
$x < 1$	1	$1 \leq x < 2$	2	$x \geq 2$
$ x-1 = -(x-1)$		$ x-1 = +(x-1)$		$ x-1 = +(x-1)$
$ x-2 = -(x-2)$		$ x-2 = -(x-2)$		$ x-2 = +(x-2)$

Para: $x < 1$, en R_2 : $y = \frac{(x-2) - (x-1)}{(2-x) + (x-1)} = -1$

$1 \leq x < 2$, en R_2 : $y = \frac{(x-2) + (x-1)}{(2-x) + (x-1)} = 2x-3$

$x \geq 2$, en R_2 : $y = \frac{(x-2) + (x-1)}{(x-2) + (x-1)} = 1$

$\therefore \text{Dom}(R_2) = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}(R_2) = [-1, 1]$



EJEMPLO 3. Dada la relación $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{|x-2|}{|x|-2}\}$, hallar su dominio, rango y trazar su gráfica.

Solución. En este caso, los puntos críticos son: $x=0$ y $x=2$

$x < 0$	0	$0 \leq x < 2$	2	$x > 2$
$ x = -x$		$ x = +x$		$ x = +x$
$ x-2 = -(x-2)$		$ x-2 = -(x-2)$		$ x-2 = +(x-2)$

Para: $x < 0$, en R_3 : $y = \frac{-(x-2)}{-x-2} = 1 - \frac{4}{x+4} \leftrightarrow (x+2)(y-1) = -4$

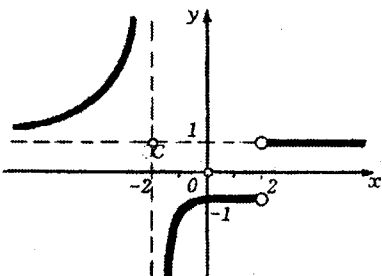
$0 \leq x < 2$, en R_3 : $y = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$

$x > 2$, en R_3 : $y = \frac{x-2}{x-2} = 1$

Obsérvese que para $x < 0$ tenemos la ecuación de una hipérbola equilátera de centro $C(-2, 1)$.

$\therefore \text{Dom}(R_3) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\text{Ran}(R_3) = \langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty)$



EJEMPLO 4. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación: $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = a, a > 0\}$.

Solución. $|x| + |y| = a \rightarrow |y| = a - |x|$

En este caso, aplicaremos la definición de valor absoluto para x y luego, el T.49, de los números reales para $|y|$, esto es:

a) Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow |y| = a - x \leftrightarrow (a - x \geq 0) \wedge (y = a - x \vee y = -a + x)$
 $\leftrightarrow (0 \leq x \leq a) \wedge (y = a - x \vee y = x - a)$

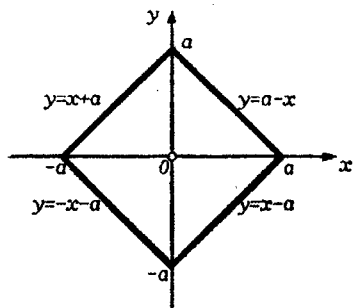
b) Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow |y| = a + x \leftrightarrow (a + x \geq 0) \wedge (y = a + x \vee y = -a - x)$
 $\leftrightarrow (-a \leq x < 0) \wedge (y = x + a \vee y = -x - a)$

$\therefore$ Si $0 \leq x \leq a \rightarrow y = \begin{cases} a-x \\ x-a \end{cases}$

$-a \leq x < 0 \rightarrow y = \begin{cases} x+a \\ -x-a \end{cases}$

Trazando la gráfica de cada una de estas rectas en el intervalo indicado, obtenemos la gráfica de R_4 . Nótese que es un cuadrado de centro $(0, 0)$ y cuyas diagonales miden $2a$. Entonces

$\text{Dom}(R_4) = \text{Ran}(R_4) = [-a, a]$



A base de la gráfica de $|x|+|y|=a$ podemos construir otras gráficas de relaciones de la forma: $|x-h|+|y-k|=a$, mediante una traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $C(h,k)$, centro del cuadrado de diagonales $2a$.

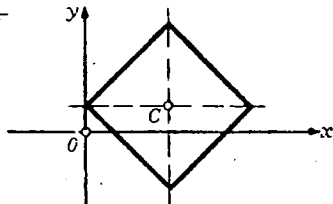
EJEMPLO 5. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

$$R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-3|+|y-1|=3\}.$$

Solución. Aquí tenemos: $h=3$ y $k=1 \rightarrow C(3,1)$ es el centro del cuadrado cuyas diagonales miden $2a=6$; luego, trasladando los ejes coordenados al centro del cuadrado, medimos de este punto 3 unidades sobre los nuevos ejes, encontrando así los vértices del cuadrado. Uniendo los cuatro vértices obtendremos la gráfica de la relación dada.

$$\rightarrow \text{Dom}(R_5) = [h-a, h+a] = [0, 6]$$

$$\text{Ran}(R_5) = [k-a, k+a] = [-2, 4]$$



EJEMPLO 6. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|-|y|=a, a > 0\}.$$

Solución. $|x|-|y|=a \rightarrow |y|=|x|-a$

Siguiendo los mismos pasos del ejemplo 4, tendremos:

$$a) x \geq 0 \rightarrow |x|=x \rightarrow |y|=x-a \leftrightarrow (x-a \geq 0) \wedge (y=x-a \vee y=-x+a)$$

$$\leftrightarrow (x \geq a) \wedge (y=x-a \vee y=-x+a)$$

$$b) x < 0 \rightarrow |x|=-x \rightarrow |y|=-x-a \leftrightarrow (-x-a \geq 0) \wedge (y=-x-a \vee y=x+a)$$

$$\leftrightarrow (x \leq -a) \wedge (y=-x-a \vee y=x+a)$$

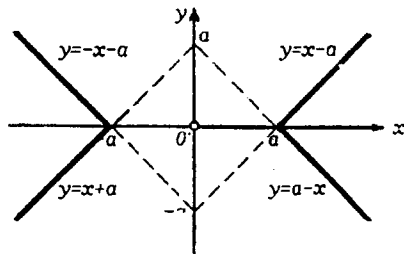
$$\text{Si } x \geq a \rightarrow y = \begin{cases} x-a \\ -x+a \end{cases}$$

$$x \leq -a \rightarrow y = \begin{cases} -x-a \\ x+a \end{cases}$$

$$\text{Entonces: } \text{Dom}(R_6) = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

$$\text{Ran}(R_6) = \mathbb{R}$$

Obsérvese que aquí la gráfica de R_6 se obtiene fácilmente prolongando los lados del cuadrado (trazo punteado), cuyos vértices están sobre el eje X .



EJEMPLO 7. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+1|-|y-2|=2\}.$$

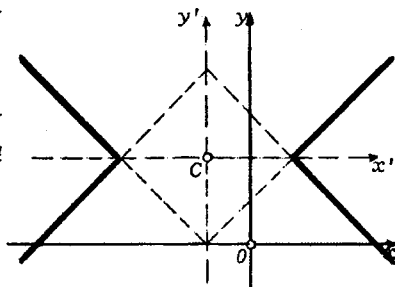
Solución. Aquí tenemos: $h=-1$ y $k=2 \rightarrow C(-1,2)$

Si trasladamos los ejes coordenados de modo tal que el origen coincida con el centro C , tendremos que en el nuevo sistema $X'Y'$, la ecuación de R se transforma en: $|x'| - |y'| = 2$, ecuación similar a la del ejemplo 6, con $a=2$. En consecuencia, trazamos su gráfica en idéntica forma.

$$\therefore \text{Dom}(R_7) = \langle -\infty, h-a \rangle \cup [h+a, +\infty)$$

$$= \langle -\infty, -3 \rangle \cup [1, +\infty)$$

$$\text{Ran}(R_7) = R$$



EJEMPLO 8. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación:

$$R_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| - |x| = a, a > 0\}.$$

Solución. $|y| - |a| = a \rightarrow |y| = |x| + a$

Como en los ejemplos anteriores consideremos las condiciones:

$$a) \text{ Si } x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow |y| = x + a \leftrightarrow (x + a \geq 0) \wedge (y = x + a \vee y = -x - a)$$

$$(x \geq 0 \wedge x \geq -a \rightarrow x \geq 0) \leftrightarrow (x \geq 0) \wedge (y = x + a \vee y = -x - a)$$

$$b) \text{ Si } x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow |y| = -x + a \leftrightarrow (a - x \geq 0) \wedge (y = -x + a \vee y = x - a)$$

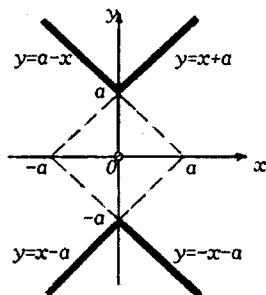
$$(\text{Pero: } x < 0 \wedge x \leq a \rightarrow x < 0) \leftrightarrow (x < 0) \wedge (y = a - x \vee y = x - a)$$

$$\text{Luego, si } x \geq 0 \rightarrow y = \begin{cases} x+a \\ -x-a \end{cases}$$

$$\text{si } x < 0 \rightarrow y = \begin{cases} a-x \\ x-a \end{cases}$$

Nótese que la gráfica de este tipo de relaciones, se obtienen prolongando los lados del cuadrado (traza punteado) cuyos vértices están sobre el eje Y .

$$\therefore \text{Dom}(R_8) = R \text{ y } \text{Ran}(R_8) = \langle -\infty, -a \rangle \cup [a, +\infty)$$



EJEMPLO 9. Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |3 + 2x - x^2|\}.$$

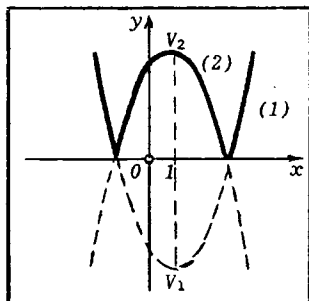
$$\text{Solución. } y = |-(x^2 - 2x + 1) + 4| = |-(x-1)^2 + 4| = |(x-1)^2 - 4|$$

$$\leftrightarrow (y \geq 0) \wedge \underbrace{[y = (x-1)^2 - 4]}_{(1)} \vee \underbrace{[y = -(x-1)^2 + 4]}_{(2)}$$

Luego, la gráfica de la relación S consiste en la unión de las gráficas de las parábolas (1) y (2) ubicadas en el semiplano superior del eje X , ya que $y \geq 0$. La parábola (1) tiene su vértice en $V_1(1, -4)$ dirigida hacia arriba

($a=1 > 0$) y la parábola (2) tiene su vértice en $V_2(1,4)$ dirigida hacia abajo ($a=-1 < 0$). Nótese en el resultado final (trazo continuo) como la parte de la parábola (1) que se encuentra en el semiplano inferior (trazo punteado) se ha reflejado hacia la parte superior, teniendo como espejo al eje X.

$\therefore \text{Dom}(S)=R$ y $\text{Ran}(S)=[0, +\infty)$



EJERCICIOS: Grupo 31

Hallar el dominio, rango y esbozar la gráfica de cada una de las siguientes relaciones.

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y + 6 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 2x + y - 2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y + 8 = 0, y \in \langle 2, 6 \rangle\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4y^2 - 16x + 4y - 47 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - \sqrt{15 - 2x - x^2}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3 + \sqrt{4x - x^2}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 + \sqrt{6y - y^2}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2|x| - 6y + 1 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 4|y| - 11 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2|x| + 3\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x - 2y + 7 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 4x + y + 3 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 4y + 3x - 8 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + \sqrt{2 - x}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\sqrt{6 - 2x}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 1 = \sqrt{3x + 5}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 + \sqrt{6 - 3x}\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y = -37\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 2x - y + 1 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x - 1| + x\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 2| = |y + 1|, y \geq 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{|x-1|}{1-x} + x\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 4\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 2| + |y - 3| = 4\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y + 1| = 2\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 1| - |y + 2| = 3\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - 3| - |x - 1| = 2\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x^2 + 4x + 1|\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |3 - \sqrt{15 - 2x - x^2}|\}$



5.3.7 GRAFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES**I) DESIGUALDADES LINEALES**

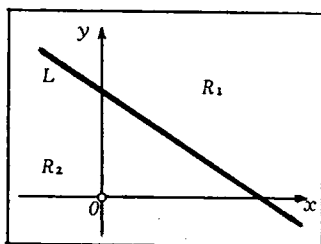
Si el signo de igualdad de la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ se sustituye por uno de orden ($<, \leq, \geq, >$), la relación resultante se llama **desigualdad lineal** en x e y .

Sabemos que la gráfica de R es una línea recta no vertical ($b \neq 0$) cuya ecuación se puede escri-

$$\text{bir: } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$\leftrightarrow L: y = mx + k$$

Esta gráfica divide al plano XY en dos regiones o semiplanos R_1 y R_2 , y sirve de **frontera** a dichas regiones, cuyas gráficas se basan en el siguiente teorema.



TEOREMA 5.1 El punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano superior de la recta $L: y = mx + k$ si y sólo si $y_1 > mx_1 + k$, y está en el semiplano inferior si y sólo si $y_1 < mx_1 + k$.

Demostración. En efecto, consideremos en el plano XY dos puntos con igual abscisa: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_1, y_2)$, de modo que P_2 esté sobre la recta L (frontera), es decir:

$$\text{Si } P_2(x_1, y_2) \in L \leftrightarrow y_2 = mx_1 + k \quad (1)$$

Se observa que si P_1 está en el semiplano superior (R_1) de la recta L (Figura 5.5), si y sólo si, $y_1 > y_2$.

Sustituyendo en (1), se tiene: $\leftrightarrow y_1 > mx_1 + k$

Del mismo modo, P_1 está en el semiplano inferior (R_2) de la recta L (Figura 5.6), si y sólo si: $y_1 < y_2$

$$\leftrightarrow y_1 < mx_1 + k$$

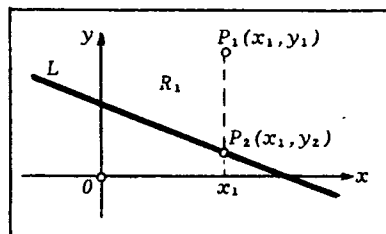


Figura 5.5

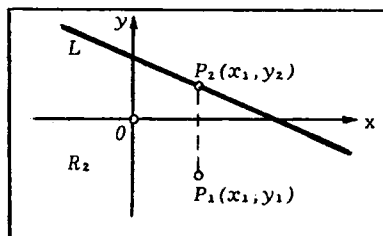


Figura 5.6

EJEMPLO 1. Construir la gráfica de la relación: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y > 4\}$.

Solución. Los pasos que se deben seguir para construir gráficas de relaciones de este tipo son los siguientes:

(1) Despejar y en términos de x

$$2x + y > 4 \leftrightarrow y > 4 - 2x$$

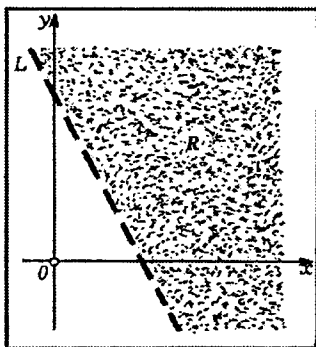
(2) Graficar la frontera $L: y = 4 - 2x$

(Con trazo punteado por la desigualdad estricta $>$)

(3) Aplicar el Teorema 5.1. Por (1), la gráfica de R es la totalidad de puntos que se encuentran en el semiplano superior de la recta L , sin incluir los puntos de frontera $\therefore$ Se sombrea el semiplano superior.

(4) Como comprobación tomemos un punto del semiplano inferior, tal como el origen $(0, 0)$, y sustituyamos en R : $2(0) + 0 > 4 \leftrightarrow 0 > 4$, es falso.

$\therefore$ Los puntos del semiplano inferior no satisfacen la desigualdad.



Como consecuencia del Teorema 5.1, enunciamos el siguiente:

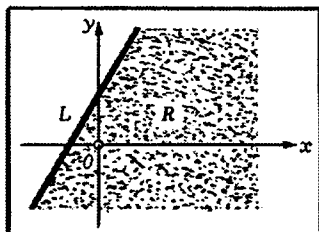
Corolario. El punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano superior y sobre la recta $L: y = mx + k$ si sólo si $y_1 \geq mx_1 + k$, y está en el semiplano inferior y sobre ella, si y sólo si: $y_1 \leq mx_1 + k$.

EJEMPLO 2. Construir la gráfica de la relación: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y + 2 \geq 0\}$.

Solución. (1) $2x - y + 2 \geq 0 \leftrightarrow y \leq 2x + 2$

(2) Graficamos la frontera $L: y = 2x + 2$ con trazo continuo.

(3) Por (1), la gráfica de R está constituida por los puntos sobre L y la totalidad de puntos del semiplano inferior a ella.



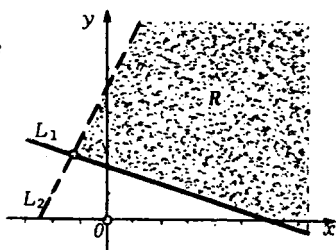
EJEMPLO 3. Construir la gráfica de la región que consta de los puntos que satisfacen la relación: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 3y \geq 6) \wedge (2x - y > 0)\}$

Solución. (1) Si $x + 3y - 6 \geq 0 \leftrightarrow y \geq 2 - x/3$; $2x - y > 0 \leftrightarrow y < 2x + 5$

(2) Sean $L_1: y = 2 - x/3$; $L_2: y = 2x + 5$

Trazamos las gráficas de L_1 con trazo continuo y la de L_2 con trazo punteado.

(3) Según (1), la gráfica de R está constituida por los puntos de intersección de la región ubicada en el semiplano superior y sobre la recta L_1 , con la región ubicada en el semiplano inferior de la recta L_2 .



EJEMPLO 4. Construir la gráfica de la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 8x + 4y \leq 0\}.$$

Solución. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 8x + 4y = (2x+y)(x-2y+4)$

(1) Sean las rectas $L_1: 2x+y=0$

$$L_2: x-2y+4=0$$

(2) $L_1 \cap L_2$ determinan en el plano 4 regiones

R_1 , R_2 , R_3 y R_4 .

Tomemos un punto de cada región y comprobemos si satisfacen a la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x+y)(x-2y+4) \leq 0\}$$

(3) $(1, 0) \in R_1 \rightarrow (2+0)(1-0+4) \leq 0 \rightarrow 10 \leq 0$, es falso $\therefore R_1 \notin S$

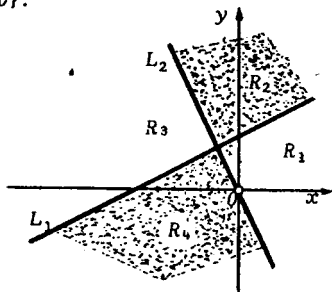
$(0, 3) \in R_2 \rightarrow (0+3)(0-6+4) \leq 0 \rightarrow -6 \leq 0$, verdadero $\therefore R_2 \in S$

$(-5, 0) \in R_3 \rightarrow (-10+0)(-5-0+4) \leq 0 \rightarrow 10 \leq 0$, falso $\therefore R_3 \notin S$

$(-1, 0) \in R_4 \rightarrow (-2+0)(-1-0+4) \leq 0 \rightarrow -6 \leq 0$, verdadero $\therefore R_4 \in S$

(4) Por lo tanto, la gráfica de S es la de $R_2 \cup R_4$, o sea:

$$\text{Graf}(S) = \text{Graf}(R_2 \cup R_4)$$



EJEMPLO 5. Construir la gráfica de la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-3, 5], y \in [-2, 4]\}$$

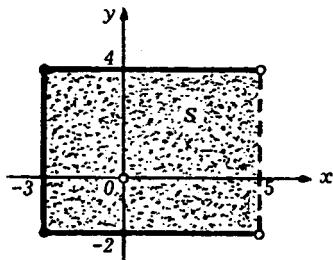
Solución. (1) Si $x \in [-3, 5] \leftrightarrow -3 \leq x < 5$ (R_1)

$y \in [-2, 4] \leftrightarrow -2 \leq y \leq 4$ (R_2)

(2) R_1 es la intersección del semiplano a la derecha de $x=-3$ con el semiplano a la izquierda de $x=5$ (No incluida)

R_2 es la intersección del semiplano superior de la recta $y=-2$ con el semiplano inferior de la recta $y=4$.

(3) Por lo tanto, la gráfica de S es el área rectangular conformada por las rectas $x=-3$, $x=5$, $y=4$, $y=-2$



EJEMPLO 6. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la relación

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+1| \leq 3, |y-2| > 1\}.$$

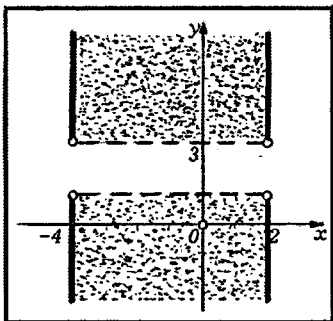
Solución. (1) $|x+1| \leq 3 \leftrightarrow -3 \leq x+1 \leq 3$

$$\leftrightarrow -4 \leq x \leq 2 \quad (R_1)$$

$$|y-2| > 1 \leftrightarrow y-2 > 1 \vee y-2 < -1$$

$$\leftrightarrow (y > 3) \vee (y < 1) \quad (R_2)$$

(2) R_1 es la intersección del semiplano a la derecha de $x=-4$, con el semiplano a la izquierda de $x=2$. R_2 es la unión del semiplano superior de la recta $y=3$ con el semiplano inferior de la recta $y=1$ (Las fronteras $y=1$, $y=3$ no están incluidas).



(3) Entonces: $\text{Graf}(T) = \text{Graf}(R_1) \cap \text{Graf}(R_2)$ es el área sombreada.

$$\therefore \text{Dom}(T) = [-4, 2] \text{ y } \text{Ran}(T) = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

EJEMPLO 7. Construir la gráfica de la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 2, \text{ si } xy \geq 0 \text{ o } |x| + |y| \leq 2, \text{ si } xy < 0\}$$

Solución. (1) $|x| + |y| \geq 2$, si $xy \geq 0$

$$xy \geq 0 \leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)$$

$$\text{Si } (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \rightarrow x+y \geq 2 \leftrightarrow y \geq 2-x \quad (R_1)$$

$$(x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \rightarrow -x-y \geq 2 \leftrightarrow y \leq -2-x \quad (R_2)$$

Considerando las restricciones del dominio y rango, R_1 es la totalidad de puntos en el semiplano superior de la recta $L_1: y=2-x$, y R_2 está formado por los puntos del semiplano inferior de la recta $L_2: y=-2-x$.

(2) $|x| + |y| \leq 2$, si $xy < 0$

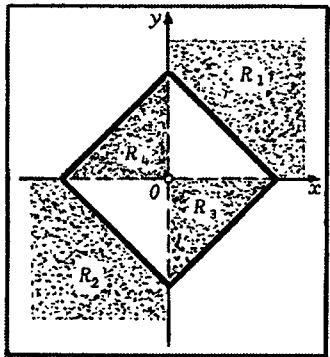
$$xy < 0 \leftrightarrow (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)$$

$$(x > 0 \wedge y < 0) \rightarrow x-y \leq 2 \leftrightarrow y \geq x-2 \quad (R_3)$$

$$(x < 0 \wedge y > 0) \rightarrow -x+y \leq 2 \leftrightarrow y \leq x+2 \quad (R_4)$$

Considerando las restricciones del dominio y rango, R_3 es la totalidad de puntos en el semiplano superior y sobre la recta $L_3: y=x-2$, y R_4 está formada por los puntos en el semiplano inferior y sobre la recta $L_4: y=x+2$.

(3) $\text{Graf}(S) = \text{Graf}(R_1 \cup R_2) \cup \text{Graf}(R_3 \cup R_4)$



EJEMPLO 8. Construir la gráfica de la relación:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq 3, |x-3| \leq |y+1|\}$$

Solución. (1) Si $|x| \leq 3 \leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Pero $|x| \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 3$ (S)

Entonces: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\}$

$$|x-3| \leq |y+1| \rightarrow |x-3|^2 \leq |y+1|^2$$

$$\leftrightarrow (x-3)^2 - (y+1)^2 \leq 0 \leftrightarrow (x+y-2)(x-y-4) \leq 0$$

(2) Sean $L_1: x+y-2=0$ y $L_2: x-y-4=0$, entonces

$L_1 \cap L_2$, determinan en el plano 4 regiones

R_1, R_2, R_3, R_4 .

Veamos cual de estas regiones satisface la relación: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y-2)(x-y-4) \leq 0\}$.

$$(4, -1) \in R_1 \rightarrow (4-1-2)(4+1-4) \leq 0 \rightarrow 1 \leq 0, \text{ falso} \rightarrow (4, -1) \notin R$$

$$(3, 0) \in R_2 \rightarrow (3+0-2)(3-0-4) \leq 0 \rightarrow -1 \leq 0, \text{ verdad} \rightarrow (3, 0) \in R$$

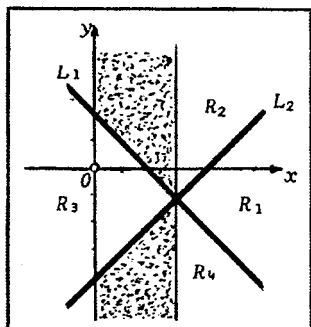
$$(0, 0) \in R_3 \rightarrow (0+0-2)(0-0-4) \leq 0 \rightarrow 8 \leq 0, \text{ falso} \rightarrow (0, 0) \notin R$$

$$(3, -2) \in R_4 \rightarrow (3-2-2)(3+2-4) \leq 0 \rightarrow -1 \leq 0, \text{ verdad} \rightarrow (3, -2) \in R$$

(3) Luego: $\text{Graf}(R) = \text{Graf}(R_2) \cup \text{Graf}(R_4)$

(4) Por lo tanto: $\text{Graf}(T) = \text{Graf}(S) \cap \text{Graf}(R)$

Esto es, la gráfica de T es la porción de $R_2 \cup R_4$, entre $0 \leq x \leq 3$.



EJEMPLO 9. Resolver gráficamente y determinar el conjunto de coordenadas enteras, no nulas y positivas de la relación:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+3y-12 \leq 0, 2x-5y+5 < 0\}.$$

Solución. (1) Si $2x+3y-12 \leq 0 \rightarrow y \leq 4-2x/3$

$$2x-5y+5 < 0 \rightarrow y > 2x/5+1$$

(2) Sean $L_1: y=4-2x/3$, $L_2: y=1+2x/5$

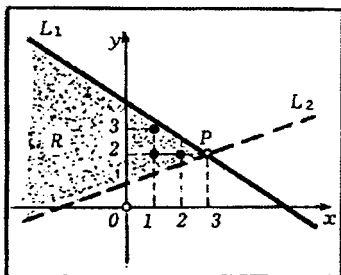
Construimos las rectas L_1 con trazo continuo y L_2 con trazo punteado.

(3) Según (1), la gráfica de R lo constituyen la totalidad de puntos de intersección de la región ubicada en el semiplano inferior y sobre la recta L_1 , con la región ubicada en el semiplano superior de la recta L_2 .

(4) En el I cuadrante se trazan líneas paralelas a los ejes coordenados cuyas intersecciones nos darán las coordenadas pedidas, esto es:

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$$

Nótese que $P(3, 2)$ satisface $2x+3y-12 \leq 0$, pero no a $2x-5y+5 < 0$.



EJERCICIOS: Grupo 32

Construir la gráfica de la región descrita por las siguientes relaciones:

1. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x + y - 3 \geq 0) \wedge (x - y + 2 > 0)\}$
2. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 4y - 6 \leq 0) \wedge (2x - 6y + 7 \geq 0)\}$
3. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x - y - 5 \leq 0) \vee (y - 3x + 3 \leq 0)\}$
4. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x - y + 8 \leq 0) \vee (4y - 4x + 1 \geq 0)\}$
5. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x + y - 17 \geq 0) \wedge (5x - 2y - 10 > 0)\}$
6. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x - y + 1 \geq 0) \wedge (6x - 3y - 2 < 0)\}$
7. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x - 10y - 4 < 0) \vee (4x + 6y - 15 < 0)\}$
8. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y - 4 \leq 0, 6x + y - 11 \geq 0, 4x + 5y - 20 \leq 0\}$
9. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x + y - 4 > 0) \wedge (x - 2y + 1 < 0) \wedge (2x + 3y - 19 < 0)\}$
10. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2 \geq 0) \wedge (y + 5 \geq 0) \wedge (x - y \geq 0) \wedge (2x + y - 20 < 0)\}$
11. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y + 1| \geq 3 \wedge |x - 1| < 6$
12. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 2| + 3y - 4 < 0\}$
13. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq x \wedge y > |x| - 1\}$
14. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - x| \leq 2x\}$
15. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 2 \wedge x - 4y + 4 \geq 0\}$
16. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 2| + |x + 3| + 4y - 5 \leq 0 \wedge x - y \leq 0\}$
17. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x, |x| + |y| \leq 6, x > 0\}$
18. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -|x|, 2 < |x| \leq 4, y \geq -6\}$
19. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = |x|, |x| + |y| \leq 1\}$
20. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 1\}$
21. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| - |y| \leq 2, |y| \leq 1\}$
22. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| - |y| \geq 4) \wedge (|x| \leq 6)\}$
23. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x + 2| - |y - 3| \geq 4) \wedge (|x + 2| \leq 6) \wedge (|y - 3| \leq 6)\}$
24. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x - 2| + |y - 3| \leq 6) \wedge (|y| \leq x)\}$
25. Construir la gráfica de la región descrita por las relaciones:
 - a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2xy + 2x + 2y - 3 \leq 0\}$
 - b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 5xy + 2y^2 + x - 2y \geq 0\}$

(Sugerencia: Factorizar y aplicar la regla de los signos)
26. Hallar el área de la región acotada por la relación:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 2, |x| \leq 6, |y| \leq 4\}$$

Resolver gráficamente y determinar las coordenadas enteras no nulas y positivas de las siguientes relaciones:

$$27. R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2y \leq 8) \wedge (x-3y+3 < 0)\}$$

$$28. R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (5x-2y > 0) \wedge (8x+5y < 40)\}$$

$$29. R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (5x-2y > 10) \wedge (2x+3y \leq 12)\}$$



II) DESIGUALDADES CUADRATICAS

En conexión con las ecuaciones cuadráticas de dos variables vamos a considerar inecuaciones relacionadas de la siguiente manera:

$$y > ax^2 + bx + c$$

$$x > ay^2 + by + c$$

$$y < ax^2 + bx + c$$

$$x < ay^2 + by + c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La parábola cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c$ divide al plano en dos regiones (semitplanos), en una de las cuales $y > ax^2 + bx + c$ y en la otra $y < ax^2 + bx + c$. Ninguna de las regiones contiene a dicha parábola (frontera).

La gráfica de una inecuación cuadrática se basa fundamentalmente en los siguientes teoremas:

TEOREMA 5.2. El punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano interior de la parábola $P: y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, si y sólo si, $y_1 > ax_1^2 + bx_1 + c$ y está en el semiplano exterior de ella si y sólo si $y_1 < ax_1^2 + bx_1 + c$.

Demostración. En efecto, consideremos dos puntos con igual abscisa $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_1, y_2)$ de modo tal que P_2 esté sobre la parábola P , es decir:

$$P_2(x_1, y_2) \in P \leftrightarrow y_2 = ax_1^2 + bx_1 + c \quad (1)$$

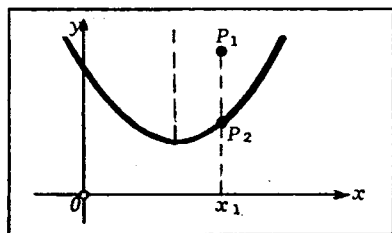


Figura 5.7

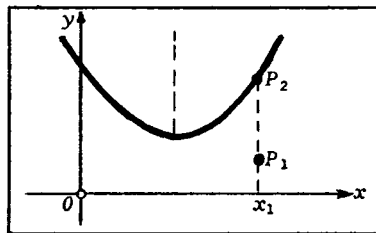


Figura 5.8

En la figura 5.7 se observa que P_1 está en el semiplano interior de la parábola P , si y sólo si:

$$y_1 > y_2$$

y sustituyendo en (1) se tiene:

$$y_1 > ax_1^2 + bx_1 + c$$

De igual modo, P_1 está en el semiplano exterior de la parábola P (Fig. 5.8), si y sólo si:

$$y_1 < y_2$$

esto es:

$$y_1 < ax_1^2 + bx_1 + c$$

Corolario. El punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano interior y sobre la parábola $P: y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $\leftrightarrow y_1 \geq ax_1^2 + bx_1 + c$, y está en el semiplano exterior y sobre ella, $\leftrightarrow y_1 \leq ax_1^2 + bx_1 + c$

Nota. Para la parábola $P: x = ay^2 + by + c$, $a > 0$, se sigue el mismo criterio para construir gráficas de relaciones:

$$x > ay^2 + by + c, a > 0$$

$$x < ay^2 + by + c, a > 0$$

Esto es, el punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano interior y sobre la parábola $P: x = ay^2 + by + c$, $a > 0$, $\leftrightarrow x_1 \geq ay_1^2 + by_1 + c$, y está en el semiplano exterior y sobre ella $\leftrightarrow x_1 \leq ay_1^2 + by_1 + c$

TEOREMA 5.3 El punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano interior de la parábola $P: y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, si y sólo si $y_1 < ax_1^2 + bx_1 + c$, y está en el semiplano exterior y sobre ella $\leftrightarrow y_1 > ax_1^2 + bx_1 + c$.

TEOREMA 5.4 El punto $P_1(x_1, y_1)$ está en el semiplano interior de la parábola $P: x = ay^2 + by + c$, $a < 0$, $\leftrightarrow x_1 < ay_1^2 + by_1 + c$, y está en el semiplano exterior de la parábola $\leftrightarrow x_1 > ay_1^2 + by_1 + c$.

EJEMPLO 1. Construir la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - 3 - y \leq 0\}.$$

Solución. (1) Despejamos y en términos de x :

$$y \geq x^2 - 2x - 3$$

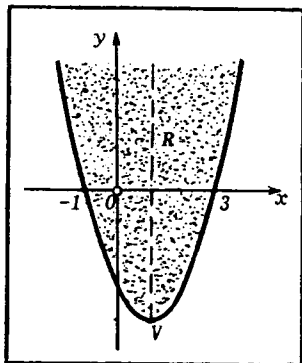
(2) Trazamos la parábola $P: y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

de donde: $h=1$ y $k=-4 \rightarrow V(1, -4)$

Para $y=0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \leftrightarrow x = -1$ o $x = 3$

Con estos 3 puntos construimos la parábola

(3) Según el Teorema 5.2, ($a=1 > 0$), la totalidad de puntos de la relación R_1 , se encuentra en el semiplano interior de la parábola.



EJEMPLO 2. Construir la gráfica de la relación:

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y^2 + 4y - 3 > 0\}.$$

Solución. (1) En este caso despejamos x en términos de y : $x > -2y^2 - 4y + 3$

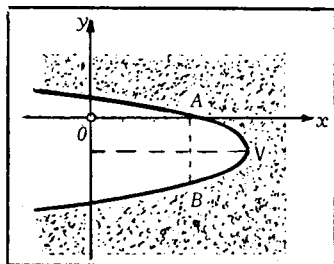
$$(2) \text{ Sea la parábola } P: x = -2y^2 - 4y + 3 \leftrightarrow x = -2(y+1)^2 + 5$$

de donde: $h=5$ y $k=-1 \rightarrow V(5, -1)$

Para $y=0 \rightarrow x=3 \rightarrow A(3, 0) \in P$. Un punto simétrico de A respecto del eje $k=-1$ es $B(3, -2)$.

Luego, construimos la parábola que pasa por estos tres puntos.

(3) Según (1): $a=-2 < 0$, entonces por el teorema 5.4, la totalidad de puntos que satisfacen la relación R_2 están en el semiplano exterior de la parábola (se sombrea esta región).



EJEMPLO 3. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la relación

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 + 10x > 24, x + y - 6 < 0\}.$$

Solución. (1) $y > x^2 - 10x + 24$ (R_1) ; $y < 6 - x$ (R_2)

$$(2) \text{ Sean, } P: y = x^2 - 10x + 24 \leftrightarrow y = (x-5)^2 - 1, \text{ y } L: y = 6 - x$$

De la ecuación de la parábola: $h=5$ y $k=-1 \rightarrow V(5, -1)$

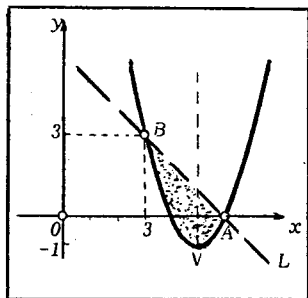
(3) $P \cap L = A(6, 0)$ y $B(3, 3)$

(4) Construimos la parábola que pasa por V , A y B , y la recta L que pasa por A y B .

(4) Según (1), R_1 es la totalidad de puntos en el interior y sobre la parábola P , y R_2 es el conjunto de puntos en el semiplano inferior de la recta L .

(6) $\therefore \text{Graf}(S) = \text{Graf}(R_1) \cap \text{Graf}(R_2)$
= La parte sombreada.

(7) $\text{Dom}(S) = \langle 3, 6 \rangle$, $\text{Ran}(S) = [-1, 3]$



Nota. En conexión con las ecuaciones cuadráticas $E(x, y) = 0$ (circunferencia, elipse, hipérbola) están las gráficas de las desigualdades asociadas: $E(x, y) > 0$, $E(x, y) \geq 0$, $E(x, y) < 0$, $E(x, y) \leq 0$

La gráfica de cada una de estas inecuaciones cuadráticas se basan en la aplicación del siguiente teorema:

TEOREMA 5.5 Sea $P(x, y)$ un punto de una de las regiones en que una gráfica de la ecuación $E(x, y) = 0$ divide al plano. Si $E(x, y) > 0$

para $P(x,y)$ entonces $E(x,y) > 0$ para cualquier otro punto de la región de P

Como consecuencia de este teorema es posible trazar la gráfica de cualquier desigualdad cuadrática de la siguiente manera:

- (1) Dibujando la gráfica de la ecuación $E(x,y)=0$.
- (2) Comprobando la verdad de la desigualdad dada en un punto $P(x,y)$ de cada una de las dos regiones en que la gráfica de $E(x,y)=0$ divide al plano.
- (3) Sombrear la región o regiones en las cuales la prueba anterior es afirmativa.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la relación

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 \leq 0\}.$$

Solución. (1) Sea $C: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$ (frontera)

Completando el cuadrado para x e y se tiene:

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = -11 + 20 \iff C: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$$

de donde: $h=4$, $k=-2$, $r=3 \rightarrow C(4, -2)$

- (2) Tomamos un punto cualquiera del plano, de preferencia, el origen. Entonces:

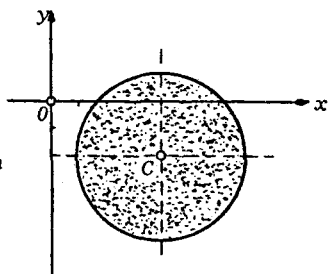
$$\text{Es } (0,0) \in R? \rightarrow 0^2 + 0^2 - 8(0) + 4(0) + 11 \leq 0$$

$$\iff 11 \leq 0, \text{ es falso, luego } (0,0) \notin R$$

- (3) Por lo tanto, la gráfica de R es la región interior de la circunferencia incluyendo la frontera C .

$$(4) \text{Dom}(R) = [h-r, h+r] = [1, 7]$$

$$\text{Ran}(R) = [k-r, k+r] = [-5, 1]$$



EJEMPLO 2. Construir la gráfica de la relación: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 4y^2 > 12\}$

Solución. (1) Sea $E: 3x^2 + 4y^2 = 12$ (frontera)

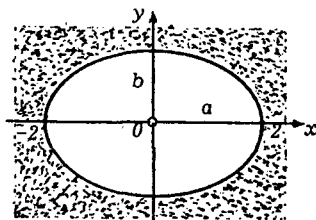
$$\rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

de donde: $a^2=4 \rightarrow a=2$, $b^2=3 \rightarrow b=\sqrt{3}$

- (2) Es $(0,0) \in R?$

$$\rightarrow 3(0)^2 + 4(0)^2 > 12 \iff 0 > 12, \text{ es falso}$$

- (3) Luego, la gráfica de R es la región exterior de la elipse, incluyendo la frontera E .



EJEMPLO 3. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 9\}$.

Solución. (1) Sea $H: x^2 - y^2 = 9$ (frontera)

Hipérbola equilátera de la forma: $x^2 - y^2 = a^2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

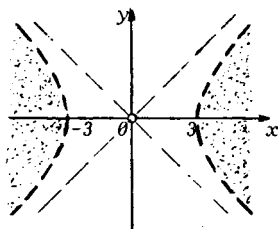
Dibujamos la frontera con línea de puntos.

(2) Es $(0,0) \in R$?

$$\rightarrow (0)^2 - (0)^2 > 9 \Leftrightarrow 0 > 9, \text{ es falso}$$

(3) Entonces, la gráfica de R es la región interna de las dos ramas de la hipérbola sin incluir la frontera H .

(4) $\text{Dom}(R) = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$; $\text{Ran}(R) = \mathbb{R}$



EJEMPLO 4. Construir la gráfica de la relación:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + x - 2y - 4 \geq 0\}.$$

Solución. (1) Sea $H: xy + x - 2y - 4 = 0$ (frontera)

$$\rightarrow y(x-2) = 4-x \rightarrow y = \frac{4-x}{x-2} \rightarrow y = -1 + \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)(y+1) = 2$$

Hipérbola equilátera de la forma: $(x-h)(y-k) = a^2/2$

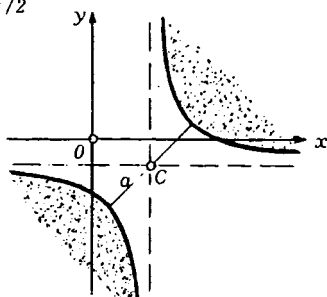
Entonces: $h=2$, $k=-1 \rightarrow C(2, -1)$, $a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

Dibujamos la frontera con línea continua.

(2) Es $(0,0) \in R$?

$$\rightarrow 0(0) + 0 - 2(0) - 4 \geq 0 \rightarrow -4 \geq 0, \text{ es falso}$$

(3) Entonces, la gráfica de R es la totalidad de puntos en el interior de las dos ramas de la hipérbola, incluyendo la frontera.



5.3.8 GRÁFICAS DE RELACIONES INVERSAS

Sabemos que una relación directa de A en B es el conjunto:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in R\}$$

y su inversa, el conjunto:

$$R^* = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Esto es, si $A = \{1, 2, 4\}$ y $B = \{0, 3\}$, entonces:

$$R = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3), (4, 0), (4, 3)\}$$

y

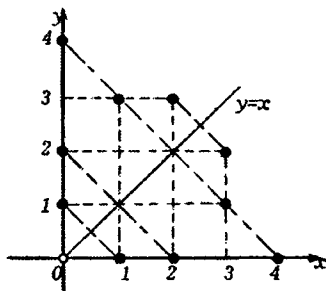
$$R^* = \{(0, 1), (3, 1), (0, 2), (3, 2), (0, 4), (3, 4)\}$$

Ubiquemos cada uno de los pares de R y R^* sobre un mismo plano cartesiano.

En la figura se observa que los pares de R y R^* son equidistantes de la recta $L: y=x$. Entonces, si consideramos la recta L como espejo, los pares de R^*

se pueden obtener como reflexión o imagen de los pares de R , simétricamente, a través de diho espejo

Esta característica de las relaciones inversas puede ser aprovechada para construir sus gráficas cuando se conocen o son dadas las gráficas de las relaciones directas.



EJEMPLO 1. Construir la gráfica de la relación R y su inversa, si:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 5y + 11 = 0, x \in [-4, 1]\}.$$

Solución. (1) Siendo la gráfica de R una línea recta, determinemos dos puntos de ésta en $x \in [-4, 1]$

$$\text{Si } x = -4 \rightarrow -16 - 5y + 11 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow A(-4, -1)$$

$$x = 1 \rightarrow 4 - 5y + 11 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow B(1, 3)$$

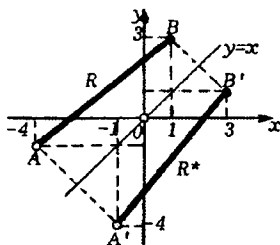
(2) Trazamos el segmento de la recta L :

$$4x - 5y + 11 = 0, \text{ uniendo los puntos } A \text{ y } B.$$

(3) Si $A(-4, -1) \in R \rightarrow A'(-1, -4) \notin R^*$

$$B(1, 3) \in R \rightarrow B'(3, 1) \in R^*$$

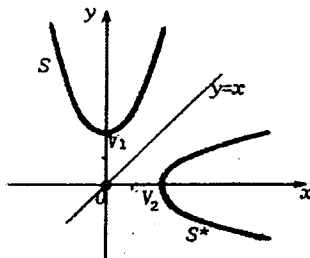
(4) Uniendo A' y B' obtenemos la gráfica de R^*



EJEMPLO 2. Si $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2\}$, construir la gráfica de la relación S y su inversa.

Solución. La gráfica de la relación S es la parábola $P: y = x^2 + 2$, cuya ecuación es de la forma: $y = (x-h)^2 + k$, de eje vertical ($h=0$) y vértice en $V_1(0, 2)$

La gráfica de la relación inversa S^* es la parábola $P^*: x = y^2 + 2$, ecuación de la forma: $x = (y-k)^2 + h$, con eje horizontal ($k=0$) y vértice en $V_2(2, 0)$.



EJEMPLO 3. Construir la gráfica de la relación S y su inversa, si:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y + 6 \leq 0\}.$$

Solución. (1) $2x - 3y + 6 \leq 0 \rightarrow y \geq \frac{2x}{3} + 2$

(2) Sea $L: 2x - 3y + 6 = 0$

Intersectando L con los ejes coordenados se tiene: si $x=0 \rightarrow -3y+6=0 \leftrightarrow y=2 \rightarrow A(0,2)$

$$y=0 \rightarrow 2x+6=0 \leftrightarrow x=-3 \rightarrow B(-3,0)$$

(3) Trazamos la recta L que pasa por A y B .

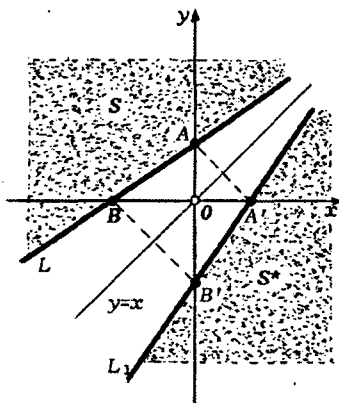
Según (1) la gráfica de S es el conjunto de puntos en el semiplano superior y sobre L .

(4) La relación inversa de S es el conjunto:

$$S^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y-3x+6 \leq 0\}$$

$$\text{Si } 2y-3x+6 \leq 0 \rightarrow y \leq 3x/2 - 2$$

(5) Luego, la gráfica de S^* es la totalidad de puntos que están en el semiplano inferior y sobre la recta $L_1: 2y-3x+6=0$ que pasa por $A'(2,0)$ y $B'(0,-3)$, simétricos de A y B respecto de la recta $y=x$.



EJEMPLO 4. Indicar el dominio, rango y trazar la gráfica de la relación inversa de R , si $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y-1, y \leq x+3, 1 \leq x \leq 3\}$.

Solución. (1) Sea $R_1: |x| \leq y-1 \leftrightarrow (y-1 \geq 0) \wedge (x \leq y-1 \wedge x \geq 1-y) \leftrightarrow (y \geq 1) \wedge (y \geq x+1 \wedge y \geq 1-x)$

Si $L_1: y=x+1$ y $L_2: y=1-x$, la gráfica de R_1 es la totalidad de puntos comunes que están en el semiplano superior de las rectas L_1 y L_2 arriba de $y=1$.

(2) $R_2: y \leq x+3$

La gráfica de R_2 es el conjunto de puntos en el semiplano inferior y sobre la recta $L_3: y=x+3$.

(3) $R_3: 1 \leq x \leq 3$

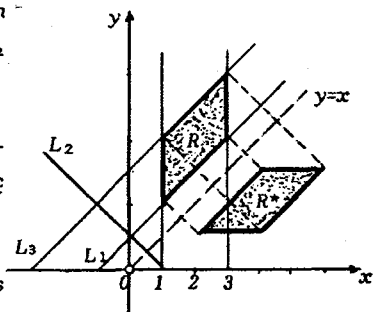
La gráfica de R_3 es la región entre dos rectas verticales $x=1$ y $x=3$.

(4) Luego, $\text{Graf}(R) = \text{Graf}(R_1) \cap \text{Graf}(R_2) \cap \text{Graf}(R_3) = \text{Región sombreada}$

Obsérvese que es un paralelogramo.

(5) Por lo tanto, los vértices del paralelogramo R^* se obtienen de los de R por simetría respecto de la recta $y=x$, tal como se indica en la figura.

(6) $\text{Dom}(R^*) = [2,6]$ y $\text{Ran}(R^*) = [1,3]$



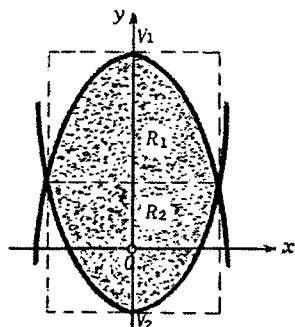
(3) Como las coordenadas del origen satisface a ambas desigualdades, la gráfica de la relación R es el conjunto de puntos en el interior de ambas parábolas.

(4) $\text{Dom}(R) = [-2, 2]$, $\text{Ran}(R) = [-2, 2]$

(5) El área de un sector parabólico es igual a $2/3$ del área del rectángulo que subyace de dicho sector.

$$\rightarrow a(R_1) = a(R_2) = \frac{2}{3}(4 \times 4) = \frac{32}{3}$$

$$\therefore a(R) = a(R_1) + a(R_2) = \frac{64}{3} u^2$$



EJERCICIO 4. Sean las relaciones: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 4\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 8\}$. Hallar el área de $R_1 \cap R_2$.

Solución. (1) La gráfica de R_1 es el conjunto de puntos en el interior del cuadrado de diagonal $2(4)=8$

y lado $4\sqrt{2} \rightarrow a(R_1) = (4\sqrt{2})^2 = 32u^2$

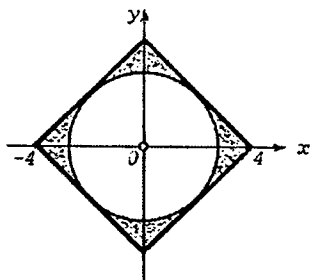
(2) Es $(0, 0) \in R_2$?

$$\rightarrow 0^2 + 0^2 \geq 8 \rightarrow 0 \geq 8, \text{ es falso}$$

Luego, la gráfica de R_2 es el conjunto de puntos que están fuera y sobre la circunferencia $C: x^2 + y^2 = 8$, cuyo círculo tiene por área:

$$a(C) = \pi r^2 = 8\pi u^2$$

$$(3) \therefore a(R_1 \cap R_2) = a(R_1) - a(C) = 8(4 - \pi)u^2$$



EJERCICIO 5. Dadas las relaciones: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 20 \leq 0\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-2| + |y+1| \geq 3\}$, hallar el área acotada por $R_1 \cap R_2$.

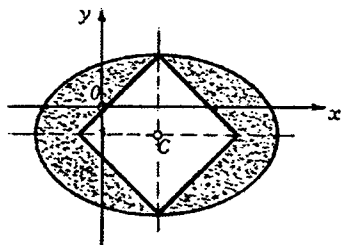
Solución. (1) Sea $E: x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 20 = 0$

$$\rightarrow E: \frac{(x-2)^2}{27} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$\rightarrow a^2 = 27 \rightarrow a = 3\sqrt{3}, \quad b^2 = 9 \rightarrow b = 3; \quad C(2, -1)$$

(2) La gráfica de R_1 es la totalidad de puntos en el interior y sobre la elipse E .
Área de la elipse = $\pi ab \rightarrow a(R_1) = 9\pi\sqrt{3}u^2$

(3) La gráfica de $|x-2| + |y+1| = 3$ es un cuadrado de lado $3\sqrt{2}$ y centro $C(2, -1)$, el mismo de la elipse. Entonces la grá



fica de R_2 es la totalidad de puntos en el exterior y el borde del cuadrado

$$(4) \therefore a(R_1 \cap R_2) = a(R_1) - a(R_2) = 9\pi\sqrt{3} - (3\sqrt{2})^2 = 9(\pi\sqrt{3} - 2) u^2$$

EJERCICIO 6. Hallar el área de intersección acotada por las gráficas de las relaciones: $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| - |y| \leq 2\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$.

Solución. (1) Construimos el cuadrado de diagonal 4, con trazo punteado.

La gráfica de $|x| - |y| = 2$ se obtiene prolongando los lados de este cuadrado, cuyos vértices están sobre el eje X.

(2) Como $(0, 0) \in R_1$, la totalidad de puntos de R_1 están en la región donde se encuentra el origen de coordenadas.

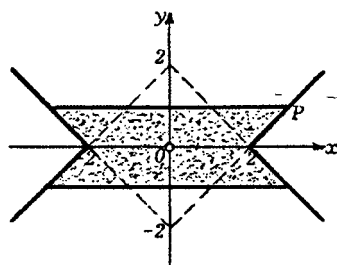
(3) La gráfica de $|y| \leq 1 \iff -1 \leq y \leq 1$ es la región entre las rectas horizontales: $y = -1$, $y = 1$

(4) En (1), si $x \geq 0$, $y \geq 0 \rightarrow x - y = 2$

$$\text{Luego: } (y=1) \cap (x-y=2) = P(3, 1)$$

(5) $R_1 \cap R_2$ es la zona sombreada de la figura

$$\begin{aligned} \rightarrow a(R_1 \cap R_2) &= 2(\text{área del trapecio de bases 4 y 6, y altura 1}) \\ &= 2\left(\frac{4+6}{2}\right)(1) = 10 u^2 \end{aligned}$$

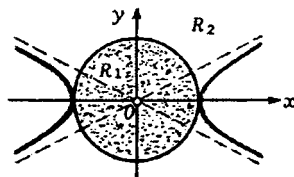


EJERCICIO 7. Si $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y^2 \leq 9\}$,

$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+3| \leq y\}$, $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-3| \leq y\}$, hallar el área de $S = (R_1 \cap R_2) - (R_3 \cup R_4)$.

Solución. (1) Como las coordenadas del origen satisfacen a R_1 y R_2 , entonces:

$\text{Graf}(R_1 \cap R_2) = \text{Graf}(R_1)$, conjunto de puntos en el interior y sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

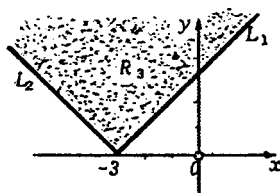


(2) En R_3 : $|x+3| \leq y$

$$\rightarrow y \geq 0 \wedge (x+3 \leq y \wedge x+3 \geq -y)$$

$$\rightarrow y \geq 0 \wedge (y \geq x+3 \wedge y \geq -x-3)$$

Luego, la gráfica de R_3 es el conjunto de puntos en el semiplano superior y sobre las rectas $L_1: y = x+3$, $L_2: y = -x-3$, y el eje X ($y \geq 0$)



(3) En R_4 : $|x-3| \leq y$

$$\leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (x-3 \leq y \wedge x-3 \geq -y)$$

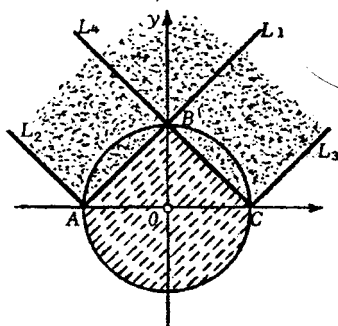
$$\leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (y \geq x-3 \wedge y \geq 3-x)$$

L gráfica de R_4 es el conjunto de puntos en el semiplano superior de las rectas

$L_2: y=x-3$, $L_3: y=3-x$, el eje X ($y \geq 0$)

(4) Por lo tanto, el $a(R_1 \cap R_2 \cup R_4)$ es la región rayada y es igual al área del semicírculo de radio 3 más el área del triángulo ABC.

$$\text{Esto es: } a(S) = \frac{1}{2}(\pi)(3)^2 + \frac{1}{2}(6 \times 3) = \frac{9}{2}(\pi+2)u^2$$



EJERCICIO 8. Dadas las relaciones: $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 8x\}$ y $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x - 12 \leq 0\}$, hallar el área acotada por $R_1 \cap R_2$.

Solución. (1) En R_1 : $y^2 \leq 8x$

La gráfica de R_1 es el conjunto de puntos en el interior de la parábola $P: y^2 = 8x$

(2) En R_2 , sea $C: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$

$$\leftrightarrow C: (x-2)^2 + (y-0)^2 = 16$$

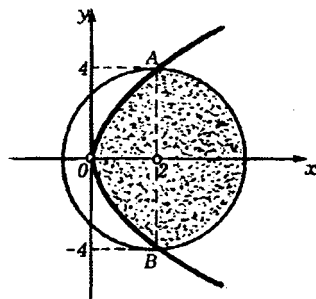
$$\rightarrow C(2,0) \text{ y } r=4$$

Como $(0,0) \in C$ y la gráfica de R_2 es el conjunto de puntos en el interior y sobre la circunferencia C .

(3) $P \cap C = A(2,4)$ y $B(2,-4)$

(4) $a(R_1 \cap R_2) = (\text{área del semicírculo}) + (\text{área del sector parabólico AOB})$

$$= \frac{1}{2}(\pi)(4)^2 + \frac{2}{3}(2 \times 8) = \frac{8}{3}(3\pi+4) u^2$$



EJERCICIO 9. Dada la relación $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x+1| + |x-1|, y \leq 4\}$, construir y hallar el área de la inversa de la relación R .

Solución. (1) Sea $R_1: y \geq |x+1| + |x-1|$

Eliminando las barras de valor absoluto por el método de los valores críticos se determina lo siguiente:

$$\text{Si: } x < -1 \rightarrow y \geq -2x$$

$$-1 \leq x < 1 \rightarrow y \geq 2$$

$$x \geq 1 \rightarrow y \geq 2x$$

Luego, la gráfica de R_1 es el conjunto de los puntos que están en el semiplano superior de las rectas $L_1: y=-2x$, $L_2: y=2$, $L_3: y=2x$

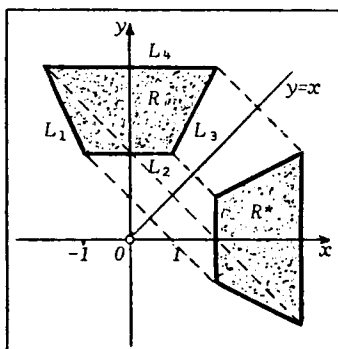
(2) Sea $R_2: y \leq 4$. Su gráfica consta de todos los puntos en el semiplano inferior de la recta $y=4$.

(3) Entonces $\text{Graf}(R) = \text{Graf}(R_1) \cap \text{Graf}(R_2)$

→ $\text{Graf}(R)$ = área del trapecio de la figura

(4) La gráfica de R^* se obtiene de la gráfica de R por simetría respecto de la recta $y=x$

$$\rightarrow a(R^*) = \frac{1}{2}(4+2)(2) = 6u^2$$



EJERCICIO 10. Dada la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y-x| = \lfloor x \rfloor\}$, esbozar su gráfica indicando su dominio y rango.

Solución. Según el Teorema 49:

$$\begin{aligned} |y-x| = \lfloor x \rfloor &\leftrightarrow (\lfloor x \rfloor \geq 0) \wedge (y-x = \lfloor x \rfloor \vee y-x = -\lfloor x \rfloor) \\ &\leftrightarrow (\lfloor x \rfloor \geq 0) \wedge (y = x + \lfloor x \rfloor \vee y = x - \lfloor x \rfloor) \end{aligned}$$

Universo de la relación: $\lfloor x \rfloor \geq 0 \leftrightarrow x \geq 0 \rightarrow \text{Dom}(R) = \{0, +\infty\}$

Por el T.57, si $\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$

Luego, la gráfica de R es la unión de las gráficas de:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\} \text{ o } R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - n\}$$

Dando valores a n en cada intervalo $[n, n+1)$, se tiene:

Para: $y = x + n$

$$\text{Si } n=0 \rightarrow x \in [0, 1) \rightarrow y=x$$

$$n=1 \rightarrow x \in [1, 2) \rightarrow y=x+1$$

$$n=2 \rightarrow x \in [2, 3) \rightarrow y=x+2$$

$$n=3 \rightarrow x \in [3, 4) \rightarrow y=x+3$$

$$\text{Ran}(R_1) = [0, 1) \cup [2, 3) \cup [4, 5) \cup \dots$$

Para: $y = x - n$

$$\text{Si } n=0 \rightarrow x \in [0, 1) \rightarrow y=x$$

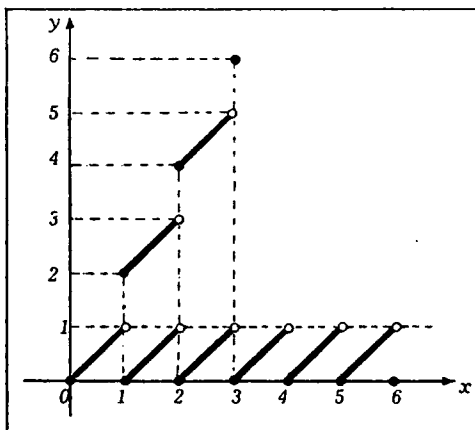
$$n=1 \rightarrow x \in [1, 2) \rightarrow y=x-1$$

$$n=2 \rightarrow x \in [2, 3) \rightarrow y=x-2$$

$$n=3 \rightarrow x \in [3, 4) \rightarrow y=x-3$$

$$n=4 \rightarrow x \in [4, 5) \rightarrow y=x-4$$

Note que $\text{Ran}(R_2) = [0, 1)$



$$\text{Ran}(R) = \text{Ran}(R_1) \cup \text{Ran}(R_2) = [0, 1) \cup [2, 3) \cup [4, 5) \cup \dots = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1)$$

EJERCICIOS: Grupo 33

En los ejercicios del 1 al 9, indicar el dominio, rango y esbozar la gráfica de la región acotada por las siguientes relaciones:

1. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25, x^2 > 2y + 1\}$
5. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 8 \leq y, x + 4 > y\}$
2. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 \leq 25, 3x + 1 \leq 2y\}$
6. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 4x, 2x + y \leq 4\}$
3. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 - 6x + 5, 2x + y < 5\}$
7. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 3, y \leq -x^2 - 3x + 6\}$
4. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \leq 1, x^2 \geq -2y, x^2 + y^2 \leq 25\}$
8. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - x| + |y + x| \leq 2\}$
9. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lfloor x - 1 \rfloor^2 + 2 \lfloor x \rfloor \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}$
10. Si $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$, $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$. Hallar el área acotada por $R_1 \cap R_2 \cap R_3$.
11. Dada la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq a, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$, donde $a \in \mathbb{R}^+$ hallar el valor de a de modo que el área acotada por la gráfica de R sea $25(\pi - 2) u^2$.
12. Dadas las relaciones $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25, y \leq 2y\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 9 \leq 0, y^2 - 4 \leq 0\}$, hallar el área acotada por la gráfica de $R_1 \cap R_2$.

En cada uno de los ejercicios del 13 al 22, contruir la gráfica de las relaciones dadas.

13. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq |x + y| + |x - 1|, |x| \leq |2y|\}$
14. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4 \text{ o } (x - 2)^2 + y^2 \leq 1 \text{ y } x \geq y\}$
15. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, |x| + 2 \leq y \leq |x| + 3\}$
16. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 8x - 2y \geq 15, (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 25\}$
17. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 9, x + y + 3 \leq 0, y^2 \leq 2x\}$
18. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \leq 9, |x| + |y| \geq 2\}$
19. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y^2 - x^2 \leq 2, x^2 \leq 16y\}$
20. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - 2y - 2 \leq 0, 2x + y - 11 \geq 0\}$
21. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 4y^2 \leq 9, 2y^2 - 2x - 3 \leq 0\}$
22. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 4, y^2 + x - 2 \geq 0, y^2 - 2 \leq x\}$
23. Sean $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 4| + |y - 3| \leq 2\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 4| \leq 1\}$, $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - 3| \leq 1\}$. Hallar el área acotada por $R \cap S \cap T$.

24. Dadas las relaciones $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 8\}$, $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Hallar el área de la región acotada por $R \cap S \cap T$.
25. Sean: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5\pi)^2 + (y-5\pi)^2 \leq 25\pi^2\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 5\pi\}$, $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x+5\pi) \vee (y+x \geq 15\pi)\}$. Hallar el área de $R \cap (S \cup T)$.
26. Sean $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+2| - |y-3| \geq 4\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+2| \leq 6\}$, $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y-3| \leq 6\}$. Hallar el área acotada por la gráfica de $R \cap S \cap T$.
27. Si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 4\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| + |x-y| \geq 4\sqrt{2}\}$, hallar el área de la región acotada por la gráfica de $S \cap T$.

En cada uno de los ejercicios del 28 al 35, graficar y hallar el área de la región acotada por las siguientes relaciones.

28. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq |y|, x^2 + y^2 \leq 9, |x| + |y| \geq 3\}$
29. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + y^2 \leq 27, |x| + |y| \geq 3, x \geq y\}$
30. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 4x - 9y - 43 \leq 0, 4x^2 + 8x + 9y - 5 \leq 0\}$
31. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 \leq 0, |x+1| + |y-2| \geq 2, x-y+3 \geq 0\}$
32. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y-x| \leq 12\}$
33. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |1-2x|\}$
34. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2|x| + 3|y| \leq 6\}$
35. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|, x^2 + y^2 \leq 4x\}$
36. Construir la gráfica de las siguientes relaciones:
- a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lfloor x+y \rfloor + y = 0\}$
- b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lfloor 4x^2 - y^2 \rfloor = 0\}$
- c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2\}$
- d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y^2 - 2y| + 2|x-1| \leq x\}$

En los ejercicios siguientes, graficar en un mismo plano la relación R dada y su inversa. Hallar el área acotada por R^* .

37. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x| + |x-1|, y \leq 5\}$
38. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+1| - |y-3| \geq 4, 2 \leq y \leq 4\}$
39. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 \leq 0, x - 2y + 8 \leq 0\}$
40. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x-2, x \leq 6\}$
41. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 \geq 0, |x-4| + |y+1| \leq 4, x-y \geq 5\}$



5.3.9 CRITERIOS GENERALES PARA GRAFICAR UNA RELACION

Al hacer el estudio de la gráfica de una relación de R en R , habíamos visto las gráficas de relaciones lineales y cuadráticas y sus asociadas con inequaciones. Todas ellas tenían una forma especial que las caracterizaba y que resultaba fácil su trazado en el plano XY . Sin embargo, existen otras relaciones cuyas gráficas no tienen tales características y que para su trazado es necesario seguir ciertos pasos o reglas. En seguida veremos algunos métodos que permiten estudiar los pasos previos a la discusión y trazado de la gráfica de dichas relaciones.

I) COORDENADAS AL ORIGEN (Interceptos con los ejes coordenados)

Una gráfica puede tener una, varias o ninguna coordenada al origen. El método de averiguarlo es el siguiente:

a) Interceptos con el eje X :

Hacemos $y=0$, y se resuelve la ecuación $E(x,0)=0$

b) Interceptos con el eje Y :

Hacemos $x=0$, y se resuelve la ecuación $E(0,y)=0$

Ejemplo. Dada la relación $R=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2+2xy-x+5y-6=0\}$, hallar sus coordenadas al origen de su gráfica.

Solución. Sea $E(x,y):x^2+y^2+2xy-x+5y-6=0$

a) Para $y=0 \rightarrow E(x,0): x^2-x-6=0 \leftrightarrow x=-2$ o $x=3$

Luego, -2 y 3 son las abscisas al origen y los puntos $A(-2,0)$ y $B(3,0)$ son los interceptos de la gráfica de R con el eje X .

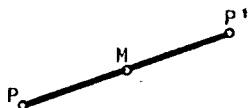
b) Para $x=0 \rightarrow E(0,y): y^2+5y-6=0 \leftrightarrow y=-6$ o $y=1$

Luego, -6 y 1 son las ordenadas al origen y los puntos $C(0,-6)$ y $D(0,1)$ son los interceptos de la gráfica de R con el eje Y .

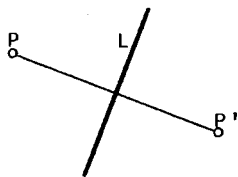
II) SIMETRÍAS

Se consideran solo dos tipos de simetría: respecto a un punto y respecto a una recta.

Definición 5.3 Se dice que dos puntos P y P' están localizados simétricamente con respecto a un tercer punto $M \leftrightarrow M$ es el punto medio del segmento que los une. En ese caso, M es un centro de simetría del segmento PP' .



Definición 5.4 Se dice que dos puntos P y P' están localizados simétricamente con respecto a una recta $L \leftrightarrow L$ es la mediatriz del segmento que los une. (Al punto P' se le denomina reflexión o imagen de P respecto a la recta L , a la cual se le llama eje de simetría).



Veamos en seguida el uso de estas definiciones en la simetría de gráficas de ecuaciones.

a) Simetría respecto al eje X

Si un conjunto R es simétrico respecto al eje X , entonces, para cada punto $P(x,y) \in R$ debe haber un punto correspondiente $P'(x,-y) \in R$, es decir, si R tiene por ecuación $E(x,y)=0$, entonces R será simétrico respecto al eje X si y sólo si:

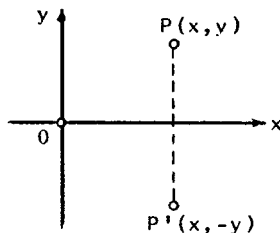
$$E(x,y) = \pm E(x,-y)$$

(La ecuación no cambia si se reemplaza y por $-y$)

Por ejemplo, para la relación $R = \{(x,y) \in R^2 \mid y^2 - 4x = 0\}$, sea $E(x,y): y^2 - 4x = 0$

Entonces: $E(x,-y): (-y)^2 - 4x = 0 \leftrightarrow E(x,y): y^2 - 4x = 0$

Como vemos: $E(x,y) = E(x,-y)$, entonces, R es simétrica respecto al eje X .



b) Simetría respecto al eje Y

Si un conjunto R es simétrico respecto del eje Y , entonces, para cada punto $P(x,y) \in R$ debe haber un punto correspondiente $P'(-x,y) \in R$, es decir, si R tiene por ecuación $E(x,y)=0$, entonces R será simétrica respecto del eje Y , si y sólo si:

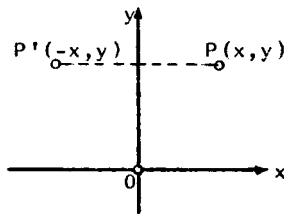
$$E(x,y) = \pm E(-x,y)$$

(La ecuación no cambia si se reemplaza x por $-x$)

Por ejemplo, para la relación $R = \{(x,y) \in R^2 \mid y^3 + 8x^2 = 0\}$, sea $E(x,y): y^3 + 8x^2 = 0$

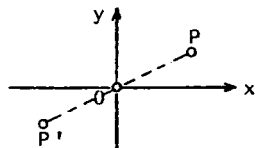
Entonces: $E(-x,y): y^3 + (-x)^2 = 0 \leftrightarrow E(x,y): y^3 + 8x^2 = 0$

Como $E(x,y) = E(-x,y)$, la gráfica de R es simétrica respecto del eje Y .



c) Simetría respecto del origen

Los puntos $P(x,y)$ y $P'(-x,-y)$ son simétricos respecto del origen, por tanto, si para un conjunto R ocurre que: $P(x,y) \in R \leftrightarrow P'(-x,-y) \in R$



entonces se dice que el conjunto R tiene su centro de simetría el origen, es decir, si R tiene por ecuación $E(x,y)=0$, entonces:

$$E(x,y) = \pm E(-x,-y)$$

(La ecuación no cambia si se sustituyen simultáneamente x por -x e y por -y)

Por ejemplo, para la relación: $R=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$, sea $E(x,y):x^2+y^2=4$

Entonces: $E(-x,-y): (-x)^2+(-y)^2=4 \leftrightarrow E(-x,-y):x^2+y^2=4$

Vemos que: $E(x,y)=E(-x,-y)$, por lo tanto, la gráfica de R es simétrica respecto al origen.

III) EXTENSION

Para determinar donde se localiza la gráfica de una relación, se recurre a lo siguiente:

a) Despejar, si es posible, cualquiera de las dos variables:

$y = f(x)$ (Para calcular el dominio de la relación)

$x = g(y)$ (Para determinar el rango de la relación)

b) Si la ecuación de la relación tiene la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

donde P(x) y Q(x) son polinomios que no tengan factores comunes que contengan a x, tratar de factorizar el denominador y excluir aquellos valores de x para los cuales $Q(x)=0$

c) Si la ecuación de la relación tiene la forma:

$$y^2 = \text{función racional}$$

tratar de factorizar el segundo miembro y mediante inecuaciones determinar los intervalos o regiones del plano en los cuales $y^2 \geq 0$, y excluir los valores de x para los cuales $y^2 < 0$.

Ejemplo. Discutir la extensión de la gráfica de la relación:

$$R=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2+9y^2=36\}.$$

Solución. Despejando $y=f(x)$, se tiene: $y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$

$$\rightarrow \exists y \leftrightarrow 9-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 9 \rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Entonces: $\text{Dom}(R)=[-3,3]$

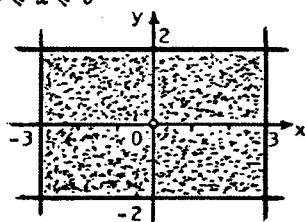
Valores excluidos: $\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$

La gráfica de la relación R está contenida entre las rectas verticales $x=-3$ y $x=3$

Análogamente: $x = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$

$$\exists x \leftrightarrow 4-y^2 \geq 0 \rightarrow y^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

Luego, $\text{Ran}(R)=[-2,2]$. Valores excluidos: $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$



La gráfica de R está contenida entre las rectas horizontales $y=-2$, $y=2$. Luego, se sombrea el rectángulo que determina la extensión de la curva en el plano. Dado que la curva está encerrada en un rectángulo de dimensiones finitas, se trata de un caso de gráfica acotada.

ASINTOTAS (IV)

Si para una curva C existe una recta L tal que si nos movemos a lo largo de L indefinidamente, la distancia entre L y C tiende a cero, entonces se dice que L es una recta **asíntota**, o que C es **asintótica** a L .

Una curva puede tener una, varias o ninguna asíntota. Entre las clases de g asíntotas figuran las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

a) **Asíntotas Horizontales.** Tienen la forma: $y=k$

Para hallar las asíntotas horizontales de una curva se ordena su ecuación $E(x,y)=0$ en potencias decrecientes de x y se hace cero, si es posible, el coeficiente de la mayor potencia de x , luego se despeja y .

Ejemplo. Hallar las asíntotas horizontales de la gráfica de la relación $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2y^2+xy^2-x^2-1=0\}$.

Solución. Ordenando en potencias decrecientes de x se tiene:

$$E(x,y): (y^2-1)x^2+xy^2-1=0$$

Aquí vemos que la mayor potencia de x es x^2 , y su coeficiente es y^2-1 .

Luego, si $y^2-1=0 \leftrightarrow y=-1$ o $y=1$ son las asíntotas horizontales de la gráfica de R .

b) **Asíntotas Verticales.** Tienen la forma: $x=h$

Para hallar las asíntotas verticales de una curva de ecuación $E(x,y)=0$, se ordena ésta en potencias decrecientes de y , se hace cero, si es posible el coeficiente de la mayor potencia de y , luego se despeja x .

Ejemplo. Hallar las asíntotas de la gráfica de la relación

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2y-xy-2y-1=0\}.$$

Solución. Ordenando se tiene: $(x^2-x-2)y-1=0$

Aquí el coeficiente de la mayor potencia de y es: x^2-x-2 . Luego, si $x^2-x-2=0 \leftrightarrow x=-1$ o $x=2$ son las asíntotas verticales de la curva.

V) **TABULACION (Trazado de la Curva).** Consiste en calcular un número adecuado de puntos para obtener una gráfica aproximada de la ecuación dada.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJEMPLO 1. Discutir y graficar la relación: $R = \{(x, y) \in R^2 \mid xy - 2x - y - 2 = 0\}$

Solución. Sea $E(x, y): xy - 2x - y - 2 = 0$

I) Intersecciones con los ejes coordenados:

a) Con el eje X . $E(x, 0): -2x - 2 = 0 \leftrightarrow x = -1 \rightarrow A(-1, 0)$

b) Con el eje Y . $E(0, y): -y - 2 = 0 \leftrightarrow y = -2 \rightarrow B(0, -2)$

II) Simetría: Dado que la ecuación no tiene potencias pares de x e y , la curva no es simétrica respecto de los ejes coordenados.

III) Extensión. a) $y = f(x) \rightarrow y = \frac{2x+2}{x-1}$

Valor excluido: $x=1 \rightarrow \text{Dom}(R) = R - \{1\}$

b) $x = g(y) \rightarrow x = \frac{y+2}{y-2}$. Valor excluido: $y=2 \rightarrow \text{Ran}(R) = R - \{2\}$

IV) Asíntotas. a) Asíntotas Horizontales:

$$(y-2)x - y - 2 = 0 \rightarrow y - 2 = 0 \leftrightarrow y = 2$$

b) Asíntotas verticales: $(x-1)y - 2x - 2 = 0$

$$\rightarrow x - 1 = 0 \leftrightarrow x = 1$$

V) Construcción de la gráfica.

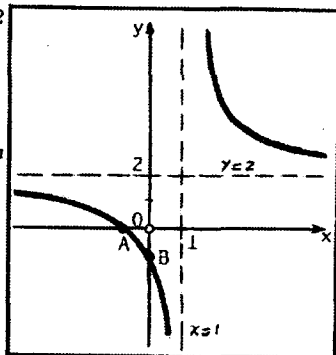
a) Si existen, se trazan las líneas de guía (Asíntotas). $x=1$, $y=2$

b) Se ubican los interceptos con los ejes X e Y . $A(-1, 0)$ y $B(0, -2)$

c) De $y = f(x)$, se analizan los intervalos para los cuales y es positivo o negativo.

En IIIa): $y > 0$, para: $x > 1$ y $x < -1$

$y < 0$, para $-1 < x < 1$



EJEMPLO 2. Discutir y graficar: $R = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2y - 9y - 3x^2 = 0\}$

Solución. Sea $E(x, y): x^2y - 9y - 3x^2 = 0$

I) Intersecciones con los ejes coordenados

a) Con el eje X . $E(x, 0): -3x^2 = 0 \rightarrow x=0$

b) Con el eje Y . $E(0, y): -9y = 0 \rightarrow y=0$

No hay interceptos con los ejes coordenados, la curva pasa por el origen

II) Simetría. a) Con el eje X : $E(x, -y) = x^2(-y) - 9(-y) - 3x^2 = -x^2y + 9y - 3x^2 = 0$
 $\rightarrow E(x, -y) \neq E(x, y) \therefore$ No es simétrica

b) Con el eje Y: $E(-x, y) = (-x)^2 y - 9y - 3(-x)^2 + x^2 y - 9y - 3x^2 = 0$

$\rightarrow E(x, -y) = E(x, y) \therefore$ Si es simétrica

c) Con el origen: $E(-x, -y) = (-x)^2(-y) - 9(-y) - 3(-x)^2 + -x^2 y + 9y - 3x^2 = 0$

$\rightarrow E(-x, -y) \neq E(x, y) \therefore$ No es simétrica

III) Extensión. a) $y=f(x) \rightarrow y = \frac{3x}{(x+3)(x-3)}$

Valores excluidos: $x=-3, x=3 \rightarrow \text{Dom}(R)=R-\{-3, 3\}$

b) $x=g(y) \rightarrow x = \pm 3 \sqrt{\frac{y}{y-3}} \rightarrow \pm x \rightarrow \frac{y}{y-3} \geq 0 \rightarrow (y \leq 0) \vee (y > 3)$

Entonces: $\text{Ran}(R) = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$

IV) Asíntotas. a) Asíntotas Horizontales

$$(y-3)x^2 - 9y = 0 \rightarrow y-3=0 \rightarrow y=3$$

b) Asíntotas Verticales.

$$(x^2-9)y - 3x = 0 \rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x=\pm 3$$

V) Construcción de la curva.

a) Trazamos las asíntotas: $x=\pm 3, y=3$

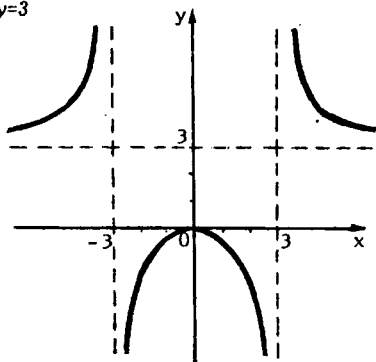
b) La curva pasa por el origen simétricamente respecto del eje Y.

c) En IIIa): Para $x \in \langle -3, 3 \rangle, y \leq 0$

La curva se extiende hacia abajo.

Para $x < -3$ o $x > 3, y > 3$

La curva se extiende asintóticamente.



EJEMPLO 3. Discutir y graficar: $R=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0\}$

Solución. Sea $E(x,y): x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0$

I) Intersecciones con los ejes coordenados

Dado que la ecuación carece de término independiente, la curva pasa por el origen (No hay interceptos con los ejes).

II) Simetría. a) Con el eje X: $E(x, -y) = x^3 + x(-y)^2 - 2(-y)^2 = x^3 + xy^2 - 2y^2$

$\rightarrow E(x, -y) = E(x, y) \therefore$ Si es simétrica

b) Con el eje Y. Comprobar que: $E(-x, y) \neq E(x, y) \therefore$ No es simétrica.

c) Con el origen. Comprobar que: $E(-x, -y) \neq E(x, y) \therefore$ No es simétrica

III) Extensión. a) $y=f(x) \rightarrow y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

$$\rightarrow \exists y \rightarrow \frac{x}{2-x} \geq 0 \rightarrow 0 \leq x < 2 \rightarrow \text{Dom}(R) = [0, 2)$$

IV) Asíntotas. a) Asíntotas Horizontales: La curva no tiene asíntotas horizontales porque el coeficiente de x^3 es constante.

b) Asíntotas Verticales:

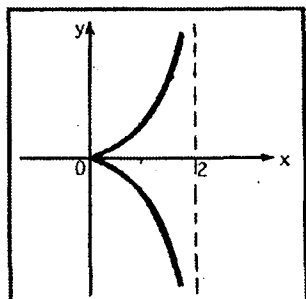
$$(x-2)y^2+x^2=0 \rightarrow x-2=0 \leftrightarrow x=2$$

V) Construcción de la curva:

a) Trazamos la asíntota $x=2$

b) La curva pasa por el origen.

c) Para $x \in [0, 2)$, la curva se extiende simétricamente y asintóticamente hacia la línea $x=2$.



EJEMPLO 4. Discutir y graficar: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy^2 - x - 2y^2 + 1 = 0\}$

Solución. Sea $E(x, y) = xy^2 - x - 2y^2 + 1$

I) Intersecciones con los ejes coordenados

a) Con el eje X. $E(x, 0) : -x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow A(1, 0)$

b) Con el eje Y. $E(0, y) : -2y^2 + 1 = 0 \rightarrow y = \pm \sqrt{2}/2 \rightarrow B(0, \sqrt{2}/2), C(0, -\sqrt{2}/2)$

II) Simetrías. a) Con el eje X: $E(x, -y) = x(-y)^2 - x - 2(-y)^2 + 1 = xy^2 - x - 2y^2 + 1 = E(x, y) \therefore$ Es simétrica

b) Con el eje Y. Comprobar que $E(-x, y) \neq E(x, y) \therefore$ No es simétrica

c) Con el origen. Comprobar que $E(-x, -y) \neq E(x, y) \therefore$ No es simétrica

III) Extensión. a) $y = f(x) \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

$$\rightarrow xy \rightarrow \frac{x-1}{x-2} > 0 \leftrightarrow x < 1 \text{ o } x > 2 \rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$$

b) $x = g(y) \rightarrow x = \frac{2y^2-1}{y^2-1} \rightarrow xy \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow \text{Ran}(R) = R - \{-1, 1\}$

IV) Asíntotas. a) Asíntotas Horizontales:

$$(y^2-1)x - 2y^2 + 1 = 0 \rightarrow y^2-1=0 \leftrightarrow y = \pm 1$$

b) Asíntotas Verticales:

$$(x-2)y^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x-2=0 \leftrightarrow x=2$$

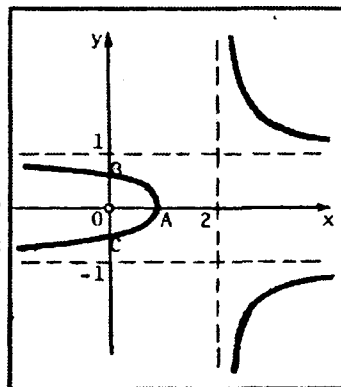
Construcción de la curva.

a) Trazamos las asíntotas: $x=2$, $y=\pm 1$

b) Ubicamos los interceptos: A, B y C.

c) En IIIa): Para $x \in (-\infty, 1]$, la curva pasa por A, B y C, y se extiende simétrica y asintóticamente hacia las rectas $y = \pm 1$.

Para $x \in (2, +\infty)$, la curva se extiende simétrica y asintóticamente hacia las rectas $x=2$, $y = \pm 1$



EJEMPLO 5. Construir la gráfica de $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0\}$

Solución. Factorizando se tiene: $E(x, y) = (x+y)(x-y)(x^2+y^2-4x)$

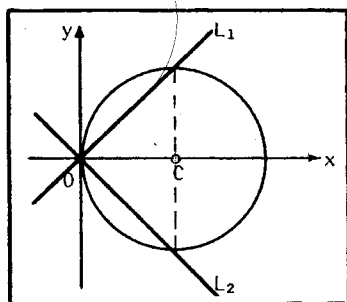
$$\text{Si } E(x, y) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 & (R_1) \\ x - y = 0 & (R_2) \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 & (R_3) \end{cases}$$

Las gráficas de R_1 y R_2 son las rectas que pasan por el origen, $L_1: x+y=0$ y $L_2: x-y=0$, respectivamente.

$$R_3: x^2 + y^2 - 4x = 0 \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 4$$

Es una circunferencia de centro $C(2, 0)$ y $r=2$

$$\therefore \text{Graf}(R) = \text{Graf}(R_1) \cup \text{Graf}(R_2) \cup \text{Graf}(R_3)$$



Nota. Cuando se trata de graficar relaciones de ecuaciones factorizables, no es necesario discutir lo relacionado a interceptos, simetría, etc, dado que, por lo general, las gráficas son rectas o curvas de características ya conocidas.

EJERCICIOS: Grupo 34

Discutir y graficar las siguientes relaciones:

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + 3y - x + 2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - 4y + 3 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y - 9y - 2x^2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y - y - x^2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y - 3xy - 6 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y - 12 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y + y - 2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 - 4x^2 - y = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x+3)(x-2)\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy^2 - y^2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 3x - 10)y = 2x + 1\}$

Construir las gráficas de las siguientes relaciones:

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 - x^2y + xy^2 - 9x + 9y = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 9x^2 - 12x + 4\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 + xy^2 - 4xy - 4x^2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - x^2y - xy + y^2 = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x = 4\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^4 + y^2 - x^2 - x = 0\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 - xy^2 - xy + x^2 = 0\}$



5.4 FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

En el Capítulo 3, Sección 3.9, habíamos estudiado a las funciones de una forma muy general sin fijarnos en la naturaleza de los objetos que lo forman, pero dado que nuestro interés está dirigido al análisis, nos interesan aquellas funciones cuyos pares ordenados están formados por números reales. Esto es, nos referimos a las funciones del tipo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a las cuales llamaremos **funciones reales de variable real** y denotaremos:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$$

o bien:

$$f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom}(f)\}$$

Según esta notación, si $f(x)$ es una función de x y $a \in \text{Dom}(f)$, la expresión $f(a)$ significa la imagen de a o el valor numérico obtenido por $f(x)$ al sustituir x por a . Por esta razón siempre se define una función mediante una regla que permite calcular para cualquier $x \in \text{Dom}(f)$, su imagen $y = f(x)$.

En consecuencia, una función queda completamente determinada o bien definida si se conocen:

- i) Su regla de correspondencia $f(x)$
- ii) Su dominio

EJEMPLO 1. Dada la función $f = \{(x, 2x-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, hallar:

a) $f(2)$

b) $f(a)$

c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Solución. Si $x \in \mathbb{R} \rightarrow (2x-1) \in \mathbb{R}$, luego, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$. La regla de correspondencia de f es $f(x) = 2x-1$, entonces, la función está bien definida. Por lo que:

a) $f(2) = 2(2)-1 = 3$

b) $f(a) = 2(a)-1 = 2a-1$

c) $f(x+h) = 2(x+h)-1 = 2x+2h-1 \rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2x+2h-1-(2x-1)}{h} = 2$

EJEMPLO 2. Determinar si el conjunto $f = \{(x^2-1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es o no una función

Solución. La regla de correspondencia de f es $f(x^2-1) = x$

Para $x=2 \rightarrow f(4-1)=f(3)=2 \rightarrow (3, 2) \in f$

$x=-2 \rightarrow f(4-1)=f(3)=-2 \rightarrow (3, -2) \in f$

Según la propiedad: $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z$

se sigue que: $(3, 2) \in f \wedge (3, -2) \in f \rightarrow 2 = -2$, lo cual es absurdo

Luego, f no es una función.

[Nota. No todas las funciones se definen por medio de una fórmula única.

Por ejemplo, si escribimos: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-x^2}, & \text{si } x \in [0, 2] \\ x^2-3x+2, & \text{si } x \in (2, 6] \end{cases}$

tenemos una definición perfecta de una función. Algunos de sus valores son: $f(1) = \sqrt{2(1)-(1)^2} = 1$ y $f(3) = (3)^2-3(3)+2 = 2$

5.5 GRAFICA DE UNA FUNCION

Cuando el dominio y rango de una función consisten en números reales ambos, es posible plasmar el comportamiento de la función en forma gráfica.

Definición. Dada una función $f:A \rightarrow B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se define la gráfica de f y se denota " $Gr(f)$ ", al conjunto de todos los pares ordenados en los que $x \in A$ está como primer elemento y su imagen $y=f(x) \in B$ como segundo elemento. Es decir:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x) \in B\} \subset A \times B$$

o bien:

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\} \subset A \times B$$

EJEMPLO 3. Sea la función $f:A \rightarrow B \mid f(x)=2x-3$ y los conjuntos $A=[2, 5>$ y $B=[1, 7>$, esbozar la gráfica de f mostrando el conjunto $A \times B$.

Solución. En primer lugar construimos el rectángulo $A \times B$ (zona sombreada),

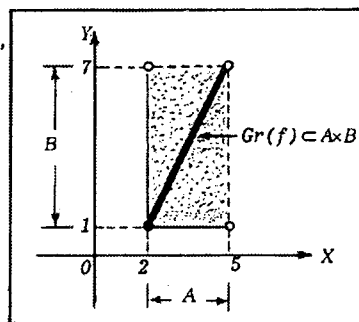
luego esbozamos la gráfica de f eligiendo dos puntos de $A=Dom(f)$

$$x=2 \in A \rightarrow f(2)=2(2)-3=1$$

$$x=5 \notin A \rightarrow f(5)=2(5)-3=7$$

Obsérvese que aunque $(5, 7) \notin Gr(f)$ este punto nos sirve como referencia para el trazado de la $Gr(f)$.

$$\therefore Gr(f) = \{(x, 2x-3) \mid x \in [2, 5>\} \subset A \times B$$



5.5.1 PROPIEDADES DE LA GRAFICA DE UNA FUNCION

G.1: $\forall x \in A$, existe un par ordenado $(x, y) \in Gr(f)$, esto es $Dom(Gr(f)) = A$

G.2: $(x, y) \in Gr(f) \wedge (x, z) \in Gr(f) \rightarrow y = z$ (Unicidad)

G.3: Si $P(x, y) \in Gr(f) \rightarrow P(x, y) \in f$

EJEMPLO 4. Sea la función real $f(x)=6+2x-x^2$. Decir si los siguientes pares ordenados pertenecen o no a la $Gr(f)$.

a) $(-2, -2)$

b) $(3, 3)$

c) $(6, 18)$

Solución. Según la propiedad G.3, se tiene:

$$a) f(-2) = 6+2(-2)-(-2)^2 = -2 \rightarrow (-2, -2) \in \text{Gr}(f)$$

$$b) f(3) = 6+2(6)-(6)^2 = 3 \rightarrow (3, 3) \in \text{Gr}(f)$$

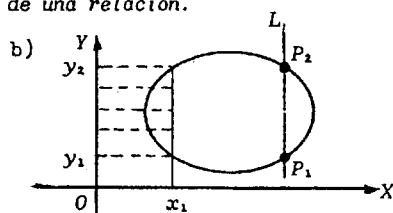
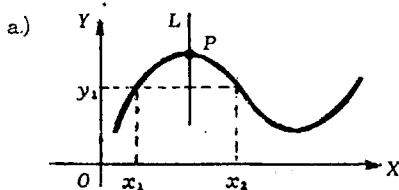
$$c) f(6) = 6+2(6)-(6)^2 = -18 \rightarrow (6, 18) \notin \text{Gr}(f)$$

Observación. Sabemos que una función no debe tener dos pares ordenados con la misma primera componente. Según esta propiedad si se presenta la gráfica de una función en $\mathbb{R}^2$ se debe cumplir la siguiente propiedad fundamental: "Una relación $f: A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, es una función real si y sólo si cada línea vertical L corta a la gráfica de f a lo más en un punto P ". Es decir:

$$\text{Gr}(f) \cap L = \{P\}, P \in \mathbb{R}^2$$

Esta observación proporciona un criterio visual para funciones.

EJEMPLO 5. En las siguientes gráficas, establecer la diferencia entre gráficas de una función y los de una relación.



Solución. La gráfica de a) es la de una función porque una línea vertical L corta a la curva en un solo punto P , esto es, a cada elemento del dominio le corresponde una de la imagen:

$$x_1 \rightarrow y_1$$

La gráfica de b) es la de una relación que no es una función pues una línea vertical L corta a la curva en dos puntos P_1 y P_2 , es decir, a cada elemento del dominio x_1 le corresponde varias imágenes, las comprendidas entre y_1 e y_2 .

5.6 CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Cuando una función viene dada por una fórmula o regla de correspondencia, se suele sobreentender que el dominio consiste de todos los números para los que la regla de correspondencia está bien definida.

Ahora bien, el dominio de una función puede describirse explícitamente junto con la función o estar implícito en la fórmula que define a la función.

Por ejemplo, para las funciones: $f(x)=1-2x$, $-3 \leq x \leq 5$ y $g(x)=x^2-x$, $x \leq 3$

el dominio está descrito explícitamente, pues: $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\} = (-3, 5]$ y $\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} = (-\infty, 3]$

Por su parte:

- a) Las funciones racionales de la forma: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tienen como dominio implícito a $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$
- b) Las funciones con raíces de índice par: $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, tienen como dominio implícito al conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$
- c) Las funciones con raíces de índice impar: $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ tienen como dominio implícito al dominio de g , esto es: $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$.

EJEMPLO 6. Hallar el dominio de las funciones:

$$a) f(x) = \sqrt[3]{9-x^2} \quad b) g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5x-14}} \quad c) h(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^3-5x^2-4x+20}}$$

Solución. a) La función tiene sentido $\Leftrightarrow 9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

$$\text{Entonces: } \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

$$b) g(x) = \frac{x}{\sqrt{(x+2)(x-7)}} \quad + \quad \text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x-7) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ó } x > 7\}$$

$$= (-\infty, -2) \cup (7, +\infty)$$

c) h es una función con raíz de índice impar, luego: $\text{Dom}(h) = \text{Dom}(f)$, donde

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x-2)(x-5)}, \quad x \neq -2, 2, 5 \quad + \quad \text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-2, 2, 5\}$$

5.6.1 CÁLCULO DEL RANGO DE UNA FUNCIÓN

Caso 1. Cuando el dominio está implícito en la regla de correspondencia que define a la función.

En este caso se despeja x en términos de y , luego se analiza para que valores de y , x es real.

EJEMPLO 7. Hallar el rango de la función: $f(x) = \frac{3x^2+4}{x^2-4}$

Solución. Sea $y=f(x) \Rightarrow y(x^2-4)=3x^2+4 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{\frac{y+1}{y-3}}$

Entonces: $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-3} \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -1 \text{ ó } y > 3$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ó } y > 3\} = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$$

Caso 2. Cuando el dominio está descrito explícitamente junto con la fórmula que define a la función. Es decir, si $f:A \rightarrow B$, entonces $\text{Ran}(f) = f(A)$, donde $f(A)$ es el conjunto de imágenes de x , tal que $x \in A$.

EJEMPLO 8. Sea la función $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid f(x) = 4 + 2x - x^2, x \in [-2, 4]\}$. Hallar su rango.

Solución. Si $f(x) = 5 - (x^2 - 2x + 1) \rightarrow f(x) = 5 - (x-1)^2$. Llegaremos al segundo extremo de esta fórmula partiendo del dominio de la función.

- (1) Si $x \in [-2, 4] \rightarrow -2 \leq x \leq 4 \rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3$
- (2) Elevando al cuadrado: $0 \leq (x-1)^2 \leq 9 \rightarrow -9 \leq -(x-1)^2 \leq 0$
- (3) Sumando 5: $-4 \leq 5 - (x-1)^2 \leq 5 \rightarrow -4 \leq f(x) \leq 5$
- (4) Por tanto: $\text{Ran}(f) = f([-2, 4]) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\} = [-4, 5]$

EJEMPLO 9. Hallar el rango de la función: $f = \{(x, \frac{2x-7}{x-1}) \mid x > 2\}$.

Solución. Regla de correspondencia de f : $f(x) = \frac{2x-7}{x-1} = 2 - \frac{5}{x-1}$

$$\text{Si } A = \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \text{Ran}(f) = f(A) = f(\langle 2, +\infty \rangle).$$

- (1) Si $x > 2 \rightarrow x-1 > 1 \rightarrow \frac{1}{x-1} < 1$
- (2) Como $x-1 > 1$, también $x-1 > 0 \rightarrow \frac{1}{x-1} > 0$ (Si $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$)
- (3) Luego, de los pasos (1) y (2) se sigue que: $0 < \frac{1}{x-1} < 1$
- (4) Multiplicando por -5 : $-5 < -\frac{5}{x-1} < 0 \rightarrow -3 < 2 - \frac{5}{x-1} < 2$
- (5) Por tanto: $\text{Ran}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < y < 2\} = \langle -3, 2 \rangle$

Definición. FUNCIÓN RESTRINGIDA

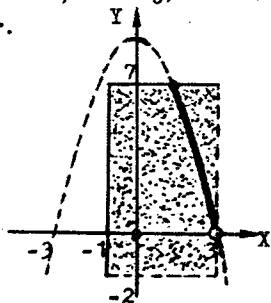
Sean los conjuntos A, B y D subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sea la función $f: A \rightarrow B$. Si definimos la función $g: D \rightarrow B$, tal que: $f(x) = g(x), \forall x \in D, D \subset A$ entonces se dice que la función g es la restricción de f al conjunto D . Equivalentemente, si $f: A \rightarrow B$ tiene una restricción $g: D \rightarrow B, D \subset A$, entonces se dice que f es una extensión de g al conjunto A .

EJEMPLO 10. Dada la función $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 9 - x^2$, indicar el dominio, rango y construir la gráfica de la función g , sabiendo que g es la restricción de f al conjunto $D \subset [-1, 3]$.

Solución. Para f , el conjunto de partida es

$A = [-1, 3]$ y el conjunto de llegada es $B = \mathbb{R}$. Si $g: D \rightarrow B \mid f(x) = g(x), \forall x \in D$, para hallar D se procede del modo siguiente:

- (1) Se construye el rectángulo $A \times B$.
- (2) Se traza la parábola $y = 9 - x^2$, con vértice en $V(0, 9)$.



(3) Interceptamos las rectas $y=7$, $x=3$ (restricción) con la parábola.

$$\text{Si } x \neq 3 \rightarrow y \neq 9-9=0 \rightarrow (3,0) \notin \text{Gr}(f)$$

$$\text{Si } y=7 \rightarrow 7=9-x^2 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\sqrt{2} \text{ (pues } x>0) \rightarrow (\sqrt{2},7) \in \text{Gr}(f)$$

(4) Luego: $D=\text{Dom}(g)=[\sqrt{2},3>$ y $\text{Ran}(g)=f(D)=<0,7] \subset B$

EJEMPLO 11. Sea la función $f: [-2,6> \rightarrow [-4,4] | f(x) = \frac{x^3-8x^2-17x+4}{x-4}$, hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función g que es la restricción de f al conjunto $D \subset [-2,6>$.

Solución. En f , el conjunto de partida es $A=[-2,6>$ y el conjunto de llegada es $B=[-4,4]$. Si $g: D \rightarrow B | f(x)=g(x)$, $\forall x \in D$, se tiene:

$$(1) f(x) = \frac{(x-4)(x^2-4x-1)}{x-4} = x^2-4x-1, \quad x \neq 4$$

(2) Trazamos el rectángulo $A \times B$ y luego la parábola $y=(x-2)^2-5$, $x \neq 4$, de vértice $V(2,-5)$.

(3) Interceptamos las rectas $y=4$, $y=-4$ (extremos de B) con la parábola $y=x^2-4x-1$.

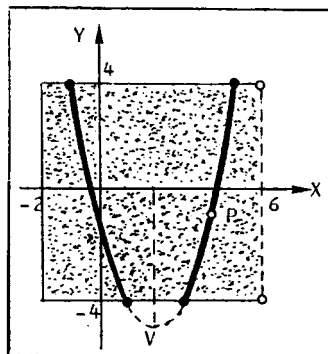
$$\text{Si } y=4 \rightarrow x^2-4x-5=0 \leftrightarrow x=-1 \text{ ó } x=5$$

$$y=-4 \rightarrow x^2-4x+3=0 \leftrightarrow x=1 \text{ ó } x=3$$

(4) Si $x \neq 4 \rightarrow y \neq 16-16-1=-1 \rightarrow P(4,-1) \notin \text{Gr}(f)$

(5) Luego, $\text{Dom}(g)=[-1,1] \cup [3,5]-\{4\}$

$$\text{Ran}(g)=f(D)=[-4,4]-\{-1\}$$



EJEMPLO 12. Hallar una función $f(x)$ que exprese el área del rectángulo de base x y perímetro $2a$ ($a>0$). Hallar también el dominio y rango de f .

Solución. (1) Si x e y son las dimensiones del rectángulo $\rightarrow f(x)=xy$

(2) Dado que: $p=2x+2y=2a \rightarrow x+y=a$, de donde: $y=a-x$

(3) Entonces, en (1): $f(x)=x(a-x)$, $a>0$, es la función buscada.

(4) Dominio de la función f . Como el área es un valor positivo, entonces:

$$f(x) > 0 \leftrightarrow x(a-x) > 0 \leftrightarrow 0 < x < a \rightarrow \text{Dom}(f)=<0,a>$$

(5) Rango de la función. De (1): $f(x) = ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2$

$$(6) \text{ Si } 0 < x < a \rightarrow -\frac{a}{2} < x - \frac{a}{2} < \frac{a}{2} \rightarrow 0 \leq (x - \frac{a}{2})^2 < \frac{a^2}{4}$$

$$\rightarrow -\frac{a^2}{4} < -(x - \frac{a}{2})^2 \leq 0 \rightarrow 0 < \frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2 \leq \frac{a^2}{4} \rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{a^2}{4}$$

(7) Por lo que: $\text{Ran}(f) = <0, a^2/4]$

24. $f: [-2, 3] \rightarrow [-1, 2] \mid f(x) = x^2 - 2$

27. $f: \langle -1, 5 \rangle \rightarrow [-3, 5] \mid f(x) = 5 + 2x - x^2$

25. $f: [-2, 3] \rightarrow [-2, 6] \mid f(x) = x^2 - 9$

28. $f: \langle -5, 2 \rangle \rightarrow [-1, 7] \mid f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

26. $f: [1, 4] \rightarrow [-1, 5] \mid f(x) = x^2 - 4x + 3$

29. $f: [1, 5] \rightarrow [0, 6] \mid f(x) = \frac{12x + 7x^2 - x^3}{x - 3}$



5.7 FUNCIONES ESPECIALES

5.7.1 FUNCION IDENTIDAD

Es aquella función denotada por $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde el dominio y el rango es el conjunto de los números reales y que tiene como regla de correspondencia:

$$I(x) = x$$

Es decir, en esta función cada número real se corresponde a si mismo. Su gráfica es la recta de pendiente $m = \tan 45^\circ = 1$, determinada por:

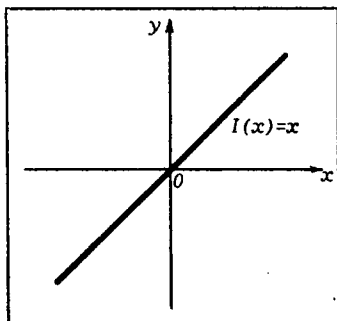
$\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y que pasa por el origen.

Cuando el dominio de la función identidad está restringido a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se denota:

I_A , esto es:

$$I_A(x) = x, \quad \forall x \in A$$

se dice entonces que es la función Identidad sobre A .



5.7.2 FUNCION CONSTANTE

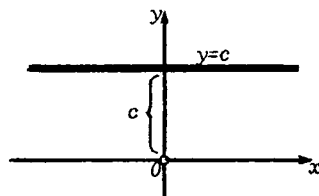
Es aquella función, denotada por C , con dominio $\mathbb{R}$ y el rango consiste en un número real, cuya regla de correspondencia es:

$$C = \{(x, y) \mid y = c\}$$

o bien, $C(x) = c$. La gráfica de la función constante es el conjunto de pares ordenados:

$\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$, o sea una recta horizontal. En

particular, si $c = 0$, la función constante es nula: $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, cuya gráfica es el eje X .



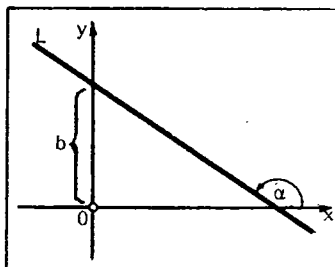
5.7.3 FUNCIÓN LINEAL

Es aquella función con dominio $\mathbb{R}$ y cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$.

Su gráfica es una recta cuya pendiente es $m = \tan \alpha$ y su ordenada en el origen es b .



EJEMPLO 1. Sea f una función lineal de pendiente m , e intercepto con el eje Y igual a b , tal que $f(m^2 - 2b) = f(b + 12 - 2m^2)$ y $f(2m + b - 2) = f(m + b - 1)$; hallar la función g si se tiene $g(x + 4) - x = f(\frac{m+b}{8}) + f(\frac{m-b}{6})$.

Solución. Sea la función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$

$$f(m^2 - 2b) = f(b + 12 - 2m^2) \rightarrow m(m^2 - 2b) + b = m(b + 12 - 2m^2) + b \rightarrow b = m^2 - 4 \quad (1)$$

$$f(2m + b - 2) = f(m + b - 1) \rightarrow m(2m + b - 2) + b = m(m + b - 1) + b, \text{ de donde: } m = 3$$

$$\text{Luego, en (1): } b = 5 \rightarrow f(x) = 3x + 5$$

$$\text{Entonces: } f(\frac{m+b}{8}) + f(\frac{m-b}{6}) = f(1) + f(-1/3) = 3(1) + 5 + 3(-1/3) + 5 = 12$$

$$\text{Luego, } g(x + 4) - x = 12 \rightarrow g(x + 4) = (x + 4) + 8 \rightarrow g(x) = x + 8$$

5.7.4 FUNCIÓN CUADRÁTICA

Es aquella función con dominio $\mathbb{R}$ y definida por la regla de correspondencia:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$

Su gráfica es una parábola simétrica respecto a la recta vertical $x = h$, llamada eje de simetría, abierta hacia arriba si $a > 0$ (Fig. 5.9) y hacia abajo si $a < 0$ (Fig. 5.10).

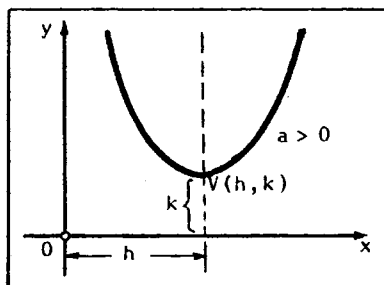


Figura 5.9

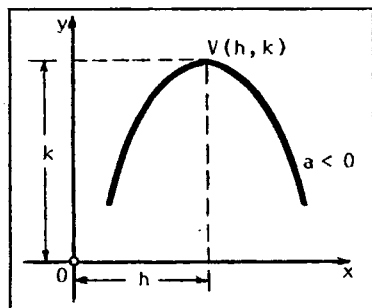


Figura 5.10

El vértice de la parábola se puede ubicar transformando la función a la forma: $y=a(x-h)^2+k$, mediante el artificio de completar el cuadrado:

$$+ f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

donde: $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$

Para $a > 0$, la función tiene su valor mínimo k , cuando $x=-b/2a$, es decir, el punto más bajo de la gráfica es el vértice $V(h,k)$.

Para $a < 0$, la función tiene su valor máximo k , cuando $x=-b/2a$, es decir, el punto más alto de la gráfica es el vértice $V(h,k)$.

EJEMPLO 2. Si $f(x)=-3x^2+6x+2$, determinar su valor máximo o mínimo.

Solución. Completando el cuadrado obtenemos: $f(x)=-3(x-1)^2+5 + h=1$ y $k=5$

Como $a=-3<0$, el punto más alto de la parábola es el vért. $V(1,5)$ o sea el valor máximo de la función es $y=5$.

EJEMPLO 3. Sea g una función cuadrática tal que $g(0)=1$ y tal que $g(x+1/2) - g(x-1/2)=4(2x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hallar el único valor de $x \in \mathbb{R} | g(x)=0$.

Solución. Sea la función cuadrática $g(x)=ax^2+bx+c$

$$\text{Si } g(0)=1 \rightarrow 1=0+0+c \rightarrow c=1 \rightarrow g(x)=ax^2+bx+1$$

$$g(x+1/2)-g(x-1/2)=8x-4 \rightarrow a(x+1/2)^2+b(x+1/2)+1 - a(x-1/2)^2-b(x-1/2)-1=8x-4$$

de donde: $2ax+b = 8x-4$. Identificando coeficientes se tiene: $a=4$ y $b=-4$

Entonces: $g(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$. Luego, si $g(x)=0 \rightarrow (2x-1)^2=0 \leftrightarrow x=1/2$

EJEMPLO 4. Un hombre que dispone de 160 pies de alambre desea cercar una superficie de forma rectangular. Si uno de los lados no necesita cerco, cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

Solución. Sean x e y las dimensiones del terreno

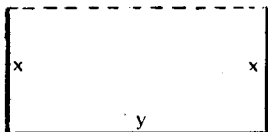
$$\text{Área de la superficie: } A=xy \quad (1)$$

$$\text{Perímetro por cercar} = 2x+y \rightarrow 2x+y=160$$

$$\rightarrow y=160-2x \quad (2)$$

$$(2) \text{ en } (1): A(x)=x(160-2x)=-2(x-40)^2+3200$$

Como $a=-2<0$, la función A alcanza su máximo valor de 3200 cuando $x=40$ pies, luego, en (2): $y=160-80=80$ pies.



5.7.5 FUNCIO

Es aquella función con dominio el conjunto de los números reales positivos y cuya regla de correspondencia es:

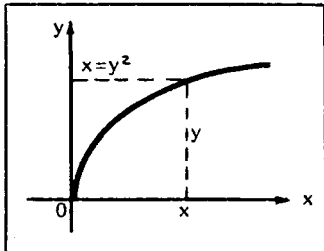
$$f = \{(x, y) | y = \sqrt{x}\}$$

para la cual $f(x) = \sqrt{x}$ es el número cuyo cuadrado es x . Los elementos del conjunto f son pares de la forma: $\{(y^2, y) | y \geq 0\}$

Esto es, $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$ y $\text{Ran}(f) = [0, +\infty)$.

Nótese que cuando elevamos al cuadrado ambos lados, la ecuación $y = \sqrt{x}$ toma una forma conocida, $y^2 = x$.

Esta ecuación representa una parábola de eje horizontal con vértice en el o rigen que se abre hacia la derecha. Por lo tanto, la gráfica de $y = \sqrt{x}$ es parte de la gráfica de la parábola $y^2 = x$ con $y \geq 0$.



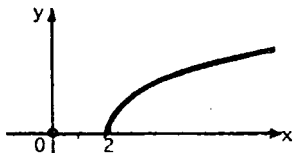
EJEMPLO 1. Construir la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x-4}$, dar su dominio y rango.

Solución. (1) Sea $y = \sqrt{2x-4} \rightarrow \exists y \rightarrow 2x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

Entonces: $\text{Dom}(f) = [2, +\infty)$

(2) Dado que $y \geq 0$, $\forall x \in \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Ran}(f) = [0, +\infty)$

(3) Elevando al cuadrado se tiene: $y^2 = 2(x-2)$
 $\rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 + 2$, es una parábola de eje horizontal, con vértice en $V(2, 0)$. Luego se construye parte de esta parábola arriba del eje X .



EJEMPLO 2. Hallar el dominio, el rango y trazar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$.

Solución. (1) Dominio de la función: $y = \sqrt{x^2-3x-4} = \sqrt{(x+1)(x-4)}$

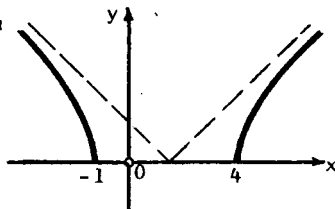
$$\rightarrow \exists y \rightarrow (x+1)(x-4) \geq 0 \rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 4$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$$

(2) Rango de la función. Como el dominio de la función es la unión de dos intervalos cuyos extremos son $\pm\infty$, su gráfica es una curva abierta que se extiende indefinidamente arriba del eje X ($y \geq 0$). $\therefore \text{Ran}(f) = [0, +\infty)$

(3) En (1), elevando al cuadrado se tiene:

$$y^2 = x^2 - 3x - 4 \rightarrow (x - 3/2)^2 - (y - 0)^2 = 25/4$$



Luego, la gráfica de la función es parte de la hipérbola de la forma:
 $(x-h)^2 - (y-k)^2 = a^2$, con centro en $C(3/2, 0)$, $a=5/2$, arriba del eje X .

5.7.6 FUNCION POLINOMICA DE GRADO n

Es aquella función con dominio $\mathbb{R}$ y cuya regla de correspondencia es tá dada por:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

donde n es un entero positivo y $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes reales ($a_0 \neq 0$)

Es evidente que las funciones constante, lineal y cuadrática son casos particulares de una función polinómica de grado n .

5.7.7 FUNCION RACIONAL

Si f y g son funciones polinómicas, la función F , cuya regla de correspondencia es:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}, \quad g(x) \neq 0$$

se denomina función racional.

Cualquier función polinomial es una función racional, esto ocurre cuando $g(x)$ es una función constante, en particular cuando $g(x)=1, \forall x \in \text{Dom}(g)$.

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales tales que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 3}$$

Solución. Factorizando los términos de la función racional se tiene:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \rightarrow f(x) = x+2, \quad x \neq -3, \quad x \neq 1$$

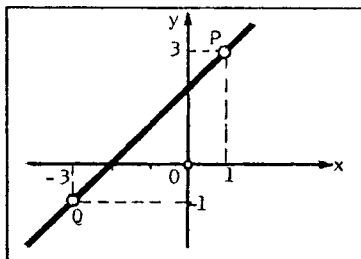
Restricciones: $x = -3 \rightarrow y = -3+2 = -1$

$$x = 1 \rightarrow y = 1+2 = 3$$

Luego, la gráfica de la función dada es la recta $L: y = x+2$, sin los puntos $P(1, 3)$ y

$Q(-3, -1)$. Luego, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$



EJEMPLO 2. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{(x^3 - 4x^2 - 5x)(x^2 - 6x + 8)}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}$$

Solución. Factorizando los términos de la función racional se tiene:

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x-5)(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)(x-5)} = x(x-4), \quad x \neq -1, \quad x \neq 2, \quad x \neq 5$$

$$\rightarrow f(x) = (x-2)^2 - 4, \quad x \neq -1, 2, 5$$

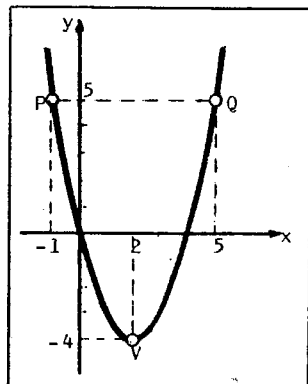
La gráfica de f es la de una parábola de vértice en $V(2, -4)$. Entonces: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2, 5\}$
Para determinar el rango hallamos los puntos excluidos, esto es:

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow y = (-3)^2 - 4 = 5 \rightarrow P(-1, 5) \notin G(f)$$

$$x = 2 \rightarrow y = (0)^2 - 4 = -4 \rightarrow V(2, -4) \notin G(f)$$

$$x = 5 \rightarrow y = (3)^2 - 4 = 5 \rightarrow Q(5, 5) \notin G(f)$$

Obsérvese que los puntos P y Q tienen la misma ordenada, entonces habrá que quitar $y=5$ del rango, esto es: $\text{Ran}(f) = \langle -4, 5 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle$



5.7.8 FUNCIONES SECCIONADAS

Hasta aquí hemos tratado solamente funciones de tipo $f(x)=y$, donde una misma fórmula nos describe el comportamiento de la función en todo su dominio. Sin embargo, podemos tener funciones que tengan distinto comportamiento dependiendo de los valores del dominio. Es decir, si una función está definida por dos o más secciones, entonces:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \in B \\ f_3(x), & x \in C \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

tales que: $A \cap B \cap C \cap \dots = \emptyset \rightarrow G(f) = G(f_1) \cup G(f_2) \cup G(f_3) \cup \dots$

y $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \text{Dom}(f_3) \cup \dots$

$\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2) \cup \text{Ran}(f_3) \cup \dots$

EJEMPLO 1. Graficar y hallar el rango de: $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -2 \\ 1, & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Solución. Obsérvese que el dominio de la función se ha dividido en tres

subconjuntos: $A = (-\infty, 2>$, $B = [-2, 2>$, $C = [2, +\infty)$, tales que: $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, y que los valores de la función dependen de donde esté localizada x . Por ejemplo:

$f(-4) = -1$, puesto que $-4 \in (-\infty, -2>$

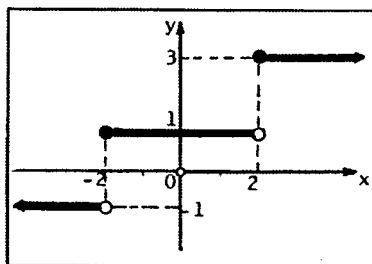
$f(0) = 1$, puesto que $0 \in [-2, 2>$

$f(5) = 3$, puesto que $5 \in [2, +\infty)$

Entonces la gráfica de $f(x)$ en cada sección es una recta paralela al eje X , dado que:

$f_1(x) = -1$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = 3$, son funciones constantes. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Ran}(f) = \{-1, 1, 3\}$

$$\therefore G(f) = G(f_1) \cup G(f_2) \cup G(f_3)$$



EJEMPLO 2. Hallar el dominio, el rango y trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < 2 \\ |x - 2|, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución. Aquí el dominio de la función se ha dividido en dos subconjuntos

$$A = (-\infty, 2> \text{ y } B = [2, +\infty) \rightarrow \text{Dom}(f) = A \cup B = \mathbb{R}$$

(2) Determinación del rango:

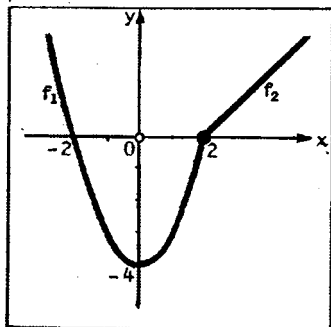
Sea $f_1(x) = x^2 - 4$ (Parábola con vértice en $V(0, -4)$). Si $x < 2 \rightarrow (x < 0) \vee (0 \leq x < 2)$
 $\rightarrow (x^2 > 0) \vee (0 \leq x^2 < 4)$
 $\rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 \geq -4 \rightarrow f_1(x) \geq -4$

$$\therefore \text{Ran}(f_1) = [-4, +\infty)$$

(3) Si $x \geq 2 \rightarrow x - 2 \geq 0 \rightarrow f_2(x) = x - 2$

Entonces: $f_2(x) \geq 0$, luego, $\text{Ran}(f_2) = [0, +\infty)$

$$(4) \therefore \text{Ran}(f) = [-4, +\infty) \cup [0, +\infty) = [-4, +\infty)$$

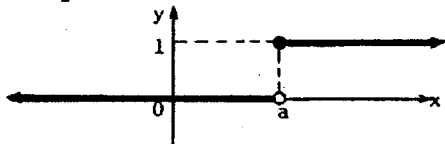


5.7.9 FUNCION ESCALON UNITARIO

Es aquella función denotada por u_a , que se lee "escalón unitario de paso a " y que está definida por:

$$u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ 1, & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

cuyo $\text{Dom}(u_a) = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}(u_a) = \{0, 1\}$



EJEMPLO. Sea una función que consiste en el conjunto de pares ordenados

(x, y) , donde y está relacionado con x por: $f(x) = u(x) - 2u(x-1) +$

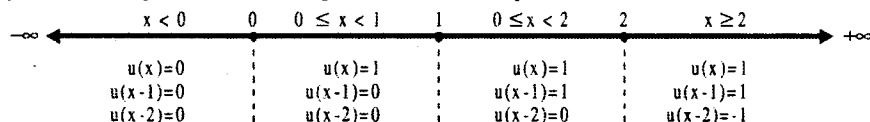
$u(x-2)$, donde u es la función escalón unitario. Indicar su dominio, rango y construir su gráfica.

Solución. Sea $y = u(x) - 2u(x-1) + u(x-2)$

Por definición:

$$u(x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}; \quad u(x-1) = u_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}; \quad u(x-2) = u_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

siguiendo el método de los puntos críticos, determinamos los intervalos de variación en $x=0$, $x=1$ y $x=2$. En cada intervalo, la función u tomará los valores de 0 y 1, a la izquierda y derecha, respectivamente, del punto crítico correspondiente.



Luego, en (1): si $x < 0 \rightarrow y = 0 - 2(0) + 0 = 0$

$0 \leq x < 1 \rightarrow y = 1 - 2(0) + 0 = 1$

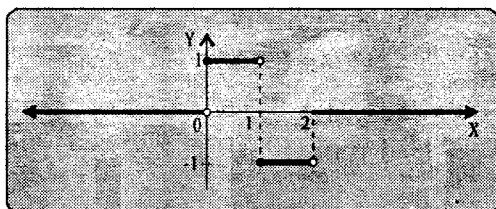
$1 \leq x < 2 \rightarrow y = 1 - 2(1) + 0 = -1$

$x \geq 2 \rightarrow y = 1 - 2(1) + 1 = 0$

Por lo tanto, la regla de correspondencia de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Ran}(f) = \{-1, 0, 1\}$



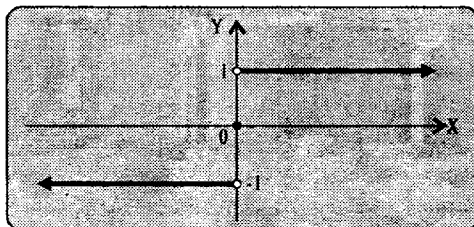
5.7.10 FUNCION SIGNO

Es aquella función denotada por " $\text{Sgn}(x)$ ", que se lee "signo de x ", y que está definida por:

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En donde: $\text{Dom}(\text{Sgn}) = \mathbb{R}$

$\text{Ran}(\text{Sgn}) = \{-1, 0, 1\}$



EJEMPLO. Construir la gráfica de la función $f(x) = \text{Sgn}(x^2 - 2x - 2)$, Hallar su dominio y rango.

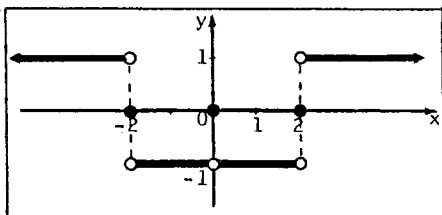
Solución. Por definición: $\text{Sgn}(x^2 - 2x - 2) = \begin{cases} -1, & \text{si } x^2 - 2x - 2 < 0 \\ 0, & \text{si } x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 1, & \text{si } x^2 - 2x - 2 > 0 \end{cases}$

Entonces, si: $|x^2-2| < 2 \leftrightarrow (x^2-2 < 2) \wedge (x^2-2 > -2)$
 $\leftrightarrow (x^2 < 4) \wedge (x^2 > 0) \leftrightarrow x \in (-2, 2) - \{0\}$
 $|x^2-2| = 2 \leftrightarrow (x^2-2=2) \vee (x^2-2=-2)$
 $\leftrightarrow (x^2=4) \vee (x^2=0) \leftrightarrow x=\pm 2 \quad x=0$
 $|x^2-2| > 2 \leftrightarrow (x^2-2 > 2) \vee (x^2-2 < -2)$
 $\leftrightarrow (x^2 > 4) \vee (x^2 < 0) \leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Luego, la ley de correspondencia de f queda definida por la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -2 < x < 2 - \{0\} \\ 0, & \text{si } x=0, \quad x=\pm 2 \\ 1, & \text{si } x < -2 \vee x > 2 \end{cases}$$

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}, \text{Ran}(f)=\{-1, 0, 1\}$



5.7.11 FUNCION VALOR ABSOLUTO

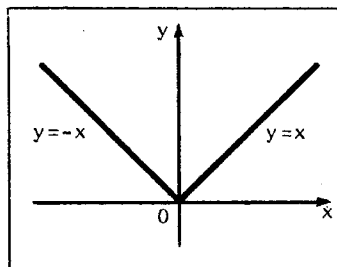
Es aquella función con dominio $\mathbb{R}$ y cuya regla de correspondencia

es: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Los elementos del conjunto f son pares ordenados de la forma $\{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$ y su gráfica es la unión de dos partes de rectas cuyos puntos son simétricos respecto del eje Y .

$y \geq 0 \wedge (y=x, \text{ si } x \geq 0 \vee y=-x, \text{ si } x < 0)$

$\therefore \text{Dom}(f)=\mathbb{R} \text{ y } \text{Ran}(f)=[0, +\infty)$



EJEMPLO 1. Construir la gráfica de la función: $f(x)=|x-2|-3$

Solución. Sea: $y+3=|x-2|$, entonces por definición de valor absoluto:

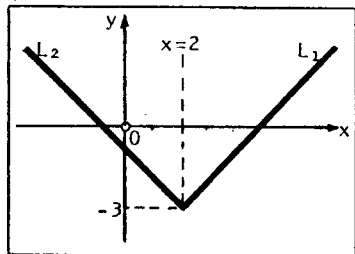
$(y+3 \geq 0) \wedge [(y+3=x-2, \text{ si } x \geq 2) \vee (y+3=-x+2, \text{ si } x < 2)]$

$(y \geq -3) \wedge [(y=x-5, \text{ si } x \geq 2) \vee (y=-x-1, \text{ si } x < 2)]$

La gráfica de f es la unión de dos partes de rectas cuyos puntos son simétricos respecto de la recta $x=2$.

$\therefore (y \geq -3) \wedge \begin{cases} L_1: y=x-5, & \text{si } x \geq 2 \\ L_2: y=-x-1, & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R} \text{ y } \text{Ran}(f)=[-3, +\infty)$



EJEMPLO 2. Construir la gráfica de la función $f(x)=|x^2-4|$

Solución. Si $y=|x^2-4| \rightarrow y = \begin{cases} x^2-4, & \text{si } x^2 \geq 4 \\ -(x^2-4), & \text{si } x^2 < 4 \end{cases}$

$\rightarrow (y \geq 0) \wedge [(y=x^2-4, \text{ si } x \leq -2 \text{ o } x \geq 2) \vee (y=4-x^2, \text{ si } -2 < x < 2)]$

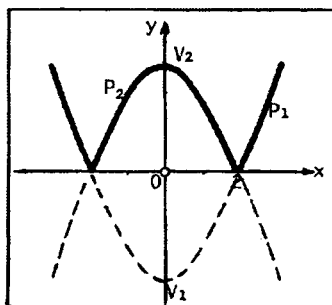
Entonces, la gráfica de f es la unión de dos partes de parábolas, en el semiplano superior del eje X .

$P_1: y=x^2-4$, con vértice en $V_1(0, -4)$ y

$P_2: y=4-x^2$, con vértice en $V_2(0, 4)$.

$\rightarrow (y \geq 0) \wedge \begin{cases} P_1: y=x^2-4, & \text{si } x \leq -2 \text{ o } x \geq 2 \\ P_2: y=4-x^2, & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$

$\therefore \text{Dom}(f)=\mathbb{R}, \text{Ran}(f)=[0, +\infty)$

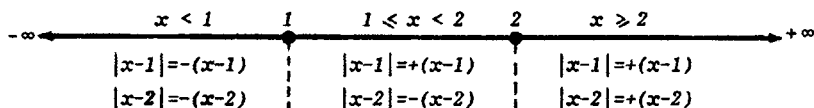


EJEMPLO 3. Hallar el rango y trazar la gráfica de la función:

$f(x)=|x-1|+|x-2|$

Solución. Sea $y=|x-1|+|x-2|$

Seguiremos el método de los puntos críticos para determinar los intervalos de variación y eliminar las barras de valor absoluto según sea el signo que adopten en cada intervalo. En este caso los valores críticos son: $x=1$ y $x=2$



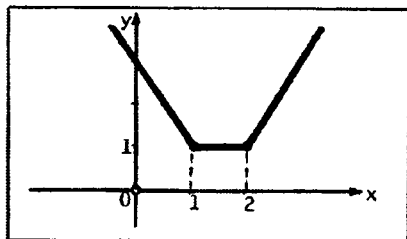
Si $x < 1 \rightarrow y=-(x-1)-(x-2)=3-2x$

$1 < x < 2 \rightarrow y=+(x-1)-(x-2)=1$

$x > 2 \rightarrow y=+(x-1)+(x-2)=2x-3$

$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{si } x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x-3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

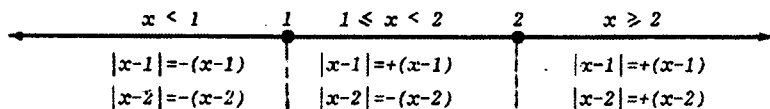
$\therefore \text{Dom}(f)=\mathbb{R} \text{ y } \text{Ran}(f)=[1, +\infty)$



EJEMPLO 4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{1}{|x-1|-|x-2|}$, hallar el rango y trazar la gráfica de f .

Solución. Procediendo en forma análoga al ejemplo anterior se tiene:

Valores críticos: $x=1$ y $x=2$.

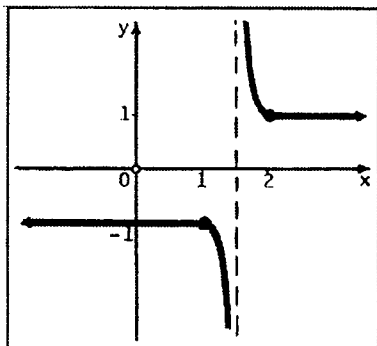


$$\text{Si } x < 1 \rightarrow y = \frac{1}{-(x-1)+(x-2)} = -1$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = \frac{1}{(x-1)+(x-2)} = \frac{1}{2x-3}$$

$$x \geq 2 \rightarrow y = \frac{1}{(x-1)-(x-2)} = 1$$

En el intervalo $[1, 2]$ la gráfica de f presenta una asíntota vertical $x=3/2$, por lo que la curva se extiende indefinidamente encima de la recta $y=1$ y debajo de la recta $y=-1$. $\therefore \text{Ran}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



5.7.12 FUNCION MAXIMO ENTERO

Es la función con dominio $\mathbb{R}$ y cuya regla de correspondencia está dada por:

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket$$

donde $\llbracket x \rrbracket$ es el máximo entero no mayor que x , es decir, si

$$\llbracket x \rrbracket = n \leftrightarrow \llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Según el Teorema 57, si: $\llbracket x \rrbracket = n \leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$

Entonces el dominio de la función máximo entero, es la unión de intervalos de la forma $[n, n+1>$, $n \in \mathbb{Z}$, esto es:

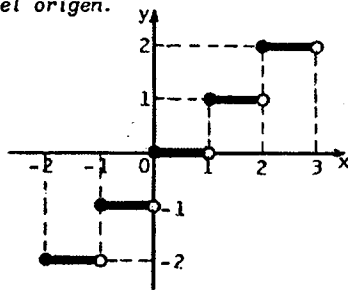
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1>$$

y como $f(x)=n \rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{Z}$

Luego, para trazar la gráfica de $f(x)=\llbracket x \rrbracket$, especificaremos f para algunos intervalos de longitud unitaria a cada lado del origen.

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 \leq x < -1, n=-2 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0, n=-1 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 1, n=0 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2, n=1 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x < 3, n=2 \end{cases}$$

Nótese que la gráfica de f se obtiene dando valores a n , esto es, para cada valor de n obtenemos un intervalo en el cual se tiene



una función constante de rango n .

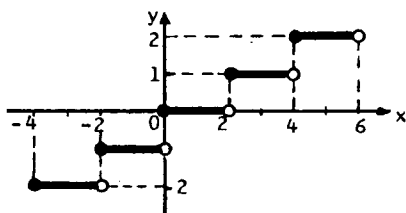
EJEMPLO 1. Construir la gráfica de la función $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Solución. Si $\lfloor x/2 \rfloor = n \leftrightarrow n \leq \frac{x}{2} < n+1 \leftrightarrow 2n \leq x < 2(n+1)$

Entonces: $\text{Dom}(f) = \{x | x \in [2n, 2(n+1)), n \in \mathbb{Z}\}$

Obsérvese que aquí los subintervalos del dominio de f son de longitud doble y como $f(x) = n$, entonces, el $\text{Ran}(f) = \mathbb{Z}$.

$$f(x) = \lfloor x/2 \rfloor = \begin{cases} -2, & \text{si } -4 \leq x < -2, n=-2 \\ -1, & \text{si } -2 \leq x < 0, n=-1 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 2, n=0 \\ 1, & \text{si } 2 \leq x < 4, n=1 \\ 2, & \text{si } 4 \leq x < 6, n=2 \end{cases}$$



EJEMPLO 2. Construir la gráfica de la función $f(x) = \lfloor mx \rfloor$, $m \in \mathbb{Z}$

Solución. Si $\lfloor mx \rfloor = n \leftrightarrow n \leq mx < n+1$ (1)

Puede ocurrir dos casos:

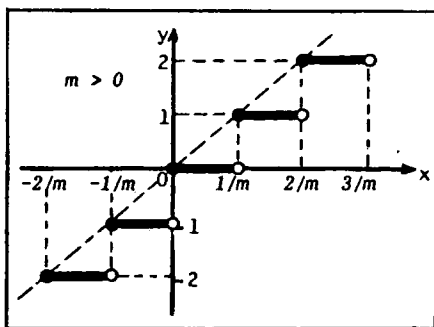
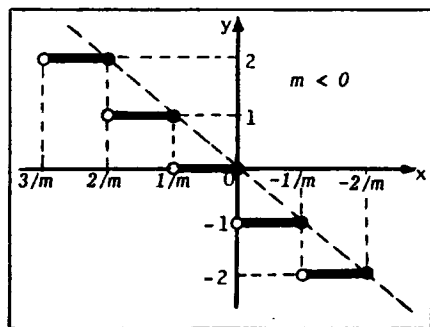
a) Si $m < 0 \rightarrow \frac{n+1}{m} < x \leq \frac{n}{m} \rightarrow \text{Dom}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\frac{n+1}{m}, \frac{n}{m}]$ y $f(x) = n$

b) Si $m > 0 \rightarrow \frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m} \rightarrow \text{Dom}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m})$ y $f(x) = n$

En a) nótese que cuando n es positivo el intervalo de x es negativo y viceversa ($m < 0$). Luego, dando valores a n en ambos casos se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1/m < x \leq -2/m, n=-2 \\ -1, & 0 < x \leq -1/m, n=-1 \\ 0, & 1/m < x \leq 0, n=0 \\ 1, & 2/m < x \leq 1/m, n=1 \\ 2, & 3/m < x \leq 2/m, n=2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -2/m \leq x < -1/m, n=-2 \\ -1, & -1/m \leq x < 0, n=-1 \\ 0, & 0 \leq x < 1/m, n=0 \\ 1, & 1/m \leq x < 2/m, n=1 \\ 2, & 2/m \leq x < 3/m, n=2 \end{cases}$$



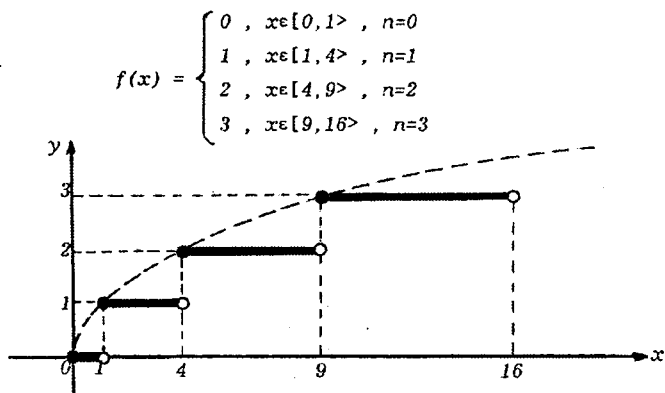
EJEMPLO 3. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x) = \llbracket \sqrt{x} \rrbracket$.

Solución. Dado que $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \geq 0$ y $\llbracket x \rrbracket \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \llbracket \sqrt{x} \rrbracket = n &\leftrightarrow (x \geq 0) \wedge (0 \leq n < \sqrt{x} < n+1, n \in \mathbb{Z}^+) \\ &\leftrightarrow n^2 \leq x < (n+1)^2, n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Entonces: $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^+ | x \in [n^2, (n+1)^2), \forall n \in \mathbb{Z}^+\} = [0, +\infty)$

Siendo: $f(x) = n \rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

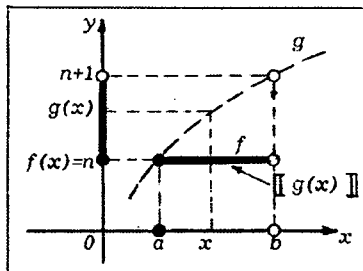


Observación. Las gráficas de las funciones del tipo $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$, tienen por característica fundamental lo siguiente:

Supongamos un intervalo $x \in [a, b]$ del dominio de f , sabemos que para $n \in \mathbb{Z}$, si:

$$f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket = n \leftrightarrow n \leq g(x) < n+1, \forall x \in [a, b]$$

Si interpretamos geométicamente este resultado veremos que la gráfica de $f(x)$ en $[a, b]$ es la proyección vertical de la gráfica de $g(x)$ en dicho intervalo. Entonces, dada una función g , cuya gráfica es conocida, (línea punteada), la gráfica de la función $f = \llbracket g \rrbracket$ estará constituida por segmentos horizontales uno de cuyos extremos estará sobre la gráfica de g . Esta característica importante puede ser utilizada para esbozar gráficas de funciones del tipo mencionado.



EJEMPLO 4. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$

Solución. Construimos, con trazo punteado, la parábola $g(x) = x^2$

Luego, determinemos los intervalos $[a, b]$. Si $\lfloor x^2 \rfloor = n \rightarrow n \leq x^2 < n+1$ (1)

Como $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lfloor x^2 \rfloor \geq 0$, esto es, $n \geq 0$

Entonces en (1): $0 \leq n \leq \lfloor x^2 \rfloor < n+1 \rightarrow \sqrt{n} < |x| < \sqrt{n+1}$

Caso 1. Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow \sqrt{n} \leq -x < \sqrt{n+1}$

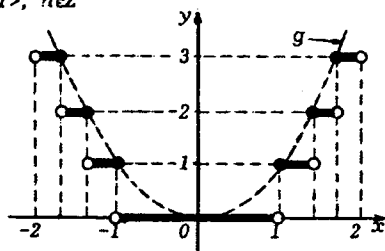
$$\rightarrow -\sqrt{n+1} < x \leq -\sqrt{n} \rightarrow x \in (-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}]$$

Caso 2. Si $x > 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow \sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1} \rightarrow x \in [\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$

$$\therefore \text{Dom}(f) = (-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}] \cup [\sqrt{n}, \sqrt{n+1}), n \in \mathbb{Z}$$

y como $f(x) = n \rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{Z} \cup \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-1, 0] \cup [0, 1) \\ 1, & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \\ 2, & \text{si } x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ 3, & \text{si } x \in (-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2) \end{cases}$$



EJEMPLO 5. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x) = \lfloor 1-2x \rfloor$

Solución. (1) Trazamos, con línea punteada, la gráfica de la recta $y=1-2x$

(2) Determinación del dominio y rango de f :

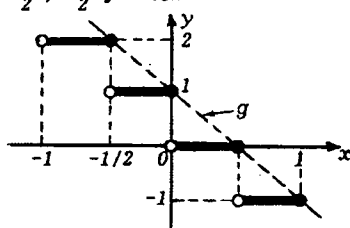
$$\text{Si } \lfloor 1-2x \rfloor = n \rightarrow n \leq 1-2x < n+1 \rightarrow -(n+1) < 2x-1 \leq -n$$

$$\rightarrow -n < 2x \leq -n+1 \rightarrow -\frac{n}{2} < x \leq \frac{1-n}{2}$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = \{x | x \in (-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}], n \in \mathbb{Z}\} = x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}] = x \in \mathbb{R}$$

Siendo $f(x) = n \rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{Z}$

$$(3) f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 1/2 < x \leq 1, n=-1 \\ 0, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, n=0 \\ 1, & \text{si } -1/2 < x \leq 0, n=1 \\ 2, & \text{si } -1 < x \leq -1/2, n=2 \end{cases}$$



EJEMPLO 6. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x) = \lfloor \frac{4}{1+x^2} \rfloor$

Solución. (1) Dibujamos, con trazo punteado, la gráfica de $g(x) = \frac{4}{1+x^2}$

llamada, curva de Agnesi, que tiene como asíntota el eje X .

(2) Dado que $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2+1 \geq 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

$$\rightarrow 0 < \frac{4}{1+x^2} \leq 4 \rightarrow \left\lfloor \frac{4}{1+x^2} \right\rfloor = 0, 1, 2, 3, 4 ; \text{ esto es } \text{Ran}(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Como la gráfica de $g(x)$ se extiende a lo largo del eje $X \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Conocidos los elementos del rango, podemos determinar los subintervalos del

dominio haciendo: $\left\lfloor \frac{4}{1+x^2} \right\rfloor = n \rightarrow n \leq \frac{4}{1+x^2} < n+1$

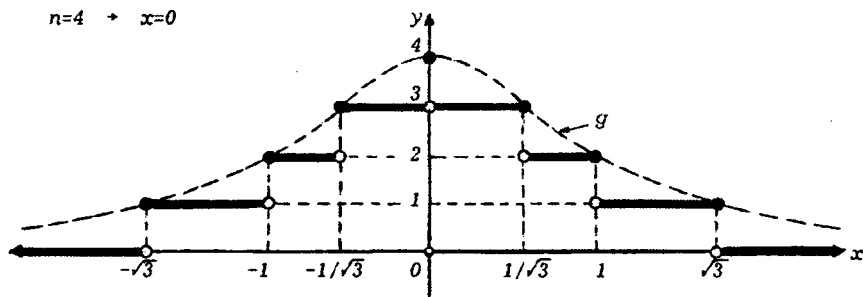
Para $n=0 \rightarrow 0 \leq \frac{4}{1+x^2} < 1 \rightarrow 1+x^2 > 4 \rightarrow x^2 > 3 \rightarrow x > \sqrt{3} \text{ o } x < -\sqrt{3}$
 $\rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$n=1 \rightarrow 1 \leq \frac{4}{1+x^2} < 2 \rightarrow x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$ (Verificar)

$n=2 \rightarrow 2 \leq \frac{4}{1+x^2} < 3 \rightarrow x \in [-1, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, 1]$ (Verificar)

$n=3 \rightarrow 3 \leq \frac{4}{1+x^2} < 4 \rightarrow x \in [-1/\sqrt{3}, 0] \cup [0, 1/\sqrt{3}]$ (Verificar)

$n=4 \rightarrow x=0$



EJEMPLO 7. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x) = |x| - \lfloor x \rfloor$

Solución. Si $\lfloor x \rfloor = n \rightarrow n \leq x < n+1$. Consideremos dos casos:

a) Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow f(x) = x - \lfloor x \rfloor$
 $\rightarrow f(x) = x - n \rightarrow x \in [n, n+1), n \geq 0, n \in \mathbb{Z}^+$ (1)

b) Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow f(x) = -x - \lfloor x \rfloor = -x - n \rightarrow x \in [n, n+1), n \in \mathbb{Z}^-$ (2)

Luego, de (1) y (2): $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Para determinar el rango consideremos también dos casos:

a) Si $x \geq 0 \rightarrow n \leq x < n+1 \rightarrow \lfloor x \rfloor = n, n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow n \leq |x| < n+1$

Restando n a cada lado: $n - n \leq |x| - n < n+1 - n$

$\rightarrow 0 \leq |x| - \lfloor x \rfloor < 1 \rightarrow y \in [0, 1)$

b) Si $x < 0 \rightarrow -m-1 \leq x < -m, m \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor = -(m+1)$

Multiplicando por -1 : $m < -x \leq m+1 \rightarrow m < |x| \leq m+1$

Sumando $m+1$ a cada lado: $m+(m+1) < |x|+(m+1) \leq m+1+(m+1)$

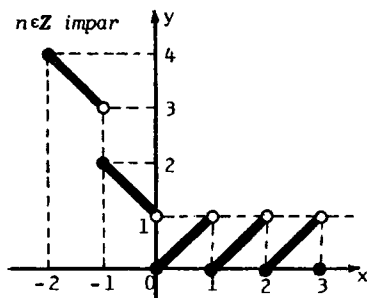
$\rightarrow 2m+1 < |x| - \lfloor x \rfloor \leq (2m+1)+1$

Haciendo $2m+1=n \in \mathbb{Z}$ impar $\rightarrow n < f(x) \leq n+1 \rightarrow y \in (n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ impar

$$\therefore \text{Ran}(f) = [0, 1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1], n \in \mathbb{Z} \text{ impar}$$

Dando valores a n en (1) y (2) obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in [-2, -1], n=-2 \\ 1-x, & x \in [-1, 0], n=-1 \\ x, & x \in [0, 1], n=0 \\ x-1, & x \in [1, 2], n=1 \\ x-2, & x \in [2, 3], n=2 \end{cases}$$



EJEMPLO 8. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = \sqrt{|x| - \lfloor x \rfloor}$$

Solución. La función es real $\leftrightarrow |x| - \lfloor x \rfloor \geq 0 \leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq |x|$

Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$. La desigualdad $\lfloor x \rfloor \leq x$ es válida $\forall x \in \mathbb{R}^+$ (Según el T.56). Luego, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ (1)

Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow |x| \leq -x$, es válida $\forall x \in \mathbb{R}^- \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^-$ (2)

Por lo tanto, de (1) y (2): $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Para determinar el rango consideremos también: $x \geq 0$ y $x < 0$

a) Si $x \geq 0 \rightarrow n \leq x < n+1 \leftrightarrow \lfloor x \rfloor = n$, $n \in \mathbb{Z} \rightarrow n \leq |x| < n+1$

$$\text{Restando } n \text{ a cada lado: } n-n \leq |x|-n < n+1-n$$

$$\rightarrow 0 \leq |x| - \lfloor x \rfloor < 1 \rightarrow 0 \leq \sqrt{|x| - \lfloor x \rfloor} < 1 \rightarrow y \in [0, 1)$$

b) Si $x < 0 \rightarrow -m-1 \leq x < -m$, $m \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x \rfloor = -(m+1)$

$$\text{Multiplicando por } -1: m < -x \leq m+1 \rightarrow m < |x| \leq m+1$$

$$\text{Sumando } m+1: m+(m+1) < |x|+(m+1) \leq m+1+(m+1) \rightarrow 2m+1 < |x| - \lfloor x \rfloor \leq (2m+1)+1$$

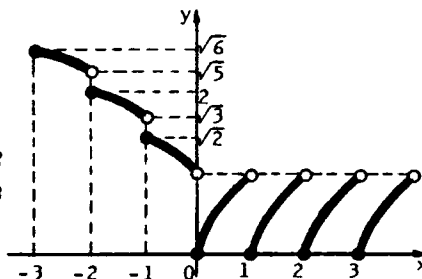
$$\rightarrow \sqrt{2m+1} < \sqrt{|x| - \lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{(2m+1)+1}$$

Haciendo $2m+1=n \in \mathbb{Z}^+$ impar: $\sqrt{n} < f(x) \leq \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ impar.

$$\therefore \text{Ran}(f) = [0, 1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}, \sqrt{n+1}], n \in \mathbb{Z}^+ \text{ impar}$$

$$\text{Si } x \geq 0 \rightarrow y = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}, \text{ y si } x < 0 \rightarrow y = \sqrt{-x - \lfloor x \rfloor}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x < 1, n=0 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leq x < 2, n=1 \\ \sqrt{x-2}, & \text{si } 2 \leq x < 3, n=2 \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } -1 \leq x < 0, n=-1 \\ \sqrt{2-x}, & \text{si } -2 \leq x < -1, n=-2 \\ \sqrt{3-x}, & \text{si } -3 \leq x < -2, n=-3 \end{cases}$$



EJEMPLO 9. Construir la gráfica y hallar el rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x-2 \rfloor, & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es par} \\ 3x - \lfloor x+1 \rfloor, & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar} \end{cases}, \quad \forall x \in [-3, 4]$$

Solución. Sabemos que si $m \in \mathbb{Z} \rightarrow \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$ (T.61)

Entonces, sean: $f_1(x) = \lfloor x \rfloor - 2$, si $\lfloor x \rfloor$ es par

$f_2(x) = 3x - \lfloor x \rfloor - 1$, si $\lfloor x \rfloor$ es impar

$\rightarrow \text{Graf}(f) = \text{Graf}(f_1) \cup \text{Graf}(f_2)$

En f_1 : $\lfloor x \rfloor = n = 2k \rightarrow 2k \leq x < 2k+1, k \in \mathbb{Z} \rightarrow f_1(x) = 2k - 2$

En f_2 : $\lfloor x \rfloor = n = 2k+1 \rightarrow 2k+1 \leq x < 2k+2, k \in \mathbb{Z} \rightarrow f_2(x) = 3x - 2 - 2k$

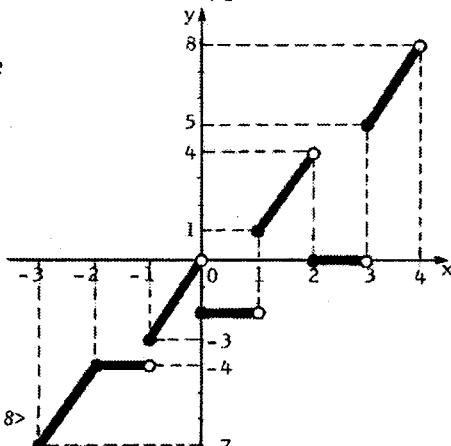
$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 2k-2, & 2k \leq x < 2k+1 \\ 3x-2-2k, & 2k+1 \leq x < 2k+2 \end{cases}$$

Luego, en f_1 , para $k=-1, 0, 1$

y en f_2 , para $k=-2, -1, 0, 1$; obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \begin{cases} -4, & x \in [-2, -1) \\ -2, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \in [2, 3) \end{cases} & n \text{ par} \\ \begin{cases} 3x+2, & x \in [-3, -2) \\ 3x, & x \in [-1, 0) \\ 3x-2, & x \in [1, 2) \\ 3x-4, & x \in [3, 4) \end{cases} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [-7, -4] \cup [-3, 0] \cup [1, 4] \cup [5, 8]$$



5.7.13 FUNCIONES PARES

Son aquellas funciones que se caracterizan por ser simétricas respecto del eje Y, es decir, si en ellas se cumple:

i) Si $x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$

ii) $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$

Ejemplos. (1) Sea la función: $f(x) = 3x^2 - x^4$

$$\rightarrow f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^4 = 3x^2 - x^4$$

$$\rightarrow f(x) = f(-x) \quad \therefore f \text{ es una función par.}$$

(2) Sea la función: $f(x) = |x^3 + 2x|$, $x \in (-5, 5)$

i) Si $x \in (-5, 5) \leftrightarrow -5 < x < 5 \leftrightarrow 5 > -x > -5 \rightarrow -x \in (-5, 5)$

$$\text{ii) } f(-x) = |(-x)^3 + 2(-x)| = |-x^3 - 2x| = |-(x^3 + 2x)| = |x^3 + 2x|$$

$$\rightarrow f(-x) = f(x) \quad \therefore f \text{ es una función par.}$$

5.7.14 FUNCIONES IMPARES

Son aquellas que se caracterizan por ser simétricas respecto del origen de coordenadas, esto es:

- i) Si $x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$
- ii) $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$

Ejemplos. (1) Sea la función $f(x) = x^3 - x$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(-x) &= (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) \\ \rightarrow f(-x) &= -f(x) \leftrightarrow f(x) = -f(-x) \quad \therefore f \text{ es impar} \end{aligned}$$

(2) Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{x(1+|x|)}$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(-x) &= \sqrt[3]{-x(1+|-x|)} = -\sqrt[3]{x(1+|x|)} \\ \rightarrow f(-x) &= -f(x) \leftrightarrow f(x) = -f(-x) \quad \therefore f \text{ es una función impar.} \end{aligned}$$

5.7.15 FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función f en $\mathbb{R}$, se dice que es periódica si existe un número $T \neq 0$, llamado período, tal que:

- i) Si $(x+T) \in \text{Dom}(f) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f)$
- ii) $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$

Ejemplos. (1) Probar que la función $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ es una función periódica.

En efecto: i) Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces, si $x \in \mathbb{R} \rightarrow (x+T) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{ii) } f(x+T) &= \lfloor 2x+2T \rfloor - 2\lfloor x+T \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + 2T - 2(\lfloor x \rfloor + T) \\ &= \lfloor 2x \rfloor + 2T - 2\lfloor x \rfloor - 2T = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función periódica.

Otros ejemplos clásicos de funciones periódicas lo constituyen las funciones trigonométricas.

Así tenemos que: $\text{Sen}(x+2\pi) = \text{Sen}x$, $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow T=2\pi$

también: $\text{Sen}(x+4\pi) = \text{Sen}x$, $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow T=4\pi$ es un período de la función seno, siendo $T=2\pi$ el menor período positivo.

Entonces se define período mínimo de f al menor de los períodos positivos.

(2) Sea la función $f(x) = \text{Cos}(bx+a)$, donde $b > 0$, hallar el período de la función.

Se debe verificar que: $f(x+T) = f(x)$

$$\rightarrow \text{Cos}[b(x+T)+a] = \text{Cos}(bx+a) \rightarrow \text{Cos}[(bx+a)+bT] = \text{Cos}(bx+a)$$

$$\rightarrow \cos(bx+a) \cdot \cos(bT) - \sin(bx+a) \cdot \sin(bT) = \cos(bx+a)$$

La igualdad se cumple si: $\cos(bT)=1$ y $\sin(bT)=0$

En ambos casos: $bT=0$ o $bT=2\pi \rightarrow T=0$ o $T=2\pi/b$

Pero como $T \neq 0 \rightarrow T = 2\pi/b$ es el mínimo período

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Si $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ es una función real con dominio A y rango B, hallar $(A \cap B)'$.

Solución. $f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}$, $x \neq 3 \rightarrow A = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$$\text{Para } x=3 \rightarrow y = \frac{3+3}{3+1} = \frac{3}{2}; \text{ como } x \neq 3 \rightarrow y \neq 3/2$$

$$y = \frac{x+3}{x+1} \rightarrow x = \frac{3-y}{y-1}, y \neq 1 \rightarrow B = \mathbb{R} - \{1, 3/2\}$$

$$\text{Luego, } A \cap B = \mathbb{R} - \{-1, 1, 3/2, 3\} \rightarrow (A \cap B)' = \{-1, 1, 3/2, 3\}$$

EJERCICIO 2. Sean f y g dos funciones: $f(x) = \lfloor 2x-3 \rfloor - 4$, $g(x) = \frac{1}{\lfloor 2x-3 \rfloor - 2}$ y si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)=0\}$, entonces hallar $[A' \cap \text{Dom}(g)]'$.

Solución. Si $f(x)=0 \rightarrow \lfloor 2x-3 \rfloor = 4 \leftrightarrow 4 \leq 2x-3 < 5 \leftrightarrow 1/2 \leq x < 1$
 $A = [1/2, 1) \rightarrow A' = (-\infty, 1/2) \cup [1, +\infty)$

En g : Si $|2x-3|-2=0 \rightarrow |2x-3|=2 \leftrightarrow (2x-3=2) \vee (2x-3=-2)$
 $\leftrightarrow (x=5/2) \vee (x=1/2)$

Entonces: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1/2, 5/2\}$; luego: $A' \cap \text{Dom}(g) = (-\infty, 1/2) \cup [1, +\infty) - \{5/2\}$

$$\therefore [A' \cap \text{Dom}(g)]' = [1/2, 1) \cup \{5/2\}$$

EJERCICIO 3. Si f es la función de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt{x + \lfloor -x \rfloor} + x \lfloor x \rfloor, \text{ demostrar que } \forall x \in \text{Dom}(f),$$

$-x \in \text{Dom}(f)$ y $f(-x) = f(x)$.

Demostración. En efecto, siendo f una función de variable real, entonces

$$\exists f \leftrightarrow x + \lfloor -x \rfloor \geq 0 \leftrightarrow \lfloor -x \rfloor \geq -x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Pero, por el T.56: } \lfloor -x \rfloor \leq -x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Entonces de (1) y (2), se sigue que: $\lfloor -x \rfloor = -x \leftrightarrow -x \in \mathbb{Z} \quad (T.55)$

$$\leftrightarrow x = -(-x) \in \mathbb{Z}$$

Luego, si $\lfloor x \rfloor = x \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{Z}$. Entonces en f : $f(x) = \sqrt{x + (-x)} + x(x) = x^2$

Por lo tanto, $\forall x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{Z}$: $-x \in \mathbb{Z}$ y $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

EJERCICIO 4. Sea f una función real definida en $[-2, 4>$ por la regla de correspondencia $f(x) = \frac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$. Hallar el rango de f .

Solución. Como los puntos críticos $x=-1$ y $x=3$ pertenecen al dominio de f , entonces, para eliminar las barras de valor absoluto debemos expresar el intervalo $[-2, 4>$ como una unión de subintervalos, esto es:

$$[-2, 4> = [-2, -1> \cup [-1, 3> \cup [3, 4>$$

y hallar el rango de f en cada subintervalo.

a) Si $x \in [-2, -1> \rightarrow |x+1| = -(x+1)$ y $|x-3| = -(x-3) \rightarrow f(x) = \frac{-(x+1)-3}{1-(x-3)} = 1 + \frac{8}{x-4}$

$$x \in [-2, -1> \leftrightarrow -2 \leq x < -1 \leftrightarrow -6 \leq x-4 < -5 \leftrightarrow -\frac{1}{5} < \frac{1}{x-4} \leq -\frac{1}{6}$$

$$\leftrightarrow -\frac{8}{5} < \frac{8}{x-4} \leq -\frac{4}{3} \leftrightarrow -\frac{3}{5} < 1 + \frac{8}{x-4} \leq -\frac{1}{3} \leftrightarrow y \in (-3/5, -1/3]$$

b) Si $x \in [-1, 3> \rightarrow |x+1| = x+1$ y $|x-3| = -(x-3) \rightarrow f(x) = \frac{(x+1)-3}{1-(x-3)} = -1 + \frac{2}{4-x}$

$$x \in [-1, 3> \leftrightarrow -1 \leq x < 3 \leftrightarrow -3 < -x \leq 1 \leftrightarrow 1 < 4-x \leq 5 \leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4-x} < 1$$

$$\leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{2}{4-x} < 2 \leftrightarrow -\frac{3}{5} \leq -1 + \frac{2}{4-x} < 1 \leftrightarrow y \in [-3/5, 1>$$

c) Si $x \in [3, 4> \rightarrow |x+1| = x+1$ y $|x-3| = x-3 \rightarrow f(x) = \frac{x+1-3}{1+x-3} = 1 \rightarrow y \in \{1\}$

$$\therefore \text{Ran}(f) = (-3/5, -1/3] \cup [-3/5, 1> \cup \{1\} = [-3/5, 1]$$

EJERCICIO 5. Determinar analíticamente el rango de la función f definida en $\mathbb{R}$ por: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Graficar la función.

Solución. a) Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow f(x) = \frac{x}{1+x} \rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ (1)

$$\text{Si } x \geq 0 \rightarrow x+1 \geq 1 \leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+x} \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{1+x} < 0$$

$$\leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{1+x} < 1 \rightarrow y \in [0, 1>$$

b) Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow f(x) = \frac{x}{1-x} \rightarrow f(x) = -1 + \frac{1}{1-x}$ (2)

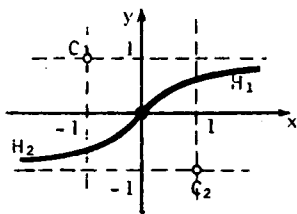
$$\text{Si } x < 0 \rightarrow -x > 0 \rightarrow 1-x > 1 \leftrightarrow 0 < \frac{1}{1-x} < 1$$

$$\leftrightarrow -1 < -1 + \frac{1}{1-x} < 0 \rightarrow y \in (-1, 0>$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [0, 1> \cup (-1, 0> = (-1, 1>$$

De (1) obtenemos: $(x+1)(y-1) = -1$

Entonces, la gráfica de (1) es parte de la



de la hipérbola H_1 de centro $C_1(-1,1)$, para $x > 0$.

De (2), se tiene: $(1-x)(y+1)=1 \leftrightarrow (x-1)(y+1)=-1$

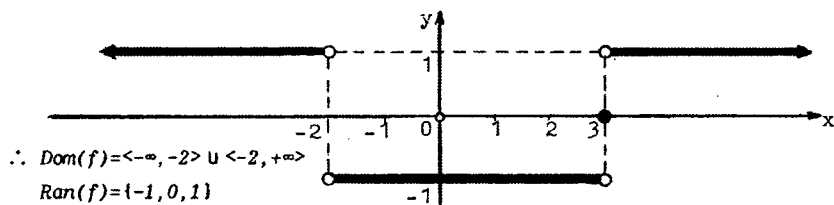
Luego, la gráfica de (2) es parte de la hipérbola H_2 , de centro $C_2(1,-1)$, para $x < 0$.

EJERCICIO 6. Se define la función g en $\mathbb{R}$ por $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x=0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

hallar el dominio, rango y graficar la función $f(x)=g\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$.

Solución. Por definición, g es la función signo, entonces:

$$f(x) = \text{Sgn}\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = \begin{cases} -1, & \text{si } \frac{x-3}{x+2} < 0 \leftrightarrow -2 < x < 3 \\ 0, & \text{si } \frac{x-3}{x+2} = 0 \leftrightarrow x=3 \\ 1, & \text{si } \frac{x-3}{x+2} > 0 \leftrightarrow x < -2 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$



EJERCICIO 7. Sea f una función con dominio $[-a, a]$, donde $a > 0$. Demostrar que f se puede expresar como $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, donde f_1 es una función par y f_2 es una función impar.

Demostración. En efecto, haciendo: $f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2}f(-x)$

$$+ f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad (1)$$

Sean $f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ y $f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

Si $f_1(x)$ es una función par, se debe cumplir que: $f_1(-x)=f_1(x)$

$$\text{Entonces: } f_1(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = f_1(x)$$

Luego, $f_1(x)$ es una función par.

Si $f_2(x)$ es una función impar, se debe cumplir que: $f_2(-x) = -f_2(x)$

$$\text{Entonces: } f_2(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -f_2(x)$$

Luego, f es una función impar. Por lo tanto, en (1): $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

EJERCICIO 8. En un triángulo ABC cuya base $AB=10$ y cuya altura $H=6$, está inscrito un rectángulo $PQRS$ tal que el lado $SR \subset$ lado AB . Si " y " es el área de dicho rectángulo, expresar " y " como una función de su base x . Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima.

Solución. Sea h la altura del rectángulo

$$\text{Área del rectángulo: } S = xh \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle PQC \rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{CD}{CE} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{6}{6-h}$$

$$\text{de donde: } h = \frac{3}{5}(10-x) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se tiene:

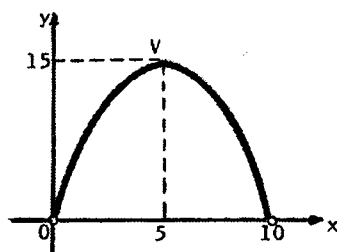
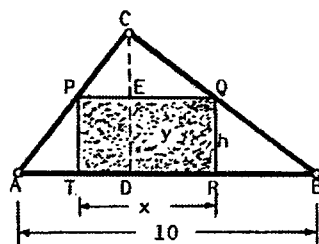
$$S(x) = \frac{3}{5}x(10-x) \leftrightarrow y = -\frac{3}{5}(x^2 - 10x)$$

$$\text{Completando el cuadrado: } y = -\frac{3}{5}(x-5)^2 + 15$$

Parábola de la forma: $y=a(x-h)^2+k$

Como $a=-3/5 < 0$, la parábola tiene su punto más alto en el vértice $V(5,15)$. Esto es, $y_{\max}=15$ para $x=5$. En (2), se tiene: $h=3$

Luego, $x=5$ y $h=3$ son las dimensiones del rectángulo de área óptima.



EJERCICIO 9. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la función $f(x)=2+(-1)^n$, donde $n=\llbracket x \rrbracket$.

Solución. Si $\llbracket x \rrbracket = n \leftrightarrow n \leq x < n+1$. Consideremos dos casos:

$$a) \text{ Para } n=\text{número par} \rightarrow n=2k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow (-1)^{2k} = 1$$

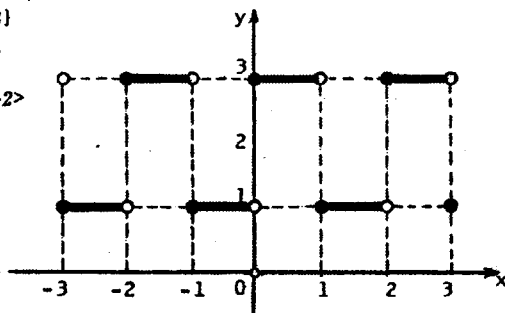
$$\therefore f(x) = 2+1 = 3, \quad \forall x \in [2k, 2k+1>$$

$$b) \text{ Para } n=\text{número impar} \rightarrow n=2k+1 \rightarrow (-1)^{2k+1} = -1$$

$$\therefore f(x) = 2-1 = 1, \quad \forall x \in [2k+1, 2k+2>$$

Luego, $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$ y $\text{Ran}(f)=\{1,3\}$

$$y f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \in [2k, 2k+1> \\ 1, & \text{si } x \in [2k+1, 2k+2> \end{cases}$$



EJERCICIO 10. Sea f una función real definida por $f(x) = x \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 4x \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ y cuyo dominio es $<0, 6]$, hallar el rango de la función.

Solución. Si $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = n \iff n \leq \frac{x}{m} < n+1, m > 0 \iff m \cdot n \leq x < m(n+1)$
 $\iff x \in [mn, m(n+1))$

Obsérvese que los subintervalos en que se divide el dominio $<0, 6]$ para $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ y $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ son de longitud doble y triple respectivamente, es decir:

a) Si $m=2 \rightarrow x \in [2n, 2(n+1))$, $n=0, 1, 2, 3$; ya que $0 < \frac{x}{2} \leq 3$

Entonces para cada valor de n tendremos:

$$x \in <0, 2> \cup [2, 4> \cup [4, 6> \cup \{6\}$$

b) Si $m=3 \rightarrow x \in [3n, 3(n+1))$, $n=0, 1, 2$; ya que $0 < \frac{x}{3} \leq 2$ (1)

Entonces para cada valor de n se tiene: $x \in <0, 3> \cup [3, 6> \cup \{6\}$ (2)

Interceptando (1) y (2) resulta: $x \in <2, 3> \cup [3, 4> \cup [4, 6> \cup \{6\}$

Luego, si $f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 4x \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$, hallaremos los valores de $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ y $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ en cada uno de estos intervalos.

(1) Para $x \in <2, 3> \rightarrow (x/2) \in <1, 3/2>$ y $(x/3) \in <2/3, 1>$

$$f(x) = x^2(1) - 4x(0) = x^2 \rightarrow f(x) \in <4, 9>$$

(2) Para $x \in [3, 4> \rightarrow (x/2) \in [3/2, 2>$ y $(x/3) \in [1, 4/3>$

$$f(x) = x^2(1) - 4x(1) = x^2 - 4x \rightarrow f(x) \in [-3, 0>$$

(3) Para $x \in [4, 6> \rightarrow (x/2) \in [2, 3>$ y $(x/3) \in [4/3, 2>$

$$f(x) = x^2(2) - 4x(1) = 2x^2 - 4x \rightarrow f(x) \in [16, 48>$$

(4) Para $x=6 \rightarrow f(x) = f(5) = 36(3) - 24(2) = 60$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [-3, 0> \cup <4, 9> \cup [16, 48> \cup \{60\}$$

EJERCICIO 11. Si $4f(x-3) = x^2 + 4$, hallar los valores de a tales que el ran-

go de g sea $<-3, 3>$, donde: $g(x) = \frac{f(2x-3) - ax}{f(2x-3) + x}$

Solución. $4f(x-3) = x^2 + 4 \rightarrow 4f(2x-3) = (2x)^2 + 4 = 4x^2 + 4 \rightarrow f(2x-3) = x^2 + 1$

$$\rightarrow g(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}. \text{ Si } \text{Ran}(g) = <-3, 3> \rightarrow -3 < \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \quad (1)$$

Dado que $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Verificar), entonces en (1) se tiene:

$$-3(x^2 + x + 1) < x^2 - ax + 1 < 3(x^2 + x + 1)$$

$$\text{de donde: } [4x^2 - (a-3)x + 4 > 0] \wedge [2x^2 + (a+3)x + 2 > 0] \quad (2)$$

Para que se cumpla ambas desigualdades de (2), el discriminante de los primeros miembros debe ser negativo, esto es:

$$[(a-3)^2 - 4(4)(4) < 0] \wedge [(a+3)^2 - 4(2)(2) < 0] \iff a \in <-5, 1> \quad (\text{Verificar})$$

EJERCICIO 12. Hallar el rango y construir la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|+2} & , \text{ si } -7 \leq x < -2 \\ \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + x^2 & , \text{ si } |x| \leq 2 \\ \frac{1-|x+1|}{2x-1} & , \text{ si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Solución. (1) Sea $f_1(x) = \sqrt{|x|+2}$, si $-7 \leq x < -2$

$$\text{Dado que } x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow f_1(x) = \sqrt{2-x}$$

$$\text{Si } -7 \leq x < -2 \rightarrow 2 < -x \leq 7 \leftrightarrow 4 < 2-x \leq 9 \leftrightarrow 2 < \sqrt{2-x} < 3 \rightarrow y \in (2, 3]$$

(2) Sea $f_2(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + x^2$, si $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Si } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = n \leftrightarrow n \leq \frac{x}{2} < n+1 \leftrightarrow 2n \leq x < 2(n+1)$$

Luego, si $f_2(x) = n + x^2$, damos valores a n hasta cubrir el intervalo $[-2, 2]$

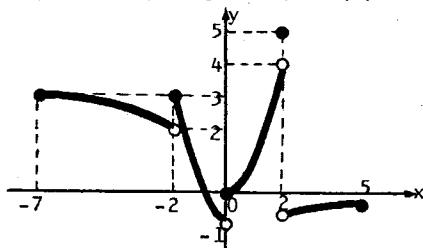
$$\rightarrow f_2(x) = \begin{cases} -1 + x^2, & \text{si } -2 \leq x < 0, n = -1 \rightarrow y \in (-1, 3] \\ 0 + x^2, & \text{si } 0 \leq x < 2, n = 0 \rightarrow y \in [0, 4] \\ 1 + x^2, & \text{si } x = 2, n = 1 \rightarrow y \in \{5\} \end{cases}$$

(3) Sea $f_3(x) = \frac{1-|x+1|}{2x-1}$, si $2 < x \leq 5$. Como $x > 0 \rightarrow |x+1| = x+1$

$$\rightarrow f_3(x) = -\frac{x}{2x-1}, \text{ si } 2 < x \leq 5 \rightarrow y \in (-2/3, -5/9] \text{ (Verificar)}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = (2, 3] \cup (-1, 3] \cup [0, 4] \cup \{5\} \cup (-2/3, -5/9] = (-2/3, 5] \cup \{5\}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{si } -7 \leq x < -2 \\ x^2 - 1, & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 + 1, & \text{si } x = 2 \\ -\frac{x}{2x-1}, & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$



EJERCICIO 13. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x+|x|}{|x| - \lfloor x \rfloor}$, hallar el dominio, rango y graficar la función.

Solución. La función es real $\leftrightarrow |x| - \lfloor x \rfloor \neq 0$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $x < 0 \rightarrow \lfloor x \rfloor \leq -1$ y $|x| > 0 \rightarrow |x| - \lfloor x \rfloor > 0$

$$\text{Pero si } x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow |x| + x = 0 \rightarrow f(x) = \frac{0}{(+)} = 0$$

$$\text{Luego, si } f(x) = 0, \forall x \in (-\infty, 0) \rightarrow x \in \mathbb{R}^- \wedge \text{Ran}(f) = \{0\} \quad (1)$$

Caso 2. Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$

$$\text{Si } |x| - \lfloor x \rfloor = 0 \rightarrow \lfloor x \rfloor = x \leftrightarrow (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \geq 0) \leftrightarrow x \in \mathbb{Z}^+ \quad (2)$$

Entonces de (1) y (2) se tiene que: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^+$

Para determinar el rango en el Caso 2, consideremos: a) $0 < x < 1$ y

$$b) x > 1 | x \notin \mathbb{Z}^+$$

$$a) 0 < x < 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \text{ y } |x| = x \rightarrow f(x) = \frac{x+x}{x-0} = 2$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = \{2\}, \forall x \in (0, 1) \quad (3)$$

$$b) x > 1 | x \notin \mathbb{Z}^+. \lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1, n \geq 0$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x+x}{x-n} = 2 + \frac{2n}{x-n} \leftrightarrow x \in [n, n+1), n \geq 0$$

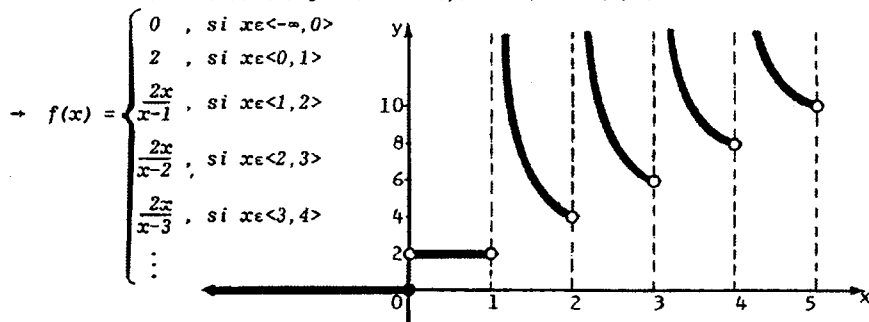
$$\text{Si } n \leq x < n+1 \rightarrow 0 \leq x-n < 1 \rightarrow \frac{1}{x-n} > 1 \quad (4)$$

Pero como $x > 1$ y $\lfloor x \rfloor = n \geq 1 \rightarrow 2n \geq 2 > 0$, luego, en (4)

$$\frac{1}{x-n} > 1 \leftrightarrow \frac{2n}{x-n} > 2n \leftrightarrow 2 + \frac{2n}{x-n} > 2n+2 \rightarrow f(x) > 2n+2 \text{ (pero } n \geq 1)$$

$$\rightarrow f(x) > 4 \rightarrow y \in (4, +\infty), \text{ si } x > 1, x \notin \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

Por lo tanto, de (1), (3) y (5): $\text{Ran}(f) = (4, +\infty) \cup \{2\}$



EJERCICIO 14. Hallar el dominio y trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x - \lfloor x \rfloor| & , \text{ si } \lfloor x \rfloor \text{ es par} \\ |x - \lfloor x+1 \rfloor| & , \text{ si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución. (1) Sea $f_1(x) = |x - \lfloor x \rfloor|$, si $\lfloor x \rfloor$ es par.

Por el T.56: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$

Entonces: $|x - \lfloor x \rfloor| = x - \lfloor x \rfloor \rightarrow f_1(x) = x - \lfloor x \rfloor$, si $\lfloor x \rfloor$ es par.

$$\lfloor x \rfloor = n = 2k \leftrightarrow 2k \leq x < 2k+1, k \in \mathbb{Z} \rightarrow f_1(x) = x - 2k, \text{ si } 2k \leq x < 2k+1$$

$$(2) \text{ Sea } f_2(x) = |x - \lfloor x+1 \rfloor| = |x - \lfloor x \rfloor - 1|$$

$$\text{Pero de (1): } x - \lfloor x \rfloor < 1 \rightarrow x - \lfloor x \rfloor - 1 < 0$$

$$\text{Luego, } f_2(x) = -(x - \lfloor x \rfloor - 1) = 1 - x + \lfloor x \rfloor, \text{ si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar.}$$

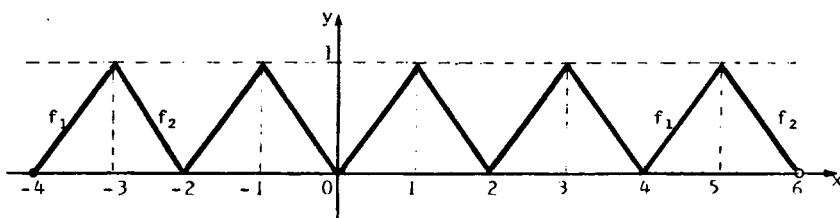
$$\lfloor x \rfloor = n = 2k+1 \leftrightarrow 2k+1 \leq x < 2k+2 \rightarrow f_2(x) = 2k+2-x$$

De (1) y (2), la regla de correspondencia de f es:

$$f(x) = \begin{cases} x-2k & , \text{ si } 2k \leq x < 2k+1 \\ 2k+2-x & , \text{ si } 2k+1 \leq x < 2k+2 \end{cases}$$

Entonces, para algunos valores de k obtenemos:

$$f_1(x) = \begin{cases} x+4 & , \text{ si } -4 \leq x < -3, k=-2 \\ x+2 & , \text{ si } -2 \leq x < -1, k=-1 \\ x & , \text{ si } 0 \leq x < 1, k=0 \\ x-2 & , \text{ si } 2 \leq x < 3, k=1 \\ x-4 & , \text{ si } 4 \leq x < 5, k=2 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -2-x & , \text{ si } -3 \leq x < -2, k=-2 \\ -x & , \text{ si } -1 \leq x < 0, k=-1 \\ 2-x & , \text{ si } 1 \leq x < 2, k=0 \\ 4-x & , \text{ si } 3 \leq x < 4, k=1 \\ 6-x & , \text{ si } 5 \leq x < 6, k=2 \end{cases}$$



$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Ran}(f) = [0, 1]$

Obsérvese que la función f tiene un período mínimo $T=2$.

EJERCICIO 15. Hallar el rango y construir la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{2-x}{|x| - \lfloor x \rfloor}, \text{ si } x \in [-4, 4]$$

Solución. a) Si $x > 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow f_1(x) = \frac{2-x}{x - \lfloor x \rfloor}, \text{ si } x \in [0, 4]$

$$\text{Vemos que } \exists f \leftrightarrow x - \lfloor x \rfloor \neq 0 \leftrightarrow \lfloor x \rfloor \neq x \rightarrow x \notin \mathbb{Z}^+$$

Es decir, $\text{Dom}(f_1) = [0, 4] - \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\text{Si } \lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1 \rightarrow f_1(x) = \frac{2-x}{x-n}, n=0, 1, 2, 3$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x}, 0 < x < 1, n=0 \rightarrow \begin{cases} f_1(0) = +\infty \text{ (Asíntota } x=0) \\ f_1(1) = 1 \end{cases} \\ \frac{2-x}{x-1}, 1 < x < 2, n=1 \rightarrow \begin{cases} f_1(1) = +\infty \text{ (Asíntota } x=1) \\ f_1(2) = 0 \end{cases} \\ \frac{2-x}{x-2} = -1, 2 < x < 3, n=2 \rightarrow f_1(x) = -1 \text{ (Constante)} \\ \frac{2-x}{x-3}, 3 < x < 4, n=3 \rightarrow \begin{cases} f_1(3) = -\infty \text{ (Asíntota } x=3) \\ f_1(4) = -2 \end{cases} \end{cases}$$

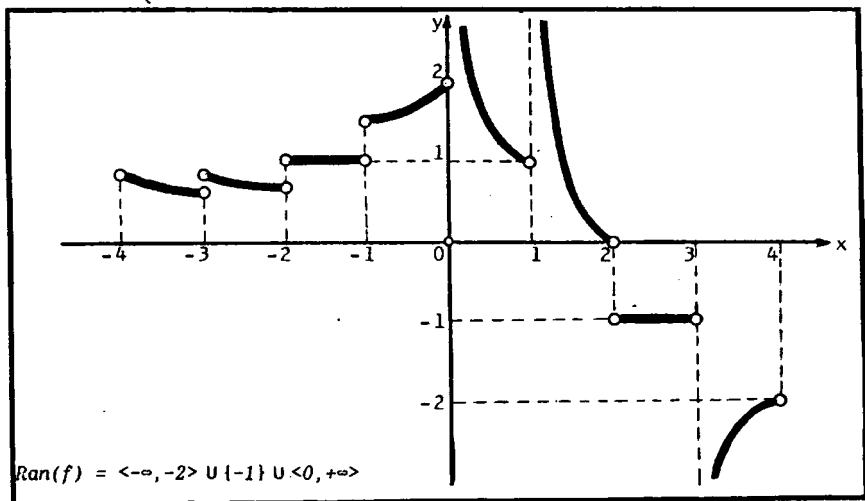
$$\text{b) Si } x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow f_2(x) = \frac{2-x}{-x - \lfloor x \rfloor} = \frac{x-2}{x + \lfloor x \rfloor}, x \in [-4, 0)$$

$$\exists f_2 \leftrightarrow x + \lfloor x \rfloor \neq 0 \leftrightarrow \lfloor x \rfloor \neq -x \rightarrow x \notin \mathbb{Z}^-$$

Es decir, $\text{Dom}(f) = [-4, 0) \cup \{-4, -3, -2, -1\}$

Si $\llbracket x \rrbracket = n \leftrightarrow n \leq x < n+1 \rightarrow f_2(x) = \frac{x-2}{x+n}, n = -1, -2, -3, -4$

$$\rightarrow f_2(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1}, & -1 \leq x < 0, n=-1 \rightarrow f_2(-1)=3/2; f_2(0)=2 \\ \frac{x-2}{x-2}, & -2 \leq x < -1, n=-2 \rightarrow f_2(x)=1 \text{ (constante)} \\ \frac{x-2}{x-3}, & -3 \leq x < -2, n=-3 \rightarrow f_2(-3)=5/6; f_2(-2)=4/5 \\ \frac{x-2}{x-4}, & -4 \leq x < -3, n=-4 \rightarrow f_2(-4)=3/4; f_2(-3)=5/7 \end{cases}$$



EJERCICIOS: Grupo 36

- Sean las funciones f y g de variable real definidas por $f(x)=3x^2+6x+8$ y $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$. Hallar $[\text{Dom}(f) \cup \text{Ran}(f)]'$.
- Hallar el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{|2x-5|}$
- Sean f y g dos funciones definidas por $f(x)=-\sqrt{2-x}+3$ y $g(x)=x^2+14x+50$. Hallar $\text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g)$
- Sean $f(x)=\llbracket x+2 \rrbracket + \llbracket 1-x \rrbracket$, $g(x)=|x+2|-|1-x|$, hallar $\text{Ran}(f) \cap \text{Ran}(g)$.
- Si $f(x) = \frac{2x^2-ax+1}{x^2+2x+2}$, hallar todos los valores de a para los cuales

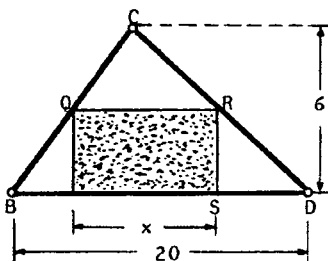
$$-1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

6. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ por la igualdad $f(x) = \frac{6x^2+2mx+10}{|5x^2-3x+1|}$, hallar todos los valores reales de m para los cuales $f(x) > 1$.
7. Si A es el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\lfloor 1-x \rfloor + 1}$ y B es el rango de $g(x) = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$, hallar $A \cup B$.
8. Si f es una función cuadrática, tal que $f(\frac{x}{2}-1) - f(\frac{x}{2}+1) = -8(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; hallar el valor mínimo de f , si $f(0)=1$.
9. Hallar el mínimo valor de la función f definida en $\mathbb{R}$ por:
 $f(x) = 2x^2 + (2\sqrt{5}-1)x - \sqrt{5}$.
10. Una ventana rectangular está rematada en la parte superior por un semicírculo. El perímetro (total) de dicha ventana es 2 m. Hallar cual debe ser la longitud de la base de dicho rectángulo para que la superficie de la ventana sea mayor posible.

11. Sea BCD un triángulo como se muestra en la figura adjunta.

Eligiendo cuatro puntos de este triángulo se construye un rectángulo como PQRS.

- a) Expresar el área del rectángulo como función de la longitud x del lado indicado.
- b) Determinar las dimensiones del rectángulo como PQRS, que tenga área máxima.



12. Un fabricante puede producir calzados a un costo de \$20 cada par. Calcular la que si fija un precio de x dólares por par, podrá vender $120-x$ pares de calzado al mes.
- a) Expresar la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al cual vende cada par de calzados.
- b) Si se conoce la cantidad de dólares obtenidos como utilidad de un mes, por la venta de calzados, ¿es posible determinar el precio de venta de g se mes?. Justificar demostrando una propiedad de la función hallada en a).
- c)Cuál es la utilidad mensual máxima que puede obtener el fabricante por la venta de los calzados?
13. Un fabricante de automóviles encuentra que el costo diario total para x automóviles es $(80+63x)$ dólares. Sabiendo que la función demanda en el mercado local viene dada por $\$(105-x)=p$, hallar la función de utilidad

y la máxima utilidad, sabiendo que como incentivo por ventas se le da \$80 adicionales.

14. Un pedazo de alambre de 10 m de longitud se corta en dos partes. Una de las partes es doblada en forma de cuadrado y la otra en forma de circunferencia.

a) Determinar las longitudes de la circunferencia y del perímetro del cuadrado, de modo que sea mínima la suma de las áreas de las figuras formadas.

b) Qué porción del área mínima total es el área del cuadrado correspondiente

15. Hallar el dominio y rango de la función $f = \{(x, \frac{x}{x-4}) \mid \sqrt{x}(x^2-4) \geq 0\}$.

16. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-x-1}{x^2+3x}}$ y $g(x) = |x| + |3-x|$, hallar:
 $\text{Dom}(f) \Delta \text{Ran}(g)$.

17. Determinar analíticamente el rango de las funciones:

$$f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 12x + 27}, \quad x \in (-\infty, -11] \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 6x + 6, \quad x \in (0, +\infty).$$

18. Hallar todos los valores reales de x , si es que existen, tales que:

$$\text{Sgn}\left(\frac{x-1}{|x|-2}\right) + \text{Sgn}\left(\frac{x^2-1}{2-x}\right) = 0$$

19. Si $f(x) = \frac{2x^2-kx+1}{x^2+2x+2}$, hallar todos los valores reales de k para los cuales $-1 < f(x) < 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

20. Determinar el rango y trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = |x-1| + |x+1|$$

$$c) f(x) = |2x-1| + |x-2|$$

$$b) f(x) = |x+2| - 2|3-x|, \quad x \in [-10, 10]$$

$$d) f(x) = |x+2| + |x-2| - |x|-1$$

21. Graficar y hallar el dominio de la función definida en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = (x^2+4) \lfloor 2x+3 \rfloor.$$

22. Determinar el rango y la gráfica de la función definida en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = |x^2 \lfloor \frac{5-x}{2} \rfloor - 4|, \quad x \in (1, 3).$$

23. Hallar el dominio, rango y trazar la gráfica de la función dada:

$$a) f(x) = 2u(x) + x^2 u(x-1) - u(x-2)$$

$$b) f(x) = xu(\lfloor x+3 \rfloor) - x \text{Sgn}(|x|-1)$$

24. Hallar el rango de la función: $f(x) = \frac{x^2 \lfloor \frac{2-x}{2} \rfloor + 3x-1}{|5x-1|-15+6|x+2|}$, si $x \in (-2, 1/5)$

Para cada una de las siguientes funciones, hallar el dominio, el rango y esbozar su gráfica.

$$25. f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$$

$$26. f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 13x - 3}{x + 3}$$

$$27. f(x) = \frac{(x+1)(x^2+3x-10)}{x^2+6x+5}$$

$$28. f(x) = \frac{x^3+9x^2+27x+35}{x+5}$$

$$29. f(x) = \frac{x^3-3x^2-11x^2+23x+6}{x^2-x-6}$$

$$30. f(x) = \frac{(x^2+5x+6)(x^2+2x-24)}{x^2-2x-8}$$

$$31. f(x) = |x| + |x-1|$$

$$32. f(x) = |x| \cdot |x-1|$$

$$33. f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

$$34. f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

$$35. f(x) = \frac{|x|}{\lfloor x \rfloor}$$

$$36. f(x) = \left\lfloor \frac{|x| - 2}{3-x} \right\rfloor$$

$$37. f(x) = |x-2| + |x+1|$$

$$38. f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor} - 3x$$

$$39. f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - x}$$

$$40. f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

$$41. f(x) = \frac{2-x}{|x| - \lfloor 2x \rfloor}$$

$$42. f(x) = |x - \lfloor x \rfloor|, \text{ si } \lfloor x \rfloor \text{ es par}$$

$$43. f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es par} \\ 2x - \lfloor x+1 \rfloor, & \text{si } \lfloor x \rfloor \text{ es impar} \end{cases}$$

$$44. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-2x-2}{x+1}, & \text{si } x \in [-3, 2) \\ 8-2x, & \text{si } x \in [2, 4) \end{cases}$$

$$45. f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x^2-3x, & \text{si } x \in (1, 4] \end{cases}$$

$$46. f(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{si } -4 \leq x < -1 \\ |x-1|+x, & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x^2-4x+4, & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$47. f(x) = \begin{cases} |x+3|, & \text{si } -5 < x \leq -1 \\ 2x^2, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 12-2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$48. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-9}, & \text{si } -5 < x \leq -3 \\ |x+3|-2, & \text{si } -3 < x \leq 5 \\ x^2-10x+26, & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$49. f(x) = \begin{cases} x^2-2, & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x-|x-2|, & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2+\sqrt{x-4}, & \text{si } 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

$$50. f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{si } -2 < x < 3 \\ x + \left\lfloor \frac{2}{1-x} \right\rfloor, & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

51. Determinar analíticamente el rango de la función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2+10x+21, & \text{si } x \in [-7, -5] \cup [-2, -1] \\ \sqrt{x+1} + 1, & \text{si } x \in (-1, 3] \end{cases} \text{ Graficar la función.}$$

$$52. \text{ Sea la función: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-2x}, & \text{si } x \in \{|x-1| > 1\} \cap \{|x-1| < 3\} \\ x^2-4x-4\text{Sgn}(|x-3|), & \text{si } x \in \{|x-3| \geq 1\} \cap \{|x-1| \leq 1\} \end{cases}$$

Hallar su dominio, rango y construir su gráfica.

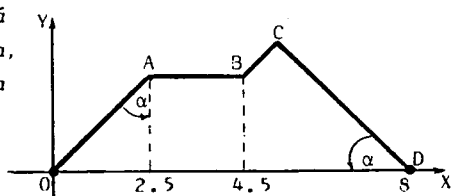
53. Hallar el dominio, rango y construir la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 2, & \text{si } -7 \leq x < -2 \\ \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + x, & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1 - |x+1|}{2x-1}, & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

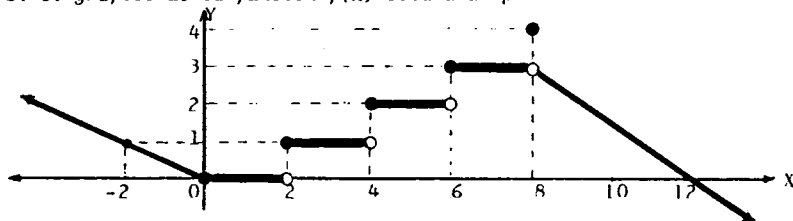
54. Determinar analíticamente el rango de las funciones dadas. Trazar sus gráficas.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{x-2}, & \text{si } |x-2| > 3 \\ \sqrt{x^2+4x-1}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2+|2x-5|, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-4}, & \text{si } \sqrt{x}(x^2-36) \geq 0 \\ \sqrt{3x-1}/2, & \text{si } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{9}{4} \\ x + \sqrt{x}, & \text{si } 9/4 < x \leq 4 \\ \frac{4}{\lfloor x+2 \rfloor}, & \text{si } 4 < x < 6 \end{cases}$$

55. Si el gráfico de la función f está representado por la figura adjunta, hallar la regla de correspondencia $\overline{OA} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{OX} \parallel \overline{AB}$. $\alpha = 45^\circ$



56. Si el gráfico de la función $f(x)$ está dado por:



a) Hallar la regla de correspondencia de $f(x)$

b) Resolver la inecuación: $\frac{f(x)[f(x)+1]}{f(x)-4} > 0$

57. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 5$

b) $f(x) = 5x^3 - 3x + 1$

c) $h(x) = 3 - 2x^2 + \cos^2 x$

d) $f(x) = (x|x| + \frac{1}{x}) \operatorname{Sen} x^2$

e) $g(x) = \frac{x}{(x+3)(x-3)}$

f) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

g) $f(x) = \sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}$

h) $g(x) = \sqrt{x + \lfloor -x \rfloor} + x \lfloor x \rfloor$

58. Comprobar si la siguiente función es par o impar. Bosquejar su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8x - 10, & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \\ -x^2 - 8x - 10, & \text{si } -6 \leq x < -2 \end{cases}$$

59. Sea $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Si $h(x) = f(x) + f(-x)$ y $g(x) = f(x) - f(-x)$, determinar cuál de las funciones, h o g , es par y cuál es impar.

60. Demostrar que la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \lfloor mx \rfloor - m \lfloor x \rfloor$ es una función periódica.

61. Demostrar que las siguientes funciones son periódicas y hallar el período mínimo para cada función.

a) $f(x) = \text{Sen}(ax + b)$

b) $f(x) = \frac{1}{2} - \text{Sen}^2 x$

c) $f(x) = |\text{sen } x|$

d) $f(x) = 2\text{Cos}\left(\frac{x-\pi}{3}\right)$

e) $f(x) = \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$



5.8 ALGEBRA DE LAS FUNCIONES

Sean f y g dos funciones reales cuyas reglas de correspondencia son $f(x)$ y $g(x)$. Se define entonces las cuatro operaciones: suma, diferencia, producto y cociente de f y g del modo siguiente:

(1) La función **suma**, denotada por " $f+g$ ":

$$f+g = \{(x, y) | y = f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

(2) La función **diferencia**, denotada por " $f-g$ ":

$$f-g = \{(x, y) | y = f(x) - g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

(3) La función **producto**, denotada por " $f \cdot g$ ":

$$f \cdot g = \{(x, y) | y = f(x) \cdot g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

(4) La función **cociente**, denotada por " $\frac{f}{g}$ ":

$$\frac{f}{g} = \{(x, y) | y = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g), g(x) \neq 0\}$$

EJEMPLO 1. Si $f = \{(-3, 2), (0, 0), (2, 4), (3, -1), (4, 3)\}$ y $g = \{(2, 0), (3, 4), (4, 7), (6, 2)\}$. Hallar: a) $f+g$ b) $f \cdot g$ c) f/g d) $f^2 + 3g$

Solución. $\text{Dom}(f) = \{-3, 0, 2, 3, 4\}$ y $\text{Dom}(g) = \{2, 3, 4, 6\} \rightarrow \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{2, 3, 4\}$

Aplicando la definición correspondiente se tiene:

$$\begin{aligned} \text{a) } f+g &= \{(x, f(x)+g(x)) | x \in \{2, 3, 4\}\} = \{(2, 4+0), (3, -1+4), (4, 3+7)\} \\ &= \{(2, 4), (3, 3), (4, 10)\} \end{aligned}$$

$$b) f \cdot g = \{(x, f(x) \cdot g(x)) | x \in \{2, 3, 4\}\} = \{(2, 4 \times 0), (3, -1 \times 4), (4, 3 \times 7)\} \\ = \{(2, 0), (3, -4), (4, 21)\}$$

$$c) \frac{f}{g} = \{(x, \frac{f(x)}{g(x)}) | x \in \{2, 3, 4\}\} = \{(2, 4/0), (3, -1/4), (4, 3/7)\} = \{(3, -\frac{1}{4}), (4, \frac{3}{7})\}$$

Obviamente, $2 \notin \text{Dom}(f/g)$ porque $g(2)=0$

$$d) f^2 + 3g = \{(x, f^2(x) + 3g(x)) | x \in \{2, 3, 4\}\} = \{(2, 4^2 + 0), (3, (-1)^2 + 12), (4, 3^2 + 21)\} \\ = \{(2, 16), (3, 13), (4, 30)\}$$

EJEMPLO 2. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = \{(-1, \sqrt{2}), (0, -1), (\sqrt{2}, 9), (3, 12)\}$. Determinar: a) $(f^2 - 3g)(\sqrt{2})$ b) $(3f + 5g^2)(-1)$

Solución. a) $f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 3(\sqrt{2}) - 1 = 3(1 + \sqrt{2})$ y $g(\sqrt{2}) = 9$

$$\text{Entonces: } (f^2 - 3g)(\sqrt{2}) = 9(1 + \sqrt{2})^2 - 3(9) = 18\sqrt{2}$$

$$b) (3f + 5g^2)(-1) = 3f(-1) + 5g^2(-1) = 3(2 - 3 - 1) + 5(\sqrt{2})^2 = 4$$

EJEMPLO 3. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4x - x^2} + \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

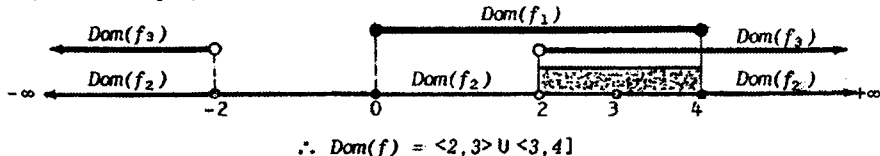
Solución. Si $f = f_1 + f_2 + f_3 \rightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(f_3)$

$$f_1(x) = \sqrt{4x - x^2} \rightarrow \exists f \leftrightarrow 4x - x^2 \geq 0 \leftrightarrow x(x-4) \leq 0 \\ \leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \rightarrow \text{Dom}(f_1) = [0, 4]$$

$$f_2(x) = \frac{x+2}{x-3} \rightarrow \exists f_2 \leftrightarrow x \neq 3 \rightarrow \text{Dom}(f_2) = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$f_3(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} \rightarrow \exists f_3 \leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \leftrightarrow x^2 > 4 \leftrightarrow x < -2 \text{ o } x > 2 \\ \text{Dom}(f_3) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Ilustración gráfica de la intersección de los dominios:



EJEMPLO 4. Determinar el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - |x-2|}}{x} + \sqrt{\lceil \text{Sgn}(x^2) + x^2 \rceil - 2}$$

Solución. Sea $f_1(x) = \frac{\sqrt{4 - |x-2|}}{x} \rightarrow \exists f \leftrightarrow 4 - |x-2| \geq 0 \wedge x \neq 0$

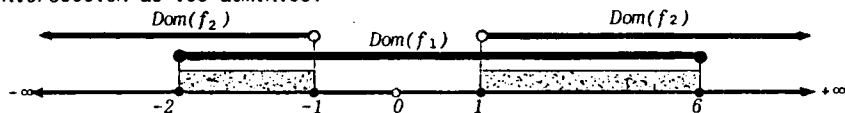
$$\leftrightarrow |x-2| \leq 4 \wedge x \neq 0 \leftrightarrow -4 \leq x-2 \leq 4 \wedge x \neq 0 \rightarrow \text{Dom}(f_1) = [-2, 6] - \{0\}$$

$$\text{Si } f_2(x) = \sqrt{\lceil \text{Sgn}(x^2) + x^2 \rceil - 2} \rightarrow \exists f \leftrightarrow \lceil \text{Sgn}(x^2) + x^2 \rceil \geq 2 \quad (1)$$

Por definición: $\text{Sgn}(x^2) = \begin{cases} -1, & \text{si } x^2 < 0 \text{ No puede ser } (x^2 \text{ es } + \forall x \in \mathbb{R}) \\ 0, & \text{si } x^2 = 0 \text{ No puede ser } (\text{En } f_1: x \neq 0) \\ 1, & \text{si } x^2 > 0 \text{ Si puede ser} \end{cases}$

Luego, si $\text{Sgn}(x^2)=1$, en (1): $\lfloor 1+x^2 \rfloor > 2 \rightarrow 1 + \lfloor x^2 \rfloor > 2 \rightarrow \lfloor x^2 \rfloor > 1$
 $\leftrightarrow x^2 > 1 \leftrightarrow x > 1 \text{ o } x < -1 \rightarrow \text{Dom}(f_2) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Intersección de los dominios:



$$\therefore \text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(f_2) = [-2, -1] \cup [1, 6]$$

EJEMPLO 5. Sean, $f(x)=4x-x^2-2$, $x \in [0, 4]$ y $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{si } 2 \leq x < 6 \end{cases}$.

Hallar $(f+g)(x)$ y graficar en un mismo plano f , g y $f+g$.

Solución. Vemos que g es una función seccionada cuyas subfunciones son funciones constantes, entonces si $g_1(x)=1$ y $g_2(x)=3$, se tiene:

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g_1) = [0, 4] \cap [-1, 2] = [0, 2]$$

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g_2) = [0, 4] \cap [2, 6] = [2, 4]$$

$$\text{Entonces: } (f+g)(x) = \begin{cases} 4x-x^2-2+1 = 4x-x^2-1, & x \in [0, 2] \\ 4x-x^2-2+3 = 4x-x^2+1, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

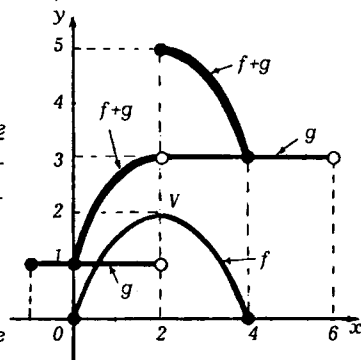
$$\text{Sea } y=4x-x^2-2=-(x-2)^2+2$$

Construimos las gráficas de la parábola con vértice en $V(2,2)$ y las rectas $y=1$, $y=3$.

Obsérvese que la gráfica de $f+g$ en $[0, 2]$ tiene la misma forma que la gráfica de f , siendo paralela a ésta, obteniéndose por un desplazamiento vertical de f . Lo mismo se puede notar en la gráfica de $f+g$ en $[2, 4]$.

En general, si $g(x)=c + f+g=\{x, f(x)+c\}$

$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Es decir, a cada valor de la ordenada de f se le debe sumar la constante c .



EJEMPLO 6. Sean las funciones f y g , cuyas reglas de correspondencia son

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 1-x, & \text{si } x \in [2, 5] \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in [0, 3] \\ 4, & \text{si } x \in [3, 6] \end{cases}$$

Hallar $f+g$, su rango y construir su gráfica.

Solución. En este caso vemos que tanto f como g son funciones seccionadas,

entonces los pasos para determinar $f+g$ son los siguientes:

- (1) Considerar a f y g como la suma de dos funciones, esto es:

$$f_1(x)=3x-2, \text{ si } x \in [0,2] ; \quad g_1(x)=x^2, \text{ si } x \in [0,3]$$

$$f_2(x)=1-x, \text{ si } x \in <2,5] ; \quad g_2(x)=4, \text{ si } x \in [3,6]$$

$$\text{Entonces: } f+g = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2)$$

$$= (f_1+g_1) + (f_1+g_2) + (f_2+g_1) + (f_2+g_2)$$

- (2) Hallar los dominios de cada una de las sumas parciales

$$\text{Dom}(f_1+g_1) = \text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(g_1) = [0,2] \cap [0,3] = [0,2]$$

$$\text{Dom}(f_1+g_2) = \text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(g_2) = [0,2] \cap [3,6] = \emptyset \rightarrow \#(f_1+g_2)$$

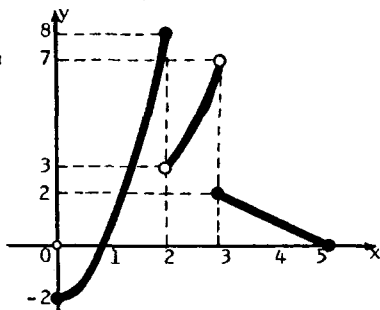
$$\text{Dom}(f_2+g_1) = \text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(g_1) = <2,5] \cap [0,3] = <2,3>$$

$$\text{Dom}(f_2+g_2) = \text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(g_2) = <2,5] \cap [3,6] = [3,5]$$

- (3) Sumar las imágenes correspondientes para obtener la regla de correspondencia de $f+g$.

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+3x-2, & x \in [0,2] \\ x^2-x+1, & x \in <2,3> \\ 5-x, & x \in [3,5] \end{cases}$$

$$\therefore \text{Ran}(f+g) = [-2,8]$$



EJEMPLO 7. Dadas las funciones $f: [-3,3] \rightarrow [-2,2] | f(x)=x^2-4$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | g(x)=\sqrt{9-x^2}$, y $h=\{(-3,2), (-2,3), (0,1), (1,-1), (2,4), (6,5)\}$.

- a) Construir la gráfica de f y hallar su dominio. b) Hallar $f+g$ y $g-h$.

Solución. a) Construyamos el rectángulo $[-3,3] \times [-2,2]$. Luego, tracemos la gráfica de la parábola: $y=x^2-4$ con vértice en $V(0,-4)$.

Interceptando las rectas $y=-2$, $y=2$ con la parábola obtenemos:

$$\text{Para } y=-2 \rightarrow -2=x^2-4 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$y=2 \rightarrow 2=x^2-4 \rightarrow x^2=6 \rightarrow x=\pm\sqrt{6}$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = [-\sqrt{6}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{6}]$$

b) Si $g(x)=\sqrt{9-x^2} \rightarrow \exists g \leftrightarrow 9-x^2 \geq 0$

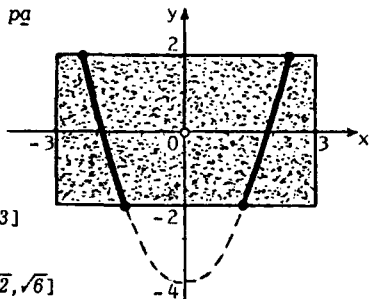
$$\rightarrow x^2 \leq 9 \rightarrow -3 \leq x \leq 3 \rightarrow \text{Dom}(g)=[-3,3]$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \text{Dom}(f)$$

$$\therefore (f+g)(x) = x^2-4+\sqrt{9-x^2}, \quad x \in [-\sqrt{6}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{6}]$$

$$\text{Dom}(h)=[-3,-2,0,1,2,6] \text{ y } \text{Dom}(g)=[-3,3] \rightarrow \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h) = \{-3,-2,0,1,2\}$$

Calculamos las ordenadas de g para cada uno de estos valores de x , esto es,



$$\text{si } g(x) = \sqrt{9-x^2} \rightarrow g = \{(-3, 0), (-2, \sqrt{5}), (0, 3), (1, 2\sqrt{2}), (2, \sqrt{5})\}$$

$$\therefore g-h = \{(-3, -2), (-2, \sqrt{5}-3), (0, 2), (1, 2\sqrt{2}+1), (2, \sqrt{5}-4)\}$$

EJEMPLO 8. Se definen las funciones f y g de la siguiente manera:

$$f(x) = \sqrt{x^2-16} \text{ y } g(x) = 2-|x-4|, \quad x \in (-6, 8]. \text{ Hallar: } f+g \text{ y } f/g$$

Solución. Determinemos los dominios de cada función:

$$\text{Si } f(x) = \sqrt{x^2-16} \rightarrow \exists f \leftrightarrow x^2-16 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \geq 16 \leftrightarrow x \leq -4 \text{ ó } x \geq 4$$

Dado que en la función g , el punto $x=4 \in (-6, 8]$, debemos desdoblar su dominio en: $(-6, 4) \cup [4, 8]$ y volver a definir esta función del modo siguiente:

$$|x-4| = -(x-4) \text{ si } x < 4, \text{ y } |x-4| = (x-4) \text{ si } x \geq 4$$

$$\rightarrow g(x) = \begin{cases} 2+(x-4) = x-2, & \text{si } x \in (-6, 4) \\ 2-(x-4) = 6-x, & \text{si } x \in [4, 8] \end{cases}$$

$$\text{Intersección de los dominios: } (x \leq -4 \text{ ó } x \geq 4) \cap (-6 < x < 4) = -6 < x \leq -4$$

$$(x \leq -4 \text{ ó } x \geq 4) \cap (4 \leq x \leq 8) = 4 \leq x \leq 8$$

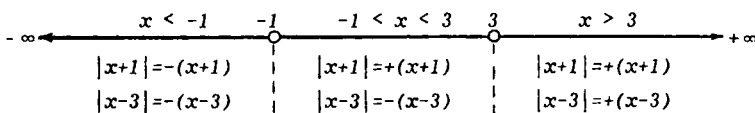
$$\therefore (f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-16}+x-2, & \text{si } x \in (-6, -4] \\ \sqrt{x^2-16}+6-x, & \text{si } x \in [4, 8] \end{cases} \quad \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-16}}{x-2}, & \text{si } x \in (-6, -4] \\ \frac{\sqrt{x^2-16}}{6-x}, & \text{si } x \in [4, 8] \end{cases}$$

EJEMPLO 9. Sean las funciones reales definidas por:

$$f(x) = |x-3| + |x+1| \text{ y } g(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{si } x < 1 \\ 2-x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Si definimos una función $h: (-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = f(x) + g(x)$; hallar el rango de h y esbozar su gráfica.

Solución. Siguiendo el método de los puntos críticos para f se tiene:



Como el $\text{Dom}(h) = (-1, 3)$, nos interesa el segundo intervalo, en donde:

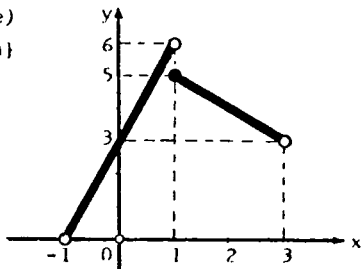
$$f(x) = -(x-3) + (x+1) = 4, \quad x \in (-1, 3) \quad (\text{Constante})$$

$$\rightarrow h = \{(x, y) | y = f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$$

$$\rightarrow h(x) = \begin{cases} 4+(3x-1) = 3x+3, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4+(2-x) = 6-x, & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

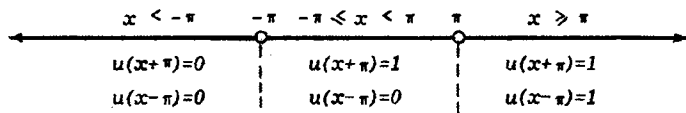
Geométricamente: $\text{Ran}(h) = (0, 6)$

Verificar analíticamente el $\text{Ran}(h)$.



EJEMPLO 10. Sea $g(x)=\text{Sen}x$, $h(x)=u(x+\pi)-u(x-\pi)$, donde u es la función escalón unitario. Verificar si la función: $f(x)=g(x).h(x)$ es par o impar y graficar $f(x)$.

Solución. Según el método de los puntos críticos, en la función u se tiene



$$\rightarrow h(x) = u(x+\pi) - u(x-\pi) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -\pi \\ 1, & \text{si } -\pi \leq x < \pi \\ 0, & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Como $g(x)=\text{Sen}x$ y $\text{Dom}(g)=\mathbb{R} \rightarrow \text{Dom}(g.h)=\text{Dom}(h)$

$$\therefore f(x) = g(x).h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -\pi \\ \text{Sen}x, & \text{si } -\pi \leq x < \pi \\ 0, & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Comprobaremos si f es una función par o impar arreglando convenientemente su regla de correspondencia, esto es:

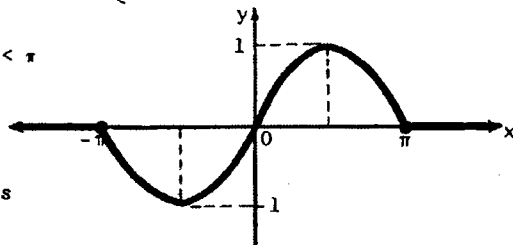
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -\pi \\ \text{Sen}x, & \text{si } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{si } x \geq \pi \end{cases} \rightarrow f(-x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -x \leq -\pi \\ \text{Sen}(-x), & \text{si } -\pi < -x < \pi \\ 0, & \text{si } -x \geq \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow f(-x) = - \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq \pi \\ \text{Sen}x, & \text{si } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{si } x \leq -\pi \end{cases}$$

$$\rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Luego, $\forall x \in \text{Dom}(f)$, $-x \in \text{Dom}(f)$ y

$f(-x) = -f(x)$, por lo tanto, f es una función impar.



EJEMPLO 11. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x-1 \rfloor, & x \in (-4, -1) \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x \in [0, 2] \\ |x-2| + 3, & x \in (-1, 0) \cup (2, 3] \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } x \in (-3, -1) \\ -2, & x \in [0, 2) \\ -3, & x \in [-1, 0) \cup [2, 3) \end{cases}$$

Hallar $f+g$ y construir su gráfica.

Solución. Simplificaremos la función f eliminando las barras de valor absoluto y los corchetes para intervalos de longitud unitaria.

$$\begin{array}{l|l} -4 < x < -3 \rightarrow -5 < x-1 < -4 \rightarrow \lfloor x-1 \rfloor = -5 & 0 \leq x < 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 = 1 \\ -3 \leq x < -2 \rightarrow -4 \leq x-1 < -3 \rightarrow \lfloor x-1 \rfloor = -4 & 1 \leq x < 2 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 = 2 \end{array}$$

$$-2 \leq x < -1 \rightarrow -3 \leq x-1 < -2 \rightarrow \lfloor x-1 \rfloor = -3 \quad \left| \quad x=2 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \rightarrow \lfloor x \rfloor + 1 = 3 \right.$$

$$x=-1 \rightarrow x-1=-2 \rightarrow \lfloor x-1 \rfloor = -2$$

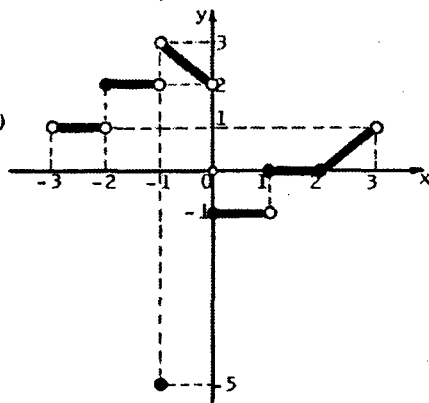
$$\text{Si } x \in (-1, 0) \rightarrow |x-2| = -(x-2) \rightarrow |x-2| + 3 = -x+2+3 = 5-x$$

$$x \in (2, 3] \rightarrow |x-2| = +(x-2) \rightarrow |x-2| + 3 = x-2+3 = x+1$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -5, & x \in (-4, -3) & (a) \\ -4, & x \in [-3, -2) & (b) \\ -3, & x \in [-2, -1) & (c) \\ -2, & x = -1 & (d) \\ 1, & x \in [0, 1) & (e) \\ 2, & x \in [1, 2) & (h) \\ 3, & x = 2 & (i) \\ 5-x, & x \in (-1, 0) & (j) \\ x+1, & x \in (2, 3] & (k) \end{cases}$$

$$\rightarrow g(x) = \begin{cases} 5, & x \in (-3, -1) & (m) \\ -2, & x \in [0, 2) & (n) \\ -3, & x \in [-1, 0) \cup [2, 3] & (p) \end{cases}$$

$$\therefore (f+g)(x) = \begin{cases} -4+5=1, & x \in (-3, -2) & (b \cap m) \\ -3+5=2, & x \in [-2, -1) & (c \cap m) \\ -2-3=-5, & x = -1 & (d \cap p) \\ 1-2=-1, & x \in [0, 1) & (e \cap n) \\ 2-2=0, & x \in [1, 2) & (h \cap n) \\ 3-3=0, & x = 2 & (i \cap p) \\ 5-x-3=2-x, & x \in (-1, 0) & (j \cap p) \\ x+1-3=x-2, & x \in (2, 3] & (k \cap p) \end{cases}$$



EJEMPLO 12. Dadas las funciones f y g , definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sgn}(|x^2-4|), & \text{si } |x| \leq 3 \\ \lfloor \frac{x+6}{3} \rfloor, & \text{si } x \in (3, 9) \\ x^2+10x+21, & \text{si } |x-3| > 6 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = 3, \text{ si } x \in (-\infty, 9)$$

Construir la gráfica de $f+g$, indicando explícitamente su rango.

Solución. Vamos a definir f , eliminando las barras y los corchetes.

$$(1) \text{ Sea } f_1(x) = \text{Sgn}(|x^2-4|), \text{ si } -3 \leq x \leq 3$$

$$\text{Por definición: } \text{Sgn}(|x^2-4|) = \begin{cases} -1, & \text{si } |x^2-4| < -1 \text{ (no puede ser: } |\alpha| \geq 0) \\ 0, & \text{si } |x^2-4| = 0 \leftrightarrow x=-2 \text{ ó } x=2 \\ 1, & \text{si } |x^2-4| > 1 \leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \end{cases}$$

Luego, si $x \in [-3, 3] \rightarrow f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{-2, 2\} \\ 1, & x \in [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3] \end{cases}$

(2) Sea $f_2(x) = \left\lceil \frac{x+6}{3} \right\rceil$, $x \in (3, 9) \leftrightarrow 3 < x < 9 \leftrightarrow 3 < \frac{x+6}{3} < 5 \rightarrow \left\lceil \frac{x+6}{3} \right\rceil = 3, 4$

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } 3 < \frac{x+6}{3} < 4 &\rightarrow \left\lceil \frac{x+6}{3} \right\rceil = 3, & x \in (3, 6) \\ 4 \leq \frac{x+6}{3} < 5 &\rightarrow \left\lceil \frac{x+6}{3} \right\rceil = 4, & x \in [6, 9) \end{aligned} \right\} \rightarrow f_2(x) = \begin{cases} 3, & x \in (3, 6) \\ 4, & x \in [6, 9) \end{cases}$$

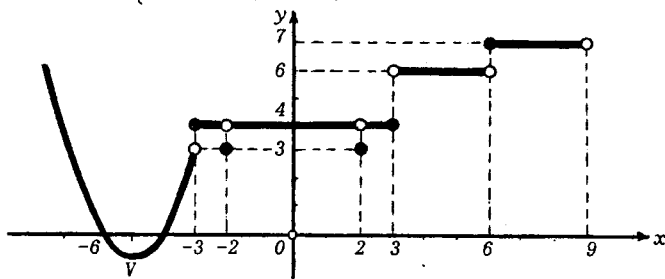
(3) Sea $f_3(x) = x^2 + 10x + 21$, $|x-3| > 6 \leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (9, +\infty)$

$$\text{Luego: } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{-2, 2\} \\ 1, & x \in [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3] \\ 3, & x \in (3, 6) \\ 4, & x \in [6, 9) \\ x^2 + 10x + 21, & x \in (-\infty, -3) \cup (9, +\infty) \end{cases}$$

Entonces: $f+g = \{(x, y) | y = f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)\}$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{9\}$ y $\text{Dom}(g) = (-\infty, 9) \rightarrow \text{Dom}(f+g) = (-\infty, 9)$

$$\therefore (f+g)(x) = \begin{cases} 3, & x \in \{-2, 2\} \\ 4, & x \in [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3] \\ 6, & x \in (3, 6) \\ 7, & x \in [6, 9) \\ x^2 + 10x + 24, & x \in (-\infty, -3) \end{cases}$$



El rango de $f+g$ se determina geométricamente a partir del vértice de la parábola $y = x^2 + 10x + 24 = (x+5)^2 - 1 \rightarrow V(-5, -1)$, $\therefore \text{Ran}(f+g) = [-1, +\infty)$

EJEMPLO 13. Sea F la función de variable real x definida por:

$$F(x) = \sqrt{9-x^2} \cdot \text{Sgn}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\right) + \left\lceil \frac{2x+5}{x+3} \right\rceil - 1$$

Determinar el dominio, el rango y construir su gráfica.

Solución. (1) Sea $f(x) = \sqrt{9-x^2} \rightarrow \exists f \leftrightarrow 9-x^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \leq 9 \leftrightarrow x \in [-3, 3]$

$$g(x) = \text{Sgn}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\right) \rightarrow \exists g \leftrightarrow x \geq -2, x \neq 1; h(x) = \left\lfloor \frac{2x+5}{x+3} \right\rfloor \rightarrow \exists h \leftrightarrow x \neq -3$$

$$\text{Entonces: } \text{Dom}(F) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h) = [-3, 3] \cap ([-2, +\infty) - \{1\}) \cap (\mathbb{R} - \{-3\}) \\ \rightarrow \text{Dom}(F) = [-2, 3] - \{1\} = [-2, 1] \cup (1, 3]$$

(2) Para construir la gráfica y determinar el rango de F , eliminaremos los corchetes y evaluaremos la función signo, esto es:

$$\frac{2x+5}{x+3} = 2 - \frac{1}{x+3} \rightarrow \left\lfloor \frac{2x+5}{x+3} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{-1}{x+3} \right\rfloor$$

$$\text{Si } x \in \text{Dom}(F) \rightarrow -2 \leq x \leq 3, x \neq 1 \rightarrow 1 < x+3 \leq 6 \leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+3} < 1 \\ \leftrightarrow -1 < -\frac{1}{x+3} \leq -\frac{1}{6} \rightarrow \left\lfloor -\frac{1}{x+3} \right\rfloor = -1$$

$$\text{Luego: } \left\lfloor \frac{2x+5}{x+3} \right\rfloor = 2-1 = 1 \rightarrow F(x) = \sqrt{9-x^2} \cdot \text{Sgn}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\right) \quad (\alpha)$$

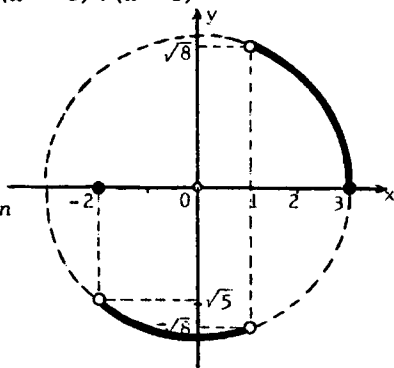
$$\text{Pero: } \text{Sgn}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}\right) = \begin{cases} -1, & \text{si } \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} < 0 \leftrightarrow -2 < x < 1 \\ 0, & \text{si } \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} = 0 \leftrightarrow x = -2 \\ 1, & \text{si } \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} > 0 \leftrightarrow (x > -2) \vee (x > 1) \end{cases}$$

(3) Interceptando con el dominio de F obtenemos en (α):

$$F(x) = \begin{cases} -\sqrt{9-x^2}, & \text{si } x \in (-2, 1) \\ 0, & \text{si } x = -2 \\ \sqrt{9-x^2}, & \text{si } x \in (1, 3] \end{cases}$$

Se observa que para cada raíz cuadrada, en el intervalo indicado, la gráfica de F es una parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

$$\therefore \text{Ran}(F) = [-3, -\sqrt{5}] \cup [0, 2\sqrt{2}]$$



EJEMPLO 14. Sean f y g dos funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor + 3x-1, & x \in (-2, 1] \\ x+8, & x \in (2, 8] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |5x-1| + 6|x+2| - 15, & x \in [-3, 0] \\ 3x-4, & x \in [1, 6] \end{cases}$$

a) Hallar el dominio y la regla de correspondencia de la función f/g .

b) Hallar el rango de la función f/g .

Solución. a) Sean: $f_1(x) = x^2 \left\lfloor \frac{2-x}{2} \right\rfloor + 3x-1$, $x \in (-2, 1]$ y $f_2(x) = x+8$, $x \in (2, 8]$

Eliminaremos las barras en g teniendo en cuenta que $1/5 \notin [-3, 0]$ y $-2 \in [-3, 0]$

$$\text{Si } -3 \leq x < -2 \rightarrow |5x-1| = -(5x-1) \text{ y } |x+2| = -(x+2)$$

$$-2 \leq x < 0 \rightarrow |5x-1| = -(5x-1) \text{ y } |x+2| = +(x+2)$$

$$\rightarrow g_1(x) = -(5x-1) - 6(x+2) - 15 = -11x - 26 \text{ y } g_2(x) = -(5x-1) + 6(x+2) - 15 = x - 2$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} -11x-26, & x \in [-3, -2] & (g_1) \\ x-2, & x \in [-2, 0] & (g_2) \\ 3x-4, & x \in [1, 6] & (g_3) \end{cases}$$

Intersección de los dominios de f y g :

$$\text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(g_1) = <-2, 1] \cap [-3, -2] = \emptyset \quad (\text{No existe } f/g)$$

$$\text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(g_2) = <-2, 1] \cap [-2, 0] = <-2, 0]$$

$$\text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(g_3) = <-2, 1] \cap [1, 6] = \{1\}$$

$$\text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(g_1) = <2, 8] \cap [-3, -2] = \emptyset \quad (\text{No existe } f/g)$$

$$\text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(g_2) = <2, 8] \cap [-2, 0] = \emptyset \quad (\text{No existe } f/g)$$

$$\text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(g_3) = <2, 8] \cap [1, 6] = <2, 6]$$

Eliminemos el corchete en $x \in <-2, 0]$ y calculemos $f_1(1)$ y $g_3(1)$:

$$\text{Si } -2 < x \leq 0 \rightarrow 0 \leq -x < 2 \leftrightarrow 2 \leq 2-x < 4 \leftrightarrow 1 \leq \frac{2-x}{2} < 2 \rightarrow \left\lceil \frac{2-x}{2} \right\rceil = 1$$

$$f_1(1) = (1)^2 \left\lceil \frac{2-1}{2} \right\rceil + 3(1) - 1 = 1(0) + 3 - 1 = 2 \quad ; \quad g_3(1) = 3(1) - 4 = -1$$

$$\therefore (f/g)(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-1}{x-2}, & x \in <-2, 0] \\ -2, & x=1 \\ \frac{x+8}{3x-4}, & x \in <2, 6] \end{cases} \rightarrow \text{Dom}(f/g) = <-2, 0] \cup \{1\} \cup <2, 6]$$

b) Para $x \in <-2, 0]$, si $h_1(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-2} \rightarrow \text{Ran}(h_1) = [1/2, 1]$ (Verificar)

Para $x=1 \rightarrow h_2(x) = -2 \rightarrow \text{Ran}(h_2) = \{-2\}$

Para $x \in <2, 6]$, si $h_3(x) = \frac{x+8}{3x-4} \rightarrow \text{Ran}(h_3) = [1, 5]$ (Verificar)

$$\therefore \text{Ran}(f/g) = [1/2, 1] \cup \{-2\} \cup [1, 5] = \{-2\} \cup [1/2, 5]$$

EJERCICIOS: Grupo 37

1. Si $f = \{(0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{2} + \sqrt{5}), (2, 0)\}$ y $g = \{(0, \sqrt{8}), (2, 1/2), (4, \sqrt{3})\}$, determinar:

a) $(f+g)(2)$ b) $(f \cdot g)(2)$ c) $(f^2+3g)(2)$

2. Determinar gráficamente las líneas que representan a $f+g$ y $g-f$, si:

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = x$ b) $f(x) = x$, $g = \{(-1, 2), (1/2, 3/4), (2, -3), (4, \sqrt{2})\}$

c) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = \left\lceil x \right\rceil$, $x \in [-2, 3]$

3. Dadas las funciones: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \text{Sgn}(x)$. Se define la función $H(x) = f(x+2) + g(x-2)$, hallar el rango de H .
4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 3, & \text{si } 3 < x \leq 6 \end{cases}$. Si $g(x) = f(3x) + f(x-2)$ hallar el dominio de g .
5. Si $f = \{(0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{5}), (2, 0)\}$ y $g = \{(0, \sqrt{8}), (2, 1/2), (4, \sqrt{3})\}$. Hallar $\frac{g(x)}{f(x)} + f^2$.
6. Si $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \in [0, 2] \\ 1-x, & x \in (2, 5] \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 3] \\ 4, & x \in [3, 6] \end{cases}$; hallar $f+g$ y construir su gráfica.
7. Se definen las funciones f y g de la siguiente manera: $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ y $g(x) = 2 - |x-1|$, $x \in [-2, 5]$, hallar $f+g$.
8. Dadas las funciones $f(x) = |x-2| - 1$, $x \in [-2, 6]$ y $g(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-3, 2] \\ 2, & x \in [2, 6] \end{cases}$. Hallar $f+g$ y construir las gráficas de f , g y $f+g$.
9. Sean las funciones f y g definidas de la siguiente manera:
 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-4, 0] \\ 3x+2, & x \in (0, 5] \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x-4, & x \in [-3, 2] \\ 2-x, & x \in (2, 8] \end{cases}$; hallar $f+g$.
10. Dadas las siguientes funciones, $f: [-2, 3] \rightarrow [1, 4]$ $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2x + 1$, $y \in [-1, 3]$; $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = |x^2 - 1| + x$, $y \leq 2$.
 a) Graficar la función $g+h$. b) Hallar el dominio de $f+g$.
11. Dadas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x - |x-1|$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2 - 2$, $x \geq -2$; $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, hallar el dominio de la función $(f+g) \cdot h$.
12. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $y \geq 5$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2|x-1| + 1$, $x \in [-3, 4]$. Hallar $f+g$, su rango y esbozar su gráfica.
13. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = |2x|$, trazar la gráfica de $f+g$ y hallar su rango.
14. Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{\frac{6-x}{x+4}}$, $g(x) = \lfloor \sqrt{x} - 1 \rfloor$, $x \in [0, 9]$, hallar:
 a) $f+g$ b) $\text{Dom}(f+g)$ c) $\text{Dom}(f/g)$
15. Sean las funciones $f: [-3, 5] \rightarrow [-5, 3]$ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ hallar: a) f/g b) $\text{Dom}(f/g)$
16. Si $f(x) = \begin{cases} |x-1| \lfloor \text{Sgn}(3-x) \rfloor, & x \in [0, 6] \\ x^2, & x \in (6, 10] \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \in [-8, 3] \\ x|x-2|, & x \in (3, 8] \end{cases}$ hallar g/f .
17. Si $f(x) = \begin{cases} 4x + \lfloor x \rfloor, & x \in [-3, 0] \\ |x^2 + 1|, & x \in (1, 6] \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \lfloor -x \rfloor - 2x, & -4 < x < -1 \\ |x-5|, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ Hallar la función $f+g$ y esbozar su gráfica.

18. Sean las funciones:
$$f(x) = \begin{cases} \text{Sgn}|x^2-4|, & \text{si } |x| \leq 3 \\ \left\lfloor \frac{x+6}{3} \right\rfloor, & \text{si } 3 < x < 9 \\ x^2+10x+21, & \text{si } |x-3| > 6 \end{cases}$$
 ; $g(x)=3, x \in (-\infty, 9)$

Hallar $f+g$ y construir su gráfica indicando su rango.

19. Sean f y g las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ x^2-14x+48, & \text{si } 6 \leq x < 10 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} \left\lfloor x/2 \right\rfloor, & \text{si } 1 \leq x < 8 \\ |2x-10|, & \text{si } 8 \leq x < 12 \end{cases}$$

a) Determinar la función $f-g$

b) Graficar la función $f-g$, indicando explícitamente su rango.

20. Si $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & \text{si } x \in [-4, 2] \\ x/2 + 5, & \text{si } x \in (2, 6] \\ 2x-4, & \text{si } x \in (6, 9] \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \in (0, 2) \\ 3, & \text{si } x \in [2, 8) \end{cases}$

Hallar las funciones: $h_1(x)=f(x) \cdot g(x)$ y $h_2(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

21. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + \left\lfloor x \right\rfloor, & \text{si } -3 < x < 0 \\ |x^2+1|-3, & \text{si } 1 < x < 6 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} \left\lfloor -x \right\rfloor - 5x, & \text{si } -4 < x < 1 \\ |x-3|, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Hallar la función $f+g$ y esbozar su gráfica.

22. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2-4|, & x \in [-6, 0] \\ 2, & x \geq 2 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ 1, & x < -2 \end{cases}$$

Hallar la regla de correspondencia de f/g y su rango.

23. Dadas las funciones: (Trazar la gráfica de $f+g$, indicando su rango)

$$f(x) = \begin{cases} \left\lfloor x-2 \right\rfloor, & \text{si } \left\lfloor x \right\rfloor \text{ es par} \\ 3x - \left\lfloor x+1 \right\rfloor, & \text{si } \left\lfloor x \right\rfloor \text{ es impar} \end{cases} ; \quad g(x) = \text{Sgn}(x^2-4), \text{ si } |x| \leq 3$$

24. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \left\lfloor x^2 \right\rfloor + |x^2-1| - 3, & x \in [-2, 2] \\ \frac{2x-1}{x-1}, & x \in (2, 4) \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} 4 - \left\lfloor x^2 \right\rfloor, & x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}$$

25. Construir la gráfica de $f-g$, sabiendo que:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} + 2, & -7 \leq x < -2 \\ \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + x^2, & |x| \leq 2 \\ \frac{1-|x+1|}{2x-1}, & 2 < x \leq 5 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{|x-1|}, & x > -1, x \neq 1 \\ \text{Sgn}(|x^2-1|-1), & x < -1 \end{cases}$$



5.9 COMPOSICION DE FUNCIONES

En el Capítulo 3, Sección 3.9.4, habíamos descrito que bajo ciertas condiciones era posible obtener, a partir de dos funciones f y g , una nueva función h , llamada la compuesta de aquellas, denotada por $h = \text{gof}$ y definida por:

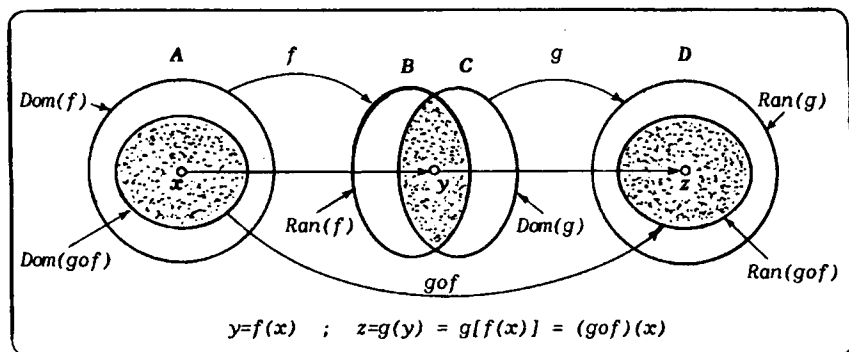
$$(\text{gof})(x) = g[f(x)], \quad \forall x \in \text{Dom}(\text{gof})$$

$$\text{gof} = \{(x, g[f(x)]) \mid x \in \text{Dom}(\text{gof})\}$$

donde: $\text{Dom}(\text{gof}) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in \text{Dom}(g)\}$

$$= \{x \mid x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

y cuya interpretación geométrica se muestra en el siguiente diagrama:



OBSERVACIONES

- (1) $\text{Dom}(\text{gof}) \subset \text{Dom}(f) = A$
- (2) $\text{Ran}(\text{gof}) \subset \text{Ran}(g) \subseteq D$
- (3) $\exists(\text{gof}) \leftrightarrow \text{Ran}(f) \cap \text{Dom}(g) \neq \emptyset$
- (4) Cuando el $\text{Ran}(f)$ está contenido en el $\text{Dom}(g)$, entonces la función gof está definida en el $\text{Dom}(f)$, esto es, si:

$$\text{Ran}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \rightarrow \text{Dom}(\text{gof}) = \text{Dom}(f)$$
- (5) Cuando $\text{Ran}(f) \not\subseteq \text{Dom}(g) \rightarrow \text{Dom}(\text{gof}) = \{x \mid x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$
- (6) La aplicación se hace de derecha a izquierda, es decir, la función de partida es la que está a la derecha de la notación "o".
 En gof , f es la función de partida y g la función de llegada.
 En fog , g es la función de partida y f la función de llegada.
- (7) Si $g: A \rightarrow B$ y $f: C \rightarrow D$, entonces: $(\text{fog})(x) = f[g(x)], \quad \forall x \in \text{Dom}(\text{fog})$
- (8) $\text{Dom}(\text{fog}) \subset \text{Dom}(g) = A$
- (9) $\text{Ran}(\text{fog}) \subset \text{Ran}(f) \subseteq D$

$$(10) \exists(f \circ g) \leftrightarrow \text{Ran}(g) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset$$

$$(11) \text{ Cuando } \text{Ran}(g) \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(g)$$

$$(12) \text{ Cuando } \text{Ran}(g) \not\subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = \{x | x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

EJEMPLO 1. Sean f y g dos funciones definidas por: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g = \{(-1, -2\sqrt{2}), (2, -1), (4, \sqrt{5}), (3, 4), (7, \sqrt{3})\}$. Hallar $f \circ g$.

Solución. El rango de la función de partida es: $\text{Ran}(g) = \{-2\sqrt{2}, -1, \sqrt{5}, 4\}$

$$\exists f \leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \geq 4 \leftrightarrow x \leq -2 \text{ o } x \geq 2$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [2, +\infty)$$

$$\text{Ran}(g) \cap \text{Dom}(f) = \{-2\sqrt{2}, \sqrt{5}, 4\} \neq \emptyset \rightarrow \exists f \circ g$$

Entonces, para $x = -2\sqrt{2}, \sqrt{5}, 4$, obtenemos en f : $y = 2, 1, 2\sqrt{3}$, respectivamente.

$$\text{Luego, } f = \{(-2\sqrt{2}, 2), (\sqrt{5}, 1), (4, 2\sqrt{3})\}$$

$$\text{Ahora, si } (1, -2\sqrt{2}) \in g \wedge (-2\sqrt{2}, 2) \in f \rightarrow (1, 2) \in (f \circ g)$$

$$(4, \sqrt{5}) \in g \wedge (\sqrt{5}, 1) \in f \rightarrow (4, 1) \in (f \circ g)$$

$$(7, \sqrt{3}) \in g \wedge (\sqrt{3}, 1) \in f \rightarrow (7, 1) \in (f \circ g)$$

$$(3, 4) \in g \wedge (4, 2\sqrt{3}) \in f \rightarrow (3, 2\sqrt{3}) \in (f \circ g)$$

$$\therefore f \circ g = \{(1, 2), (4, 1), (7, 1), (3, 2\sqrt{3})\}$$

EJEMPLO 2. Dadas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x+1) = x^2, x \in \langle -1, 7 \rangle$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | g(x-1) = 2x-1, x \in [1, +\infty)$, hallar: a) $(f \circ g)(x)$, b) $(g \circ f)(x)$

Solución. Si $f(x+1) = x^2 \rightarrow f(x) = (x-1)^2, g(x-1) = 2x-1 \rightarrow g(x) = 2(x+1)-1 = 2x+1$

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x+1) = (2x+1-1)^2 = 4x^2$$

$$\begin{aligned} \text{+ } \text{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \mathbb{R} | x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\} = x \in [1, +\infty) \wedge (2x+1) \in \langle -1, 7 \rangle \\ &= (x \geq 1) \wedge (-1 < 2x+1 \leq 7) = (x \geq 1) \wedge (-1 < x \leq 3) = [1, 3] \\ \therefore (f \circ g)(x) &= 4x^2, x \in [1, 3] \end{aligned}$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(x-1)^2] = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} | x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\} = x \in \langle -1, 7 \rangle \wedge (x-1)^2 \in [1, +\infty) \\ &= (-1 < x \leq 7) \wedge (x-1)^2 \geq 1 = (-1 < x \leq 7) \wedge (x \geq 2 \text{ o } x \leq 0) \\ \therefore (g \circ f)(x) &= 2x^2 - 4x + 3, x \in \langle -1, 0 \rangle \cup [2, 7] \end{aligned}$$

5.9.1 PROPIEDADES

Para las funciones f, g, h, I (Función identidad) se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{FC.1: } (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad (\text{Ley Asociativa})$$

$$\text{FC.2: En general: } f \circ g \neq g \circ f \quad (\text{No es conmutativa})$$

$$\text{FC.3: } (f+g)oh = (foh)+(goh) \quad (\text{Ley Distributiva para la suma})$$

$$\text{FC.4: } (f \cdot g)oh = (foh)(goh) \quad (\text{Ley Distributiva para la multiplicación})$$

$$\text{FC.5: } \exists ! 1 | f \circ 1 = 1 \circ f = f, \quad \forall f$$

$$\text{FC.6: } 1^n \circ 1^m = 1^{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{FC.7: } 1^n \circ (f+g) = (f+g)^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

EJEMPLO 3. Si $f=2I^2-3I$ y $g=I^2-I+2$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

$$\text{Solución. } fog = (2I^2-3I) \circ (I^2-I+2) = 2I^2 \circ (I^2-I+2) - 3I \circ (I^2-I+2) \quad (\text{FC.3})$$

$$= 2(I^2-I+2)^2 - 3(I^2-I+2) = 2I^4 - 4I^3 + 7I^2 - 5I + 2 \quad (\text{FC.7})$$

$$gof = (I^2-I+2) \circ (2I^2-3I) = I^2 \circ (2I^2-3I) - I \circ (2I^2-3I) + 2 \circ (2I^2-3I) \quad (\text{FC.3})$$

$$= (2I^2-3I)^2 - (2I^2-3I) + 2 = 4I^4 - 12I^3 + 7I^2 + 3I + 2 \quad (\text{FC.7})$$

$$\therefore fog \neq gof$$

EJEMPLO 4. Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x)=2x-3, x \in (-1, 3]$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | g(x)=x+2, x \in [-2, 4]$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | h(x)=3x+7, x \in (-6, 0]$. Hallar $f \circ g \circ h$ y su rango.

Solución. Según FC.1: $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Entonces, sea $F=f \circ g$ (g =función de partida, f =función de llegada)

$$(1) \text{ Como } \text{Ran}(g) = [0, 6] \not\subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Dom}(F) = \{x \in \mathbb{R} | x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(F) = (-2 \leq x < 4) \wedge (x+2) \in (-1, 3] = (-2 \leq x < 4) \wedge (-1 < x+2 \leq 3) \\ = (-2 \leq x < 4) \wedge (-3 < x \leq 1) = -2 \leq x \leq 1$$

$$(2) \text{ Entonces: } F(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x+2) = 2(x+2)-3 = 2x+1, \quad x \in [-2, 1]$$

$$(3) \text{ Ran}(h) \not\subseteq \text{Dom}(F) \rightarrow \text{Dom}(F \circ h) = \{x \in \mathbb{R} | x \in \text{Dom}(h) \wedge h(x) \in \text{Dom}(F)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(F \circ h) = x \in (-6, 0] \wedge (3x+7) \in [-2, 1] = (-6 < x \leq 0) \wedge (-2 \leq 3x+7 \leq 1) \\ = (-6 < x \leq 0) \wedge (-3 \leq x \leq -2) = -3 \leq x \leq -2$$

$$(4) \rightarrow (F \circ h)(x) = F[h(x)] = F(3x+7) = 2(3x+7)+1 = 6x+15, \quad x \in [-3, -2]$$

$$\therefore fogoh = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y=6x+15, x \in [-3, -2]\}$$

$$(5) \text{ Si } x \in [-3, -2] \leftrightarrow -3 \leq x \leq -2 \leftrightarrow -18 \leq 6x \leq -12 \leftrightarrow -3 \leq 6x+15 \leq 3$$

$$\therefore \text{Ran}(fogoh) = [-3, 3]$$

EJEMPLO 5. Si $f(x)=x^2-3x+5$, hallar dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2-x+3$.

$$\text{Solución. Si } (f \circ g)(x) = x^2-x+3 \rightarrow f[g(x)] = x^2-x+3$$

$$\text{Sea } u=g(x) \rightarrow f(u)=x^2-x+3 \quad (1)$$

$$\text{Pero } f(x)=x^2-3x+5 \rightarrow f(u)=u^2-3u+5$$

$$\text{Sustituyendo en (1): } u^2-3u+5=x^2-x+3 \leftrightarrow u^2-3u-(x^2-x-2)=0$$

Resolviendo para u : $u = \frac{3 \pm \sqrt{9+4(x^2-x-2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{2}$

de donde: $u = \frac{3 + |2x-1|}{2} \leftrightarrow g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 1/2 \\ 2-x, & \text{si } x < 1/2 \end{cases}$

EJEMPLO 6. Dadas las funciones siguientes, hallar $(f \circ g)(x)$.

$$f(x-3) = \begin{cases} x, & x \in [1, 3) \\ (x-3)^2, & x \in [3, 7) \end{cases}; \quad g(x-1) = \begin{cases} x-4, & x \in [2, 5) \\ 4, & x \in [5, 7) \end{cases}$$

Solución. Cuando se trata de efectuar una composición de funciones seccionadas, esto es, si:

$$f = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_n, \text{ donde } \text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \dots \cup \text{Dom}(f_n)$$

$$g = g_1 \cup g_2 \cup \dots \cup g_n, \text{ donde } \text{Dom}(g) = \text{Dom}(g_1) \cup \text{Dom}(g_2) \cup \dots \cup \text{Dom}(g_n), \text{ entonces:}$$

$$\rightarrow f \circ g = (f_1 \circ g_1) \cup (f_1 \circ g_2) \cup (f_2 \circ g_1) \cup (f_2 \circ g_2) \cup \dots \cup (f_n \circ g_n)$$

(1) Luego, sean: $f_1(x-3)=x \rightarrow f_1(x)=x+3, x \in [1, 3)$
 $f_2(x-3)=(x-3)^2 \rightarrow f_2(x)=x^2, x \in [3, 7)$
 $g_1(x-1)=x-4 \rightarrow g_1(x)=x-3, x \in [2, 5)$
 $g_2(x-1)=4 \rightarrow g_2(x)=4, x \in [5, 7)$

(2) Determinación de los rangos de g_1 y de g_2

$$\text{En } g_1: x \in [2, 5) \rightarrow 2 \leq x < 5 \rightarrow -1 \leq x-3 < 2$$

$$\rightarrow -1 \leq g_1(x) < 2 \rightarrow \text{Ran}(g_1) = [-1, 2)$$

$$\text{En } g_2: x \in [5, 7), y=4 \text{ constante} \rightarrow \text{Ran}(g_2) = \{4\}$$

(3) $\text{Dom}(f_1) \cap \text{Ran}(g_1) = [1, 3) \cap [-1, 2) \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_1 \circ g_1)$

$$\text{Como } \text{Ran}(g_1) \not\subset \text{Dom}(f_1) \rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_1) = \{x | x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f_1)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_1) = x \in [2, 5) \wedge (x-3) \in [1, 3) = (2 \leq x < 5) \wedge (1 \leq x-3 < 3) = [4, 5)$$

$$\rightarrow (f_1 \circ g_1)(x) = f_1[g_1(x)] = f_1(x-3) = (x-3)+3 = x, x \in [4, 5)$$

(4) $\text{Ran}(g_2) \cap \text{Dom}(f_1) = \{4\} \cap [1, 3) = \emptyset \rightarrow \nexists (f_1 \circ g_2)$

(5) $\text{Ran}(g_1) \cap \text{Dom}(f_2) = [-1, 2) \cap [3, 7) = \emptyset \rightarrow \nexists (f_2 \circ g_1)$

(6) $\text{Ran}(g_2) \cap \text{Dom}(f_2) = \{4\} \cap [3, 7) \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_2 \circ g_2)$

$$\text{Como } \{4\} \subset [3, 7) \rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_2) = \text{Dom}(f_2) = [3, 7)$$

(Obs.11)

$$\text{Entonces, } f_2[g_2(x)] = f_2(4) = (4)^2 = 16, x \in [3, 7)$$

(7) Por lo tanto, de (3) y (6): $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [4, 5) \\ 16, & \text{si } x \in [3, 7) \end{cases}$

EJEMPLO 7. Determinar $(f \circ g)(x)$, si $f(x)=x^2-2x, x \in [-1, 7)$ y

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ x+2, & \text{si } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

Solución. (1) Sean: $g_1(x)=1-2x$ y $g_2(x)=x+2 \rightarrow f \circ g = (f \circ g_1) \cup (f \circ g_2)$

(2) Verificar que $\text{Ran}(g_1) = \langle 3, +\infty \rangle$ y $\text{Ran}(g_2) = \langle 4, +\infty \rangle$

Como $\text{Ran}(g_1) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset$ y $\text{Ran}(g_2) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset \rightarrow$ existen $f \circ g_1$ y $f \circ g_2$.

(3) Cálculo de cada uno de los dominios:

$\begin{aligned} &\text{Ran}(g_1) \not\subset \text{Dom}(f) \\ \rightarrow &\text{Dom}(f \circ g_1) = \{x \mid x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f)\} \\ \rightarrow &x \in \langle -\infty, -1 \rangle \wedge (1-2x) \in [-1, 7] \\ \leftrightarrow &(x < -1) \wedge (-1 \leq 1-2x < 7) \\ \leftrightarrow &(x < -1) \wedge (-3 < x \leq 1) \\ \therefore &\text{Dom}(f \circ g_1) = \langle -3, 1 \rangle \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\text{Ran}(g_2) \not\subset \text{Dom}(f) \\ \text{Dom}(f \circ g_2) &= \{x \mid x \in \text{Dom}(g_2) \wedge g_2(x) \in \text{Dom}(f)\} \\ \rightarrow &x \in \langle 2, +\infty \rangle \wedge (x+2) \in [-1, 7] \\ \leftrightarrow &(x > 2) \wedge (-1 \leq x+2 < 7) \\ \leftrightarrow &(x > 2) \wedge (-3 \leq x < 5) \\ \therefore &\text{Dom}(f \circ g_2) = \langle 2, 5 \rangle \end{aligned}$
---	---

(4) Determinación de las reglas de correspondencia:

$\begin{aligned} f[g_1(x)] &= f(1-2x) \\ &= (1-2x)^2 - 2(1-2x) = 4x^2 - 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} f[g_2(x)] &= f(x+2) \\ &= (x+2)^2 - 2(x+2) = x^2 + 2x \end{aligned}$
--	---

$$\therefore (f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1, & x \in \langle -3, -1 \rangle \\ x^2 + 2x, & x \in \langle 2, 5 \rangle \end{cases}$$

EJEMPLO 8. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{1+x}$, $-1 \leq x < 2$, y

$$g(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Hallar } f \circ g \text{ y graficarla.}$$

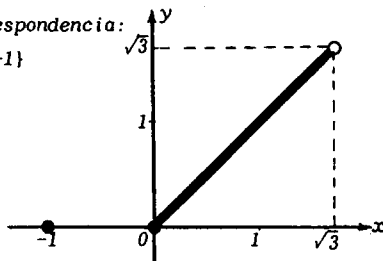
Solución. Sean $g_1(x) = \lfloor x \rfloor$ y $g_2(x) = x^2 - 1 \rightarrow f \circ g = (f \circ g_1) \cup (f \circ g_2)$

(1) Cálculo de los dominios de $f \circ g$.

$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ g_1) &= \{x \mid x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f)\} \\ \rightarrow &(x < 0) \wedge (\lfloor x \rfloor \in [-1, 2]) \\ \leftrightarrow &(x < 0) \wedge (x \in (-1, 0, 1]) \\ \rightarrow &x \in \{-1\} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ g_2) &= \{x \mid x \in \text{Dom}(g_2) \wedge g_2(x) \in \text{Dom}(f)\} \\ \rightarrow &(x \geq 0) \wedge (x^2 - 1) \in [-1, 2] \\ \leftrightarrow &(x \geq 0) \wedge (-1 \leq x^2 - 1 < 2) \\ \leftrightarrow &(x \geq 0) \wedge (0 \leq x < \sqrt{3}) \\ \rightarrow &0 \leq x < \sqrt{3} \end{aligned}$
---	---

(2) Determinación de las reglas de correspondencia:

$$\begin{aligned} f[g_1(x)] &= f(\lfloor x \rfloor) = \sqrt{1 + \lfloor x \rfloor}, \quad x \in \{-1\} \\ \rightarrow (f \circ g_1)(x) &= \sqrt{1-1} = 0, \quad x = -1 \\ f[g_2(x)] &= f(x^2 - 1) = \sqrt{1 + x^2 - 1} \\ \rightarrow (f \circ g_2)(x) &= |x| = x, \quad x \in [0, \sqrt{3}) \\ \therefore (f \circ g)(x) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x = -1 \\ x, & \text{si } x \in [0, \sqrt{3}) \end{cases} \end{aligned}$$



EJEMPLO 9. Dadas las funciones siguientes; hallar, si existe, $(g \circ f)(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{|x+2|}} \right\rfloor, & \text{si } -1 < x < 1 \\ |x|, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \lfloor x^2 \rfloor - 2|x|, & \text{si } -\sqrt{2} < x \leq 0 \\ x \lfloor |x-3| \rfloor + 2, & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Solución. Volvamos a definir f y g eliminando las barras y los corchetes.

$$(1) \text{ En } f: \text{ si } -1 < x < 1 \rightarrow 1 < x+2 < 3$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{|x+2|} < 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{\frac{1}{|x+2|}} < 1 \rightarrow \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{|x+2|}} \right\rfloor = 0$$

$$\text{Si } x > 1 \rightarrow |x| = x$$

$$(2) \text{ En } g: \text{ Para } -\sqrt{2} < x \leq 0 \rightarrow |x| = -x$$

$$-\sqrt{2} < x \leq 0 = (-\sqrt{2} < x \leq -1) \vee (-1 < x \leq 0)$$

$$\rightarrow (1 \leq -x < \sqrt{2}) \vee (0 \leq -x < 1) \rightarrow (1 \leq x^2 < 2) \vee (0 \leq x^2 < 1)$$

$$\rightarrow (\lfloor x^2 \rfloor = 1) \vee (\lfloor x^2 \rfloor = 0)$$

$$\text{Si } 2 < x < 4 = (2 < x < 3) \vee (3 < x < 4)$$

$$\rightarrow (-1 < x-3 < 0) \vee (0 < x-3 < 1) \rightarrow (0 < |x-3| < 1) \vee (0 < |x-3| < 1)$$

$$\rightarrow \lfloor |x-3| \rfloor = 0, \quad x \in \langle 2, 4 \rangle$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 1 & (f_1) \\ x, & \text{si } x \geq 1 & (f_2) \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} x^2+2x, & \text{si } -\sqrt{2} < x \leq -1 & (g_1) \\ 2x, & \text{si } -1 < x \leq 0 & (g_2) \\ 2, & \text{si } 2 < x < 4 & (g_3) \end{cases}$$

Entonces, gof está definida $\leftrightarrow \text{Dom}(g) \cap \text{Ran}(f) \neq \emptyset$

(3) Determinación de los rangos de f_1 y f_2 :

En f_1 , $\text{Ran}(f_1) = 0$, constante.

En f_2 : $y=x$, si $x \geq 1 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow \text{Ran}(f_2) = [1, +\infty)$

(4) Interceptando el rango de f_1 con los dominios de g_1 , g_2 y g_3 , se deduce que sólo $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Dom}(g_2) \neq \emptyset \rightarrow \exists (g_2 \circ f_1)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Dom}(g_2 \circ f_1) &= \{x | x \in \text{Dom}(f_1) \wedge f_1(x) \in \text{Dom}(g_2)\} \\ &= (-1 < x < 1) \wedge 0 \in (-1 < x \leq 0) \\ &= (-1 < x < 1) \wedge (-1 < x \leq 0) = \langle -1, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow g_2[f_1(x)] = g_2(0) = 2(0) = 0, \quad \text{si } x \in \langle -1, 0 \rangle$$

(5) Interceptando el rango de f_2 con los dominios de g_1 , g_2 y g_3 , vemos que sólo $\text{Ran}(f_2) \cap \text{Dom}(g_3) \neq \emptyset \rightarrow \exists (g_3 \circ f_2)$

Como $[1, +\infty) \not\subset \langle 2, 4 \rangle \rightarrow \text{Dom}(g_3 \circ f_2) = \{x | x \in \text{Dom}(f_2) \wedge f_2(x) \in \text{Dom}(g_3)\}$

$$\rightarrow \text{Dom}(g_3 \circ f_2) = (x \geq 1) \wedge (x \in \langle 2, 4 \rangle) = \langle 2, 4 \rangle$$

$$\rightarrow g_3[f_2(x)] = g_3(x) = 2, \quad x \in \langle 2, 4 \rangle$$

$$(6) \text{ Por lo tanto, de (4) y (5): } (\text{gof})(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 2, & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

EJEMPLO 9. Sean f y g dos funciones reales definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{|x|-2}{3-x} \right\rfloor, & \text{si } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ \sqrt{x^2+2x}, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1}, & \text{si } x \in [-2, -1] \\ 1-x, & \text{si } x \in \langle 0, 6 \rangle \end{cases}$$

Hallar el dominio y la regla de correspondencia de gof .

Solución. En f , dado que $0 \in (-1, 1) \rightarrow (-1, 1) = (-1, 0) \cup (0, 1)$

$$(1) \text{ Para } x \in (-1, 0) \rightarrow |x| = -x \rightarrow \left\lfloor \frac{-x-2}{3-x} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{5}{x-3} \right\rfloor \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\rightarrow -4 < x-3 < -3 \leftrightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} < -\frac{1}{4} \leftrightarrow -\frac{5}{3} < \frac{5}{x-3} < -\frac{5}{4} \\ &\leftrightarrow -\frac{2}{3} < 1 + \frac{5}{x-3} < -\frac{1}{4} \rightarrow \left\lfloor 1 + \frac{5}{x-3} \right\rfloor = -1 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ Si } x \in (0, 1) \rightarrow |x| = x \rightarrow \left\lfloor \frac{x-2}{3-x} \right\rfloor = \left\lfloor -1 + \frac{1}{3-x} \right\rfloor$$

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\rightarrow -1 < -x < 0 \leftrightarrow 2 < 3-x < 3 \leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3-x} < \frac{1}{2} \\ &\leftrightarrow -\frac{2}{3} < -1 + \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2} \rightarrow \left\lfloor -1 + \frac{1}{3-x} \right\rfloor = -1, \quad x \in (0, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (1) y (2): $\left\lfloor \frac{|x|-2}{3-x} \right\rfloor = -1, \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in (-1, 1) \quad (f_1) \\ \sqrt{x^2+2x}, & \text{si } x \in [1, 2] \quad (f_2) \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1}, & \text{si } x \in [-2, -1] \quad (g_1) \\ 1-x, & \text{si } x \in (0, 6] \quad (g_2) \end{cases}$$

La composición $g \circ f$ está definida $\leftrightarrow \text{Dom}(g) \cap \text{Ran}(f) \neq \emptyset$

(3) Determinación de los rangos de f_1 y f_2 :

$$\text{Ran}(f_1) = -1, \text{ constante. En } f_2, y = \sqrt{x^2+2x} = \sqrt{(x+1)^2-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 \leq x < 2 &\rightarrow 2 \leq x+1 < 3 \rightarrow 4 \leq (x+1)^2 < 9 \rightarrow 3 \leq (x+1)^2-1 < 8 \\ &\leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{(x+1)^2-1} < \sqrt{8} \rightarrow \text{Ran}(f_2) = [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}] \end{aligned}$$

(4) Como $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Dom}(g_1) = \emptyset$ y $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Dom}(g_2) = \emptyset$, no están definidas $g_1 \circ f_1$ y $g_2 \circ f_1$.

$$(5) \text{Ran}(f_2) \cap \text{Dom}(g_1) = \emptyset \rightarrow \nexists (g_1 \circ f_2)$$

$$\text{Ran}(f_2) \cap \text{Dom}(g_2) \neq \emptyset \rightarrow \exists (g_2 \circ f_2)$$

$$\text{Dado que } \text{Ran}(f_2) \subset \text{Dom}(g_2) \rightarrow \text{Dom}(g_2 \circ f_2) = \text{Dom}(f_2) = [1, 2] \quad (\text{Obs. 4})$$

$$\rightarrow g_2[f_2(x)] = g_2(\sqrt{x^2+2x}) = 1 - \sqrt{x^2+2x} \rightarrow (g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x^2+2x}, \quad x \in [1, 2]$$

EJEMPLO 10. Sean f y g funciones reales definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in (-1, 0] \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x \in [1, 10] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} 3x, & x \in (-1, 1) \\ \lfloor x^2 \rfloor, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

Hallar, si existe, $g \circ f$.

Solución. Sean: $f_1(x) = |x|, x \in (-1, 0], g_1(x) = 3x, x \in (-1, 1)$

$$f_2(x) = \sqrt{x-1}, x \in [1, 10], g_2(x) = \lfloor x^2 \rfloor, x \in [2, 4]$$

La función $g \circ f$ está definida $\leftrightarrow \text{Dom}(g) \cap \text{Ran}(f) \neq \emptyset$

(1) Determinación de los rangos de f_1 y f_2 :

$$x \in (-1, 0] \leftrightarrow -1 < x \leq 0 \leftrightarrow 0 \leq |x| < 1 \rightarrow \text{Ran}(f_1) = [0, 1]$$

$$x \in [1, 10] \leftrightarrow 1 \leq x < 10 \leftrightarrow 0 \leq x-1 < 9 \leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-1} < 3 \rightarrow \text{Ran}(f_2) = [0, 3]$$

(2) Intersección del $\text{Ran}(f_1)$ con los dominios de g_1 y g_2 :

$$a) \text{Ran}(f_1) \cap \text{Dom}(g_1) = [0, 1] \cap (-1, 1] \neq \emptyset \rightarrow \exists (g_1 \circ f_1)$$

$$\text{Como } \text{Ran}(f_1) \subset \text{Dom}(g_1) \rightarrow \text{Dom}(g_1 \circ f_1) = \text{Dom}(f_1) = (-1, 0]$$

$$\text{Entonces: } g_1[f_1(x)] = g_1(|x|) = 3|x|, \quad x \in (-1, 0]$$

$$b) \text{Ran}(f_1) \cap \text{Dom}(g_2) = [0, 1] \cap [2, 4] = \emptyset \rightarrow \nexists (g_2 \circ f_1)$$

(3) Intersección del $\text{Ran}(f_2)$ con los dominios de g_1 y g_2 :

$$a) \text{Ran}(f_2) \cap \text{Dom}(g_1) = [0, 3] \cap (-1, 1] \neq \emptyset \rightarrow \exists (g_1 \circ f_2)$$

$$\text{Ran}(f_2) \not\subset \text{Dom}(g_1) \rightarrow \text{Dom}(g_1 \circ f_2) = \{x | x \in \text{Dom}(f_2) \wedge f_2(x) \in \text{Dom}(g_1)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(g_1 \circ f_2) = (x \in [1, 10]) \wedge (\sqrt{x-1} \in (-1, 1])$$

$$= (1 \leq x < 10) \wedge (-1 < \sqrt{x-1} \leq 1)$$

$$= (1 \leq x < 10) \wedge (0 < x-1 \leq 1) = (1 \leq x \leq 2)$$

$$\text{Entonces: } g_1[f_2(x)] = g_1(\sqrt{x-1}) = 3\sqrt{x-1}, \quad x \in [1, 2]$$

$$b) \text{Ran}(f_2) \cap \text{Dom}(g_2) = [0, 3] \cap [2, 4] \neq \emptyset \rightarrow \exists (g_2 \circ f_2)$$

$$\text{Ran}(f_2) \not\subset \text{Dom}(g_2) \rightarrow \text{Dom}(g_2 \circ f_2) = \{x | x \in \text{Dom}(f_2) \wedge f_2(x) \in \text{Dom}(g_2)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(g_2 \circ f_2) = (x \in [1, 10]) \wedge (\sqrt{x-1} \in [2, 4]) = (1 \leq x < 10) \wedge (2 \leq \sqrt{x-1} \leq 4)$$

$$= (1 \leq x < 10) \wedge (4 \leq x-1 \leq 16) = 5 \leq x < 10$$

$$\rightarrow g_2[f_2(x)] = g_2(\sqrt{x-1}) = \lfloor (\sqrt{x-1})^2 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor, \quad x \in [5, 10]$$

$$(4) \text{ Por lo tanto: } (g \circ f)(x) = \begin{cases} 3|x| & , \text{ si } x \in (-1, 10] \\ 3\sqrt{x-1} & , \text{ si } x \in [1, 2] \\ \lfloor x-1 \rfloor & , \text{ si } x \in [5, 10] \end{cases}$$

EJEMPLO 11. Sean las funciones reales f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{si } x < 3 \\ 8-x, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}; \quad g(x) = \frac{2-x}{|x-2|} + |x-3|$$

Hallar la regla de correspondencia de la función $f \circ g$.

Solución. Por el método de los puntos críticos en $x=2$ y $x=3$, verificar que la función g se puede redefinir de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4, & x < 3 & (f_1) \\ 8-x, & x \geq 3 & (f_2) \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} 4-x, & x < 2 & (g_1) \\ 2-x, & 2 < x < 3 & (g_2) \\ x-4, & x \geq 3 & (g_3) \end{cases}$$

Entonces la función $f \circ g$ está definido $\leftrightarrow \text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(g) \neq \emptyset$

(1) Verificar que los rangos de las funciones g_1 , g_2 y g_3 son:

$$\text{Ran}(g_1) = \langle 2, +\infty \rangle; \quad \text{Ran}(g_2) = \langle -1, 0 \rangle; \quad \text{Ran}(g_3) = [-1, +\infty)$$

(2) Intersección del $\text{Ran}(g_1)$ con los dominios de f_1 y f_2 :

$$a) \langle 2, +\infty \rangle \cap \langle -\infty, 3 \rangle \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_1 \circ g_1)$$

$$\text{Ran}(g_1) \not\subset \text{Dom}(f_1) \rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_1) = \{x | x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f_1)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_1) = (x < 2) \wedge (4-x < 3) = (x < 2) \wedge (x > 1) = 1 < x < 2$$

$$\rightarrow f_1[g_1(x)] = f_1(4-x) = (4-x)^2 - 4 = x^2 - 8x + 12, \quad x \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$b) \text{Ran}(g_1) \cap \text{Dom}(f_2) = \langle 2, +\infty \rangle \cap [3, +\infty) \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_2 \circ g_1)$$

$$\text{Como } \text{Ran}(g_1) \not\subseteq \text{Dom}(f_2) \rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_1) = \{x | x \in \text{Dom}(g_1) \wedge g_1(x) \in \text{Dom}(f_2)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_1) = (x < 2) \wedge (4-x \geq 3) = (x < 2) \wedge (x \leq 1) = x \leq 1$$

$$\rightarrow f_2[g_1(x)] = f_2(4-x) = 8 - (4-x) = x+4, \quad x \in \langle -\infty, 1 \rangle$$

(3) Intersección del $\text{Ran}(g_2)$ con los dominios de f_1 y f_2 :

$$a) \text{Ran}(g_2) \cap \text{Dom}(f_1) = \langle -1, 0 \rangle \cap \langle -\infty, 3 \rangle \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_1 \circ g_2)$$

$$\text{Ran}(g_2) \subset \text{Dom}(f_1) \rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_2) = \text{Dom}(g_2) = \langle 2, 3 \rangle$$

$$\rightarrow f_1[g_2(x)] = f_1(2-x) = (2-x)^2 - 4 = x^2 - 4x, \quad x \in \langle 2, 3 \rangle$$

$$b) \text{Ran}(g_2) \cap \text{Dom}(f_2) = \langle -1, 0 \rangle \cap [3, +\infty) = \emptyset \rightarrow \nexists (f_2 \circ g_2)$$

(4) Intersección del $\text{Ran}(g_3)$ con los dominios de f_1 y f_2 :

$$a) \text{Ran}(g_3) \cap \text{Dom}(f_1) = [-1, +\infty) \cap \langle -\infty, 3 \rangle \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_1 \circ g_3)$$

$$\text{Ran}(g_3) \not\subseteq \text{Dom}(f_1) \rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_3) = \{x | x \in \text{Dom}(g_3) \wedge g_3(x) \in \text{Dom}(f_1)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f_1 \circ g_3) = (x \geq 3) \wedge (x-4 < 3) = 3 \leq x < 7$$

$$\rightarrow f_1[g_3(x)] = f_1(x-4) = (x-4)^2 - 4 = x^2 - 8x + 12, \quad x \in [3, 7)$$

$$b) \text{Ran}(g_3) \cap \text{Dom}(f_2) = [-1, +\infty) \cap [3, +\infty) \neq \emptyset \rightarrow \exists (f_2 \circ g_3)$$

$$\text{Ran}(g_3) \not\subseteq \text{Dom}(f_2) \rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_3) = \{x | x \in \text{Dom}(g_3) \wedge g_3(x) \in \text{Dom}(f_2)\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(f_2 \circ g_3) = (x \geq 3) \wedge (x-4 \geq 3) = x \geq 7$$

$$\rightarrow f_2[g_3(x)] = f_2(x-4) = 8 - (x-4) = 12-x, \quad x \in [7, +\infty)$$

$$(5) \text{ Por lo tanto: } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x+4 & , x \in \langle -\infty, 1 \rangle \\ x^2 - 8x + 12 & , x \in \langle 1, 2 \rangle \cup [3, 7) \\ x^2 - 4x & , x \in \langle 2, 3 \rangle \\ 12-x & , x \in [7, +\infty) \end{cases}$$

EJEMPLO 12. Sea $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ con $\text{Dom}(g) = [-1, 1) \cup \langle 1, 4 \rangle$; la función f tiene $\text{Dom}(f) = \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$ y es tal que $(f \circ g)(x) = x^2 - x + 1$. Hallar la regla de correspondencia de $f(x)$, el dominio y el rango de la función $f \circ g$.

Solución. (1) Cálculo de $f(x)$:

$$f[g(x)] = x^2 - x + 1 \rightarrow f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^2 - x + 1$$

$$\text{Sea: } u = \frac{x+1}{x-1} \leftrightarrow x = \frac{u+1}{u-1} \rightarrow f(u) = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^2 - \left(\frac{u+1}{u-1}\right) + 1 = \frac{u^2+3}{(u-1)^2}$$

$$\text{Volviendo a la variable original: } f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)^2}$$

(2) Cálculo del $\text{Dom}(f \circ g)$: $\text{Dom}(f \circ g) = \{x | x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

$$\rightarrow \text{Dom}(f \circ g) = x \in [-1, 1) \cup \langle 1, 4 \rangle \wedge \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \in \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \quad (\alpha)$$

$$\rightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \in \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \leftrightarrow (-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1) \vee (1 < \frac{x+1}{x-1} \leq 2)$$

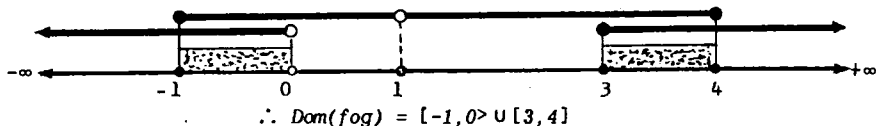
$$\leftrightarrow [(\frac{x+1}{x-1} > -1) \wedge (\frac{x+1}{x-1} < 1)] \vee [(\frac{x+1}{x-1} > 1) \wedge (\frac{x+1}{x-1} \leq 2)]$$

$$\leftrightarrow [(\frac{2x}{x-1} > 0) \wedge (\frac{2}{x-1} < 0)] \vee [(\frac{2}{x-1} > 0) \wedge (\frac{x-3}{x-1} \geq 0)]$$

$$\leftrightarrow [(x < 0 \vee x > 1) \wedge (x < 1)] \vee [(x > 1) \wedge (x < 1 \vee x \geq 3)]$$

$$\leftrightarrow (x < 0) \vee (x \geq 3) \leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$$

Luego, en (a): $\text{Dom}(f \circ g) = (x \in [-1, 1) \cup [3, 4]) \cap (x \in (-\infty, 0) \cup [3, +\infty))$



(3) Cálculo del $\text{Ran}(f \circ g)$: $(f \circ g)(x) = x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$

Si $x \in [-1, 0) \cup [3, 4] \leftrightarrow (-1 \leq x < 0) \vee (3 \leq x \leq 4)$

$$\leftrightarrow (-\frac{3}{2} \leq x - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}) \vee (\frac{5}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{7}{2})$$

$$\leftrightarrow (\frac{1}{4} < (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{9}{4}) \vee (\frac{25}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{49}{4})$$

$$\leftrightarrow (\frac{1}{4} + \frac{3}{4} < (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4}) \vee (\frac{25}{4} + \frac{3}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{49}{4} + \frac{3}{4})$$

$$\leftrightarrow (1 < (f \circ g)(x) \leq 3) \vee (7 \leq (f \circ g)(x) \leq 13)$$

$$\therefore \text{Ran}(f \circ g) = (1, 3] \cup [7, 13]$$

EJERCICIOS: Grupo 38

1. Sea $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = \frac{x+3}{x}$. Hallar $\text{Dom}(f \circ g) \cap \text{Dom}(g \circ f)$.
2. Si f , g y h son funciones definidas por las ecuaciones: $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ y $h(x)=x-5$. Si se sabe que $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, hallar los valores de x tales que: $[(h \circ f \circ g)(x)](x)=0$.
3. Si f , g y h son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y tales que $f(x)=x^2-4$, $g(x)=3x$ y $h(x)=3x^{-3}$. Hallar el dominio de $(h \circ f \circ g)(x)$.
4. Si $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g: [1/2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = \frac{2x+1}{x}$, hallar el $\text{Dom}(g \circ f)$.
5. Sean $f(x)=2x-3$ y $g(x)=x^2+1$ dos funciones reales. Hallar la suma de todos los valores de x tales que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

6. Si $(f \circ g)(x) = x^3 + x + 1$ y $g(x) = x^3 + 1$, hallar $(g \circ f)(9)$.
7. Sean las funciones: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & 0 \leq x < 3 \\ 2x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 4x + 5, & 0 \leq x < 1 \\ 3x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$
Hallar $(f \circ g)(1/4) + 16(g \circ f)(1/2)$.
8. Sean las funciones reales: $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \frac{1}{|x^2 - 1|}$. El dominio de la función $f \circ g$ es A. Hallar A'.
9. Dadas las funciones reales f y g , tales que: $f(x-1) = 3x^2 + ax + 12$, $g(x+1) = 5x + 7$; hallar el valor de a tal que $(f \circ g)(-2) = -4a$.
10. Si $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x^2-7}$, hallar una función h tal que $(f \circ h)(x) = g(x)$.
11. Sean las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por las ecuaciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x + p$, p fijo. Hallar la suma de todos los valores de p que satisfacen a: $(f \circ g)(p+3) = (g \circ f)(p-3)$.
12. Si $f(x-2) = \frac{2}{x-3}$, hallar el valor de x de modo que $(f \circ f)(2/x) = 5$.
13. Si $f(x) = x^x$, $h(x) = \sqrt{x}$ y $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{2^{x^x}}$, hallar $g(x)$.
14. Si $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$, hallar dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 16x + 25$.
15. Hallar todos los polinomios $f(x)$ de primer grado tales que:
 $(f \circ f)(1/x) = \frac{4-x}{x}$, $x \neq 0$
16. Sean las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$, tales que:
 $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{si } x > 2 \\ x-5, & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$
Hallar la función $g(x)$. Graficar la función g .
17. Sean las funciones: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ -x^3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 2 \\ 2x, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$
Hallar el $\text{Dom}(g \circ f)$.
18. Sean las funciones f y g definidas por: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in [4, 9]$, $g(x) = x^2 - x + 1/4$, $x \in [-3, 0]$. Hallar el $\text{Dom}(f \circ g)$.
19. Sean las funciones de variable real: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x < 1 \\ -x^3, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$
 $g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$. Hallar el $\text{Dom}(g \circ f)$.
20. Sean las funciones: $f(x) = 2x^2 + 1$, si $x \in \langle -2, 20 \rangle$, $g(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in \langle -\infty, -2 \rangle \\ 2x, & x \in \langle 6, +\infty \rangle \end{cases}$
Hallar $f \circ g$.

21. Sean las funciones reales: $f(x) = |x+2| + x$, $g(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \geq 1 \\ 3x-1, & x < -1 \end{cases}$
 Establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
 a) $x \in [-2, -3/2] \rightarrow (g \circ f)(x) = 6x+4$ c) $x < -1 \rightarrow (f \circ g)(x) = -2$
 b) $\text{Ran}(f) - \text{Ran}(g) = [-2, 1]$

22. Determinar fog si $f(x) = 3x+2$, si $x \in (-\infty, -3]$ y $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0 \\ -3x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

23. Sean las funciones reales de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1-x^2, & x \geq 0 \end{cases}. \text{ Hallar fog y su dominio.}$$

24. Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x, & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2+3, & \text{si } x > 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{si } x \leq 1 \\ 5-x, & \text{si } x > 1 \end{cases}. \text{ Hallar fog y su rango}$$

25. Dadas las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = x^2-2, \quad x \in [-5, 5]; \quad g(x) = \begin{cases} x+3, & \text{si } x \in [-5, -3] \\ 2x-1, & \text{si } x \in (-3, 1] \\ 4x+1, & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}. \text{ Hallar } (f \circ g)(x).$$

26. Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < -2 \\ (x+2)^2, & \text{si } x \in [-2, -1] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x+6|}{|x+3|-3}, & \text{si } -4 < x \leq -1 \\ \sqrt{5-x}-2, & \text{si } -1 < x < 5 \end{cases}$$

27. Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{si } x \in (-3, 1] \\ 1/x, & \text{si } x \in [3, 8] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0, & \text{si } x \in (4, 7] \end{cases}. \text{ Hallar fog.}$$

28. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in (-1, 1] \\ |x+1|, & x \in (1, 2] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \in [0, 1] \\ \sqrt{x^2-1}, & x \in [1, 3] \end{cases}. \text{ Hallar fog.}$

29. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-5, -1] \\ 2, & x \in [1, 2] \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} \lfloor x-1 \rfloor, & x \in [0, 2] \\ x^2, & x \in [2, 3] \end{cases}. \text{ Hallar gof.}$$

30. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2+x\text{Sgn}(x^2-1), & x \in [-2, 3] \\ \sqrt{x}+2, & x \in [4, 9] \end{cases}$

Hallar, si existe, fof .



5.10 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Definición 5.5 Una función f es no decreciente en un intervalo $[a,b]$ de su dominio, si para dos números $x_1, x_2 \in [a,b]$, se cumple:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

y si ocurre que:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

entonces se dice que f es estrictamente creciente o simplemente creciente.

Es decir, una función es creciente o no decreciente en $[a,b]$, si al crecer la variable x los valores de la función también crecen (Figura 2) o permanecen constantes (Figura 1: $f(x_1)=f(x_2)$ en el tramo CD)

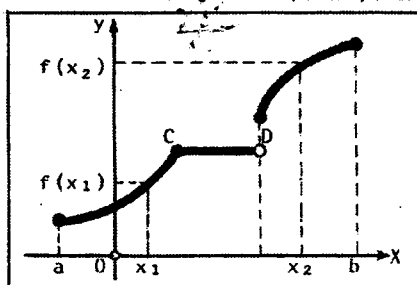


Figura 1
(Función no decreciente)

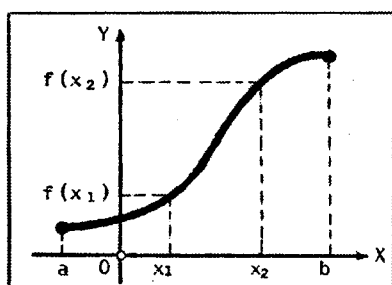


Figura 2
(Función creciente)

Definición 5.6 Una función f es no creciente en un intervalo $[a,b]$ de su dominio, si para dos números $x_1, x_2 \in [a,b]$, se cumple:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

y si ocurre que:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

entonces se dice que f es estrictamente decreciente o simplemente decreciente.

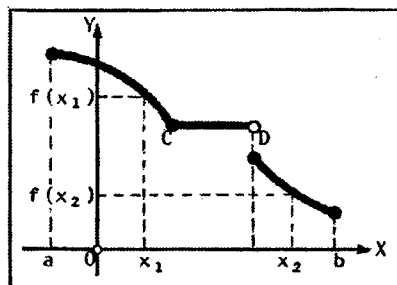


Figura 3
(Función no creciente)

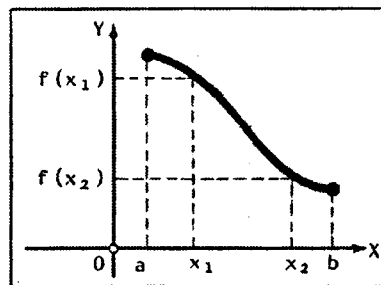


Figura 4
(Función decreciente)

Es decir, una función es decreciente o no creciente en $[a, b]$, si al crecer la variable x , los valores de la función decrecen (Figura 4) o permanecen constantes (Figura 3: $f(x_1)=f(x_2)$ en el tramo CD).

Definición 5.7 Una función f se dice que es **monótona** en un intervalo $[a, b]$ de su dominio, si y sólo si corresponde a cualquiera de las dos definiciones antes mencionadas.

EJEMPLO. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- a) Si $f(x)=ax+b$, entonces $x_1 < x_2$ no implica que $f(x_1) < f(x_2)$
 b) La función $g(x)=ax^2+bx+c$, $a > 0$, es monótona, entonces el rango de g es:

$$\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty \right)$$

Solución. a) Sean x_1 y x_2 dos puntos del dominio de $f(x)=ax+b \mid x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} \text{Para } a > 0, \text{ si } x_1 < x_2 &\rightarrow ax_1 < ax_2 \rightarrow ax_1+b < ax_2+b \\ &\rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad f \text{ es creciente} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } a < 0, \text{ si } x_1 < x_2 &\rightarrow ax_1 > ax_2 \rightarrow ax_1+b > ax_2+b \\ &\rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad f \text{ es decreciente} \end{aligned}$$

Luego, si $f(x)=ax+b$, entonces: $x_1 < x_2 \nrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

b) Sea p : La función $g(x)=ax^2+bx+c$, $a > 0$, es monótona.

$$q: \text{el rango de } g \text{ es: } \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty \right)$$

Tenemos la proposición: $p \wedge q$

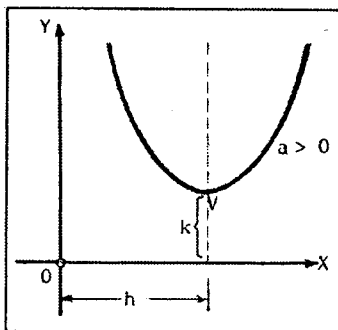
En p , completando el cuadrado obtenemos:

$$g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Si $a > 0$, la gráfica de g es una parábola con cava hacia arriba, donde $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$

Según el diagrama, g no es una función monótona, porque para $x \in (-\infty, h]$ g es decreciente y para $x \in [h, +\infty)$, g es creciente. Por lo tanto, $V(p)=F$

Dado que $\text{Ran}(g)=[k, +\infty) \rightarrow V(q)=V$. Luego: $V(p \wedge q) \equiv V(F \wedge V) \equiv F$



5.11 FUNCION INYECTIVA

Definición 5.8 Sea $f:A \rightarrow B$ una función. Si cada elemento y del conjunto B es imagen de un solo elemento x del conjunto A , se dice que

la función f es una **inyección** o es **inyectiva**.

Dicho de otro modo:

Una función $f: A \rightarrow B$ es una **inyección** si $\forall x_1, x_2 \in A$

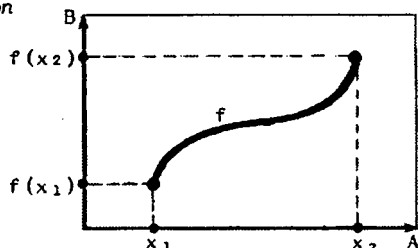
$$i) f(x_1) = f(x_2) \text{ en } B \rightarrow x_1 = x_2 \text{ en } A$$

o equivalentemente:

$$ii) x_1 \neq x_2 \text{ en } A \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ en } B$$

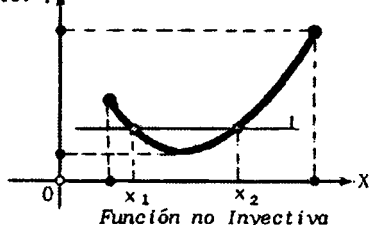
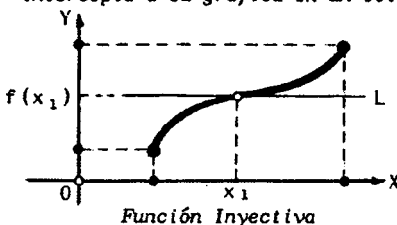
Es decir, en una **inyección**, la igualdad de las imágenes en el conjunto B de llegada implica la igualdad de los elementos en el conjunto de partida A .

La figura adjunta es una interpretación geométrica de esta definición.



Observaciones:

(1) Una función $f: R \rightarrow R$ es **inyectiva** o **univalente** si una recta horizontal intercepta a su gráfica en un solo punto.



(2) Una función que es **creciente** o **decreciente** en un intervalo $[a, b]$ es **además univalente**.

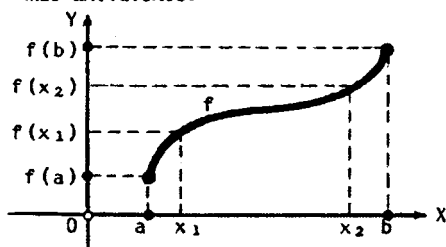


Figura 5

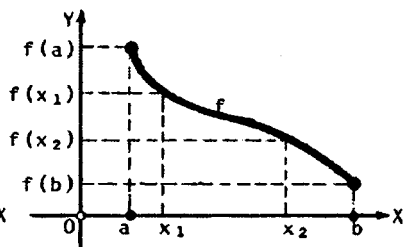


Figura 6

En la Figura 5: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, f es **creciente**.

$$x_1 \neq x_2 \text{ en } A = [a, b] \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ en } B = [f(a), f(b)]$$

En la Figura 6: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, f es decreciente

$x_1 \neq x_2$ en $A=[a,b] \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ en $B=[f(b),f(a)]$, f es univalente.

(3) Si una función inyectiva f es continua en un intervalo $[a,b]$ su rango se determina calculando los valores $f(a)$ y $f(b)$.

Así, en la Figura 5, f es creciente en $x \in [a,b] \rightarrow \text{Ran}(f)=[f(a),f(b)]$

En la Figura 6, f es decreciente en $x \in [a,b] \rightarrow \text{Ran}(f)=[f(b),f(a)]$

(4) Para verificar si una función $f:A \rightarrow B$ es inyectiva se toman $(x,y) \in f$ y $(z,y) \in f$ y se demuestra que $x=z$.

EJEMPLO 1. Sea la función definida en $\mathbb{R}$: $f(x)=3x+2$. Es f inyectiva?

Solución. Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, tales que: $f(x_1)=3x_1+2$ y $f(x_2)=3x_2+2$

Debemos probar que si $f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

En efecto, si $f(x_1)=f(x_2) \rightarrow 3x_1+2 = 3x_2+2 \rightarrow 3x_1 = 3x_2$
 $\rightarrow x_1 = x_2$, f es inyectiva

EJEMPLO 2. Sea la función $f(x)=e^{x+1}$, demostrar que f es inyectiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$. Supongamos que:

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\rightarrow e^{x_1+1} = e^{x_2+1} \rightarrow (x_1+1)\ln e = (x_2+1)\ln e \\ &\rightarrow x_1+1=x_2+1 \rightarrow x_1=x_2 \therefore f \text{ es inyectiva} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. La función $g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^2-1$, es inyectiva $\forall x \in (-\infty, 0]$?

Solución. Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, tales que $g(x_1)=x_1^2-1$ y $g(x_2)=x_2^2-1$

$$\text{Si } g(x_1)=g(x_2) \rightarrow x_1^2-1 = x_2^2-1 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \leftrightarrow |x_1| = |x_2|$$

Pero como, $x \in (-\infty, 0] \rightarrow -x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 = x_2 \therefore g$ es inyectiva.

EJEMPLO 4. Dada la función $f(x)=2+2x-x^2$, restringir su dominio de tal modo que f sea inyectiva.

Solución. Completando el cuadrado: $f(x)=-(x-1)^2+3$

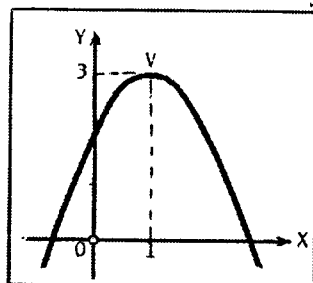
La gráfica de f es una parábola de vértice en $V(1,3)$.

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tales que: $f(x_1)=f(x_2)$

$$\rightarrow 3-(x_1-1)^2=3-(x_2-1)^2 \leftrightarrow |x_1-1|=|x_2-1|$$

$$\leftrightarrow (x_1-1=x_2-1) \vee (x_1-1=-(x_2-1))$$

$$\leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = 2-x_2)$$



Se observa que se presentan dos alternativas, de las cuales solo interesa la primera por cumplir con la condición de inyección.

En consecuencia, para restringir el dominio de f se presentan dos casos:

a) Para signos positivos (a la derecha del vértice): $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$\rightarrow f_1(x)=3-(x-1)^2$, si $x \in [1, +\infty)$, es inyectiva.

b) Para signos negativos (a la izquierda del vértice): $x-1 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$

$\rightarrow f_2(x)=3-(x-1)^2$, si $x \in (-\infty, 1]$, es inyectiva.

Nota. Cuando se trata de funciones seccionadas, esto es, si:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x), & x \in \text{Dom}(f_2) \\ f_3(x), & x \in \text{Dom}(f_3) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in \text{Dom}(f_n) \end{cases}$$

donde: $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup \dots \cup f_n$

y $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \text{Dom}(f_3) \cup \dots \cup \text{Dom}(f_n)$

entonces, la función f es inyectiva, si y sólo si:

i) Las funciones parciales: $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ son inyectivas, y

ii) $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$

$\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_3) = \emptyset$

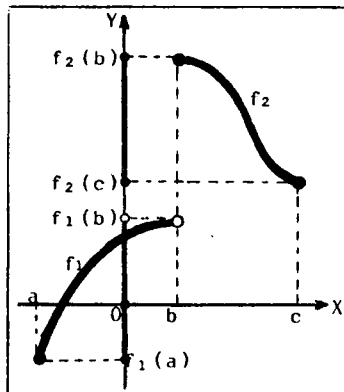
$\text{Ran}(f_2) \cap \text{Ran}(f_3) = \emptyset$

Es decir, los rangos parciales deben ser disjuntos dos a dos. El diagrama de la figura adjunta muestra una función f inyectiva seccionada: $f_1 \cup f_2$, con dominio $x \in [a, b] \cup [b, c] = [a, c]$ y en donde se observa lo siguiente:

a) f_1 es inyectiva y creciente en $[a, b]$, por tanto, su rango es $[f_1(a), f_1(b)]$.

b) f_2 es inyectiva y decreciente en $[b, c]$, por tanto, su rango es $[f_2(c), f_2(b)]$.

De a) y b) se observa que $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$, luego, f es inyectiva.



EJEMPLO 5. Determinar si la función $f(x) = \begin{cases} 3-2x & , x \in [-2, 1] \\ 4x-x^2-3 & , x \in [2, 4] \end{cases}$, es inyectiva o no. Trazar su gráfica.

Solución. Sean: $f_1(x)=3-2x$, $x \in [-2, 1]$ y $f_2(x)=1-(x-2)^2$, $x \in [2, 4]$

i) En f_1 : si $f_1(x_1)=f_1(x_2) \rightarrow 3-2x_1=3-2x_2 \rightarrow -2x_1=-2x_2$
 $\rightarrow x_1=x_2 \therefore f_1$ es inyectiva

$$\text{En } f_2: f_2(x_1)=f_2(x_2) \rightarrow 1-(x_1-2)^2=1-(x_2-2)^2 \rightarrow |x_1-2|=|x_2-2|$$

$$\text{Dado que } x \in [2, 4], \text{ esto es, } x \geq 2 \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow |x-2|=x-2$$

$$\text{Luego: } x_1-2 = x_2-2 \rightarrow x_1 = x_2 \therefore f_2 \text{ es inyectiva.}$$

ii) Determinación de los rangos de f_1 y f_2 :

$$\text{En } f_1(x)=3-2x, x \in [-2, 1]: \text{ para } x_1=-2 \rightarrow f_1(-2)=3-2(-2)=7$$

$$x_2=1 \rightarrow f_1(1)=3-2(1)=1$$

$$\text{Vemos que: } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$f_1 \text{ es decreciente} \rightarrow \text{Ran}(f_1) = \langle f_1(x_2), f_1(x_1) \rangle$$

$$\therefore \text{Ran}(f_1) = \langle 1, 7 \rangle$$

$$\text{En } f_2(x)=4x-x^2-3, x \in [2, 4]$$

$$\text{Entonces, para } x_1=2 \rightarrow f_2(x_1)=1$$

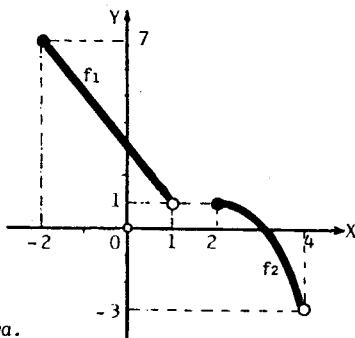
$$x_2=4 \rightarrow f_2(x_2)=-3$$

$$\text{Vemos también que: } x_1 < x_2 \rightarrow f_2(x_1) > f_2(x_2)$$

$$f_2 \text{ es decreciente} \rightarrow \text{Ran}(f_2) = \langle f_2(x_2), f_2(x_1) \rangle$$

$$\therefore \text{Ran}(f_2) = \langle -3, 1 \rangle$$

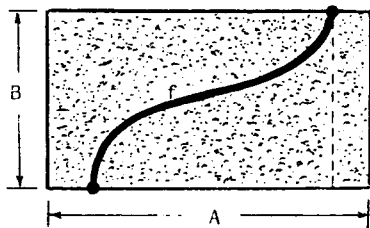
$$\text{Luego, } \text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset \rightarrow f \text{ es inyectiva.}$$



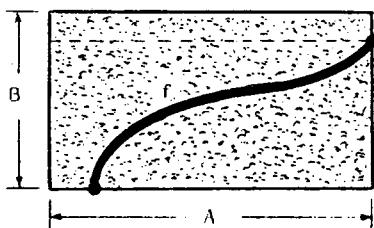
5.12 FUNCION SOBREYECTIVA

Definición 5.8 Sea la función $f:A \rightarrow B$. Se llama **sobreyección** o **función sobreyectiva** (suryectiva) a una función f de un conjunto A sobre un conjunto B cuando todo elemento de B es imagen de por lo menos un elemento de A ; es decir, cuando el rango o imagen es todo B (conjunto de llegada). Formalmente:

$$f \text{ es sobreyectiva} \leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in B, \exists x \in A | f(x)=y \\ \text{o} \\ \text{Ran}(f) = B \end{cases}$$



Función Sobreyectiva



Función no Sobreyectiva

EJEMPLO 1. Determinar si la función $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x)=2x+3$ es sobreyectiva.

Solución. (1) Se tiene: $y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ es el conjunto de llegada) $\rightarrow y = 2x + 3$

(2) Despejando x : $x = \frac{y-3}{2}$, $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

(3) Aplicando f a cada lado de (2) se tiene: $f(x) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) \rightarrow f(x) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$
 $\rightarrow f(x) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

EJEMPLO 2. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = x^2 - 1$. Averiguar si es o no sobreyectiva.

Solución. (1) Sea $y \in \mathbb{R}$ (Conjunto de llegada) $\rightarrow y = x^2 - 1$

(2) Despejando x : $x = \pm \sqrt{y+1} \rightarrow \exists x \Leftrightarrow y+1 \geq 0 \rightarrow \text{Ran}(f) = [-1, +\infty)$

(3) Aplicando f en (2): $f(x) = f(\pm \sqrt{y+1}) \rightarrow f(x) = (\pm \sqrt{y+1})^2 - 1 = (y+1) - 1 = y$

Por lo tanto: $f(x) = y$, $\forall y \in [-1, +\infty)$

(4) Dado que el conjunto de llegada es $\mathbb{R}$ y $\text{Ran}(f) = [-1, +\infty) \neq \mathbb{R}$, entonces f no es sobreyectiva.

Obsérvese que toda función es sobreyectiva sobre su rango, es decir, toda función de la forma $f: A \rightarrow \text{Ran}(f)$ es siempre sobreyectiva. En consecuencia, para saber si una función es sobreyectiva bastará hallar su rango y ver si coincide con el conjunto de llegada.

EJEMPLO 3. Sea la aplicación $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = 3 - 2x$. Demostrar que es sobreyectiva.

Solución. (1) Sea $y \in \mathbb{R}$ (Conjunto de llegada) $\rightarrow y = 3 - 2x$

(2) Si $x \in [-1, 5] \rightarrow -1 \leq x \leq 5 \rightarrow -7 \leq 3 - 2x \leq 5 \rightarrow y \in [-7, 5]$

(3) Entonces: $\text{Ran}(f) = [-7, 5] = \text{Conjunto de llegada}$. $\therefore f$ es sobreyectiva.

5.13 FUNCION BIYECTIVA

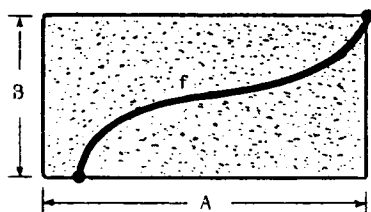
Definición 5.9 Se dice que una función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva o es una biyección si a la vez es inyectiva y sobreyectiva. Formalmente:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y, y \in B, \exists ! x \in A, \text{ tal que } y = f(x) \\ \text{Ran}(f) = B \end{cases}$$

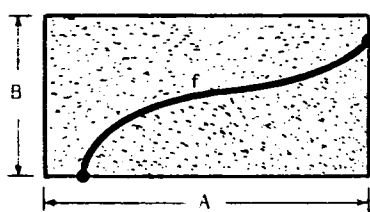
En la siguiente página se una interpretación gráfica de esta definición.

EJEMPLO 1. Demostrar que la función $f(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, es biyectiva.

Demostración. Debemos probar simultáneamente que f es inyectiva y sobreyectiva. En efecto:



Función Biyectiva
 $\text{Ran}(f)=B$



Función no Biyectiva
 $\text{Ran}(f) \neq B$

- (1) Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(x_1) = mx_1 + n$ y $f(x_2) = mx_2 + n$
- (2) Si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow mx_1 + n = mx_2 + n \rightarrow mx_1 = mx_2$
 $\rightarrow x_1 = x_2$, f es inyectiva.
- (3) Sea $y \in \text{Ran}(f) = R \rightarrow y = mx + n$
- (4) Despejando x : $x = \frac{y-n}{m} \rightarrow f(x) = f\left(\frac{y-n}{m}\right) \rightarrow f(x) = m\left(\frac{y-n}{m}\right) + n$
 $\rightarrow f(x) = y$, f es sobreyectiva
- (5) Por lo tanto, de (2) y (4) queda demostrado que f es biyectiva.

EJEMPLO 2. Determinar si la función $f: [-1, 6] \rightarrow [-7, 11] | f(x) = 2x - 5$ es biyectiva.

- Solución.** (1) Sean $x_1, x_2 \in [-1, 6] \rightarrow f(x_1) = 2x_1 - 5$ y $f(x_2) = 2x_2 - 5$
- (2) Si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 - 5 = 2x_2 - 5 \rightarrow 2x_1 = 2x_2$
 $\rightarrow x_1 = x_2$, $\forall x \in [-1, 6]$, f es inyectiva.
- (3) Sea $y \in [-7, 11]$ (Conjunto de llegada) $\rightarrow y = 2x - 5$
- (4) Para $x \in [-1, 6] \rightarrow \text{Ran}(f) = [f(-1), f(6)] = [-7, 7] \neq [-7, 11]$, esto es:
 $\text{Ran}(f) \neq$ Conjunto de llegada, luego, f no es sobreyectiva.
- (5) Por lo tanto, f no es biyectiva.

5.14 FUNCIÓN INVERSA

Definición 5.9 Sea la función $f: A \rightarrow \text{Ran}(f)$, cuya regla de correspondencia es $f = \{(x, y) | y = f(x), x \in \text{Dom}(f)\}$. Si f posee la propiedad de ser inyectiva, entonces se define la **función inversa** de f , denotada por f^* , a la función:

$$f^* = \{(y, x) | x = f^*(y), x \in \text{Dom}(f)\}$$

Formalmente: $y = f(x) \leftrightarrow x = f^*(y), \forall x \in \text{Dom}(f)$

Observaciones.

- (1) De la definición se tiene, $f:A \rightarrow \text{Ran}(f)$, entonces, $f^*:\text{Ran}(f) \rightarrow A$
Significa que: $\text{Dom}(f^*)=\text{Ran}(f)$ y $\text{Ran}(f^*)=\text{Dom}(f)$
- (2) Según la definición, f es inyectiva, entonces f^* también lo es.
De aquí se deduce que $(f^*)^* = f$
- (3) Si f es una aplicación de A en B ($f:A \rightarrow B$) tiene función inversa $f^*:B \rightarrow A$, si y sólo si f es biyectiva.
- (4) Si f es una aplicación $f:A \rightarrow B$, tiene su función inversa $f^*:\text{Ran}(f) \rightarrow A$ (aplicación), si y sólo si f es inyectiva.

5.14.1 PROPIEDADES DE LA FUNCION INVERSA

- a) Si la función $f:A \rightarrow B$ es inyectiva y si $f^*:B \rightarrow A$ es la función inversa de f , entonces:
 - i) $f \circ f^* = I_A$, siendo $\text{Dom}(I_A) = \text{Dom}(f)$
 - ii) $f \circ f^* = I_B$, siendo $\text{Dom}(I_B) = \text{Ran}(f)$
- b) Si f, g y h son funciones univalentes entonces:
 - iii) $f \circ g$ es univalente
 - iv) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
 - v) Si $h = f \circ g \rightarrow f = h \circ g^*$
 - vi) Si $h = f \circ g \rightarrow g = f^* \circ h$

Demostraciones

- i) Sea $a \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(a)=b$, donde $(a,b) \in f$
Esto implica que $(b,a) \in f^*$, o sea $f^*(b)=a$
Luego, para $a \in \text{Dom}(f)$: $f^*[f(a)] = f^*(b) = a$
Si $x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f^*[f(x)] = f^*(y) = x \leftrightarrow f^* \circ f = I_A$
- ii) Sea $a \in \text{Ran}(f)$, esto es, sea $a \in \text{Dom}(f^*) \rightarrow f^*(a)=b$, donde $(a,b) \in f^*$
Esto implica que $(b,a) \in f$, o sea que $f(b)=a$
Luego, si $a \in \text{Ran}(f) \rightarrow f[f^*(a)] = f(b) = a$
y si $x \in \text{Ran}(f) \rightarrow f[f^*(x)] = f(y) = x \leftrightarrow f \circ f^* = I_B$
- iii) Demostraremos que $f \circ g$ es univalente
En efecto, sea $h = f \circ g$ y sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f \circ g)$
Si $h(x_1) = h(x_2) \rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \rightarrow f[g(x_1)] = f[g(x_2)]$ (1)
Si $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ y siendo f univalente $\rightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$
De (1): $x_3 = g(x_1)$ y $x_4 = g(x_2) \rightarrow g(x_1) = g(x_2)$
y dado que g es univalente $\rightarrow x_1 = x_2 \therefore f \circ g$ es univalente.
- iv) Demostraremos que: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
En efecto, de iii), $f \circ g$ es univalente, entonces existe $(f \circ g)^*$.

Según la definición formal 5.9, si $y=(f \circ g)(x) \rightarrow x=(f \circ g)^*(y)$ (1)

Si $y=f[g(x)] \rightarrow g(x)=f^*(y) \rightarrow x=g*[f^*(y)]=(g \circ f^*)(y)$ (2)

De (1) y (2) se tiene: $(f \circ g)^*(x) = (g \circ f^*)(y)$, $\forall y \in \text{Ran}(f \circ g) = x = \text{Dom}(f \circ g)^* \rightarrow (f \circ g)^* = g \circ f^*$

Corolario. Si f, g y h son funciones univalentes, tales que $(f \circ g \circ h)^*$ existe, entonces: $(f \circ g \circ h)^* = h^* \circ g^* \circ f^*$

vi) Demostraremos que si: $h=f \circ g \rightarrow g=f^* \circ h$

(1) En efecto, si $h=f \circ g \rightarrow f^* \circ h = f^* \circ (f \circ g)$ (Composición por la izq. con f^*)

(2) $\rightarrow f^* \circ h = (f^* \circ f) \circ g$ (Ley Asociativa)

(3) $\rightarrow f^* \circ h = I_{D_f} \circ g$ (Propiedad i))

(4) $\rightarrow (f^* \circ h)(x) = (I_{D_f} \circ g)(x)$

(5) $= I_{D_f}[g(x)] = g(x)$, si $g(x) \in \text{Dom}(f)$

(6) Pero $\text{Dom}(f \circ g) = \{x | x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

(7) Entonces: $(f^* \circ h)(x) = g(x)$, si $x \in \text{Dom}(f \circ g)$

(8) $\rightarrow f^* \circ h = g$, $\forall x \in \text{Dom}(f \circ g)$

EJEMPLO 1. Dada la función $f=\{(1,3), (2,5), (4,7), (3,8)\}$, hallar: f^* , $f^* \circ f$ y $f \circ f^*$.

Solución. (1) Sea $A=\{1,2,3,4\}=\text{Dom}(f)$ y $B=\{3,5,7,8\}=\text{Ran}(f)$. Por simple inspección f es univalente (No existe dos pares con la misma segunda componente), entonces existe f^* .

Por definición: $f^*=\{(3,1), (5,2), (7,4), (8,3)\} \rightarrow \text{Dom}(f^*)=\text{Ran}(f)=B=\{3,5,7,8\}$

(2) $f^* \circ f = \{(1, f^*[f(1)]), (2, f^*[f(2)]), (4, f^*[f(4)]), (3, f^*[f(3)])\}$

$= \{(1, f^*(3)), (2, f^*(5)), (4, f^*(7)), (3, f^*(8))\}$

$= \{(1,1), (2,2), (4,4), (3,3)\} = I_A$

$= \text{Identidad sobre } A = \text{Dom}(f) = \{1,2,3,4\}$

(3) $f \circ f^* = \{(3, f[f^*(3)]), (5, f[f^*(5)]), (7, f[f^*(7)]), (8, f[f^*(8)])\}$

$= \{(3, f(1)), (5, f(2)), (7, f(4)), (8, f(3))\}$

$= \{(3,3), (5,5), (7,7), (8,8)\} = I_B$

$= \text{Identidad sobre } B = \text{Dom}(f^*) = \{3,5,7,8\}$

EJEMPLO 2. Sea la función $f: [-2,1] \rightarrow \mathbb{R} | f(x)=2x+3$. Hallar la función f^* , si existe, y construir las gráficas de f y f^* .

Solución. Si $A=[-2,1]$, la función tiene la forma, $f: A \rightarrow B$

(1) Determinación del rango de f :

$$\text{Si } x \in [-2, 1] \leftrightarrow -2 \leq x < 1 \leftrightarrow -1 \leq 2x+3 < 5 \leftrightarrow -1 \leq f(x) < 5$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f) = [-1, 5) \subset \mathbb{R}, f \text{ no es sobreyectiva}$$

Entonces, según la observación 4, la función inversa de f , si existe, tendrá la forma, $f^*: \text{Ran}(f) \rightarrow A$

(2) Probaremos la inyectividad de f :

$$\text{Sean } x_1, x_2 \in [-2, 1] \rightarrow f(x_1) = 2x_1 + 3 \text{ y } f(x_2) = 2x_2 + 3$$

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \rightarrow x_1 = x_2, f \text{ es inyectiva} \rightarrow \exists f^*$$

(3) Para determinar la función inversa de f existen dos métodos:

a) Haciendo uso de la propiedad: $f \circ f^* = I$

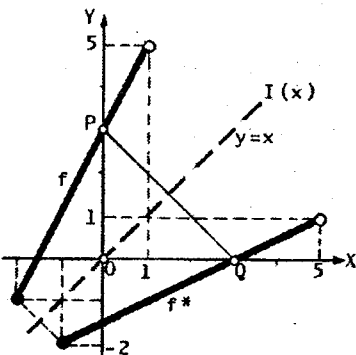
$$\text{Si } f(x) = 2x+3 \text{ y } (f \circ f^*)(x) = x \rightarrow f(f^*(x)) = x \rightarrow 2[f^*(x)] + 3 = x \leftrightarrow f^*(x) = \frac{x-3}{2}$$

b) Método de intercambio de variables (x por y y y por x)

$$\text{Si } y = 2x+3, \text{ cambiando variables: } x = 2y+3 \rightarrow y = f^*(x) = \frac{x-3}{2}, x \in [-1, 5]$$

$$\therefore f^*: [-1, 5] \rightarrow [-2, 1] \mid y = \frac{x-3}{2}$$

En las gráficas de f y f^* podemos observar que el punto $P(0,3) \in f$ es el reflejo del punto $Q(3,0) \in f^*$ respecto de $I(x)$, o sea que la recta $y=x$ es la mediatriz del segmento de recta que une P con Q . En general el punto $P(a,b) \in f$ es el reflejo del punto $Q(b,a) \in f^*$ respecto de la recta $y=x$. De aquí que la gráfica de f^* se obtiene por reflexión de la gráfica de f , respecto de la recta $y=x$.



EJEMPLO 3. Sea la función $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4, x \in (-\infty, -2]\}$. Determinar f^* , si existe. Verificar que $f \circ f^* = I$ para $x \in \text{Ran}(f)$ y $f^* \circ f = I$, $x \in \text{Dom}(f)$

Solución. (1) Debemos probar que f es inyectiva en todo su dominio.

$$\text{Sean } x_1, x_2 \in (-\infty, -2] \rightarrow f(x_1) = x_1^2 - 4 \text{ y } f(x_2) = x_2^2 - 4$$

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4$$

$$\rightarrow x_1^2 = x_2^2 \leftrightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$\text{Dado que } x \in (-\infty, -2] \rightarrow -x_1 = -x_2$$

$$\rightarrow x_1 = x_2, f \text{ es inyectiva} \rightarrow \exists f^*$$

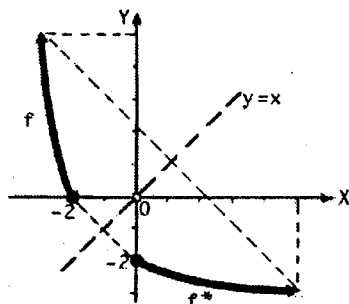
(2) Rango de f : Si $x \leq -2 \rightarrow x^2 \geq 4$

$$\rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow y \geq 0 \rightarrow \text{Ran}(f) = [0, +\infty)$$

(3) Cálculo de f^* por intercambio de variables:

$$x = y^2 - 4 \leftrightarrow y = \pm \sqrt{x+4}$$

Como el $\text{Dom}(f) = \text{Ran}(f^*) = (-\infty, -2]$, debemos



elegir: $y = -\sqrt{x+4} \rightarrow f^*(x) = -\sqrt{x+4}$, $x \in [0, +\infty)$

(4) En las gráficas de f y f^* se puede observar la simetría de ambas respecto de la recta $y=x$.

(5) De las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $f^*(x) = -\sqrt{x+4}$ se tiene:

$$(f \circ f^*)(x) = f[f^*(x)] = f(-\sqrt{x+4}) = (-\sqrt{x+4})^2 - 4 = x, \text{ para } x \in [0, +\infty)$$

$$(f^* \circ f)(x) = f^*[f(x)] = f^*(x^2 - 4) = -\sqrt{x^2 - 4 + 4} = -|x| = -(-x) = x, \text{ para } x \in (-\infty, -2]$$

$$\therefore f \circ f^* = I, \text{ para } x \in [0, +\infty) = \text{Ran}(f)$$

$$f^* \circ f = I, \text{ para } x \in (-\infty, -2] = \text{Dom}(f)$$

EJEMPLO 4. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Establecer si existe función inversa de f ; en caso contrario, restringir su dominio de modo que exista tal función.

Solución. (1) Completando el cuadrado: $f(x) = (x-1)^2 + 2$

Probamos si f es inyectiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$. Si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2$

$$\rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \leftrightarrow (x_1 - 1 = x_2 - 1) \vee (x_1 - 1 = -x_2 + 1) \leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = 2 - x_2)$$

Luego, f no es inyectiva porque x_1 tiene dos valores diferentes. Por lo que no existe función inversa de f .

(2) Trazando la gráfica de f vemos que

$\text{Ran}(f) = [2, +\infty)$, y que la condición de inyectividad ocurre para $x \geq 1$ (derecha del vértice, f es creciente) o para $x \leq 1$ (izquierda del vértice, f es decreciente).

(3) Cambiando variables: $x = (y-1)^2 + 2$

$$\leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{x-2}$$

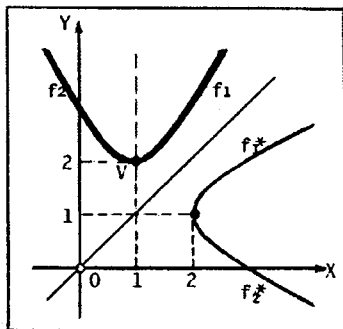
(4) Como $\text{Dom}(f) = \text{Ran}(f^*)$, veamos la restricción del dominio en cada caso:

Para $x \geq 1 \rightarrow \text{Ran}(f_1^*) = [1, +\infty)$, en (3): $y = 1 + \sqrt{x-2}$

$x \leq 1 \rightarrow \text{Ran}(f_2^*) = (-\infty, 1]$, en (3): $y = 1 - \sqrt{x-2}$

(5) Por lo tanto: $f_1^*(x) = 1 + \sqrt{x-2}$, si $x \in [2, +\infty)$

$$f_2^*(x) = 1 - \sqrt{x-2}, \text{ si } x \in [2, +\infty)$$



EJEMPLO 5. Determinar, si existe, la función inversa de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & \text{si } x \in [-4, -2] & (f_1) \\ \sqrt{2+x}, & \text{si } x \in [-2, 2] & (f_2) \\ \left\lfloor \frac{10-x}{4} \right\rfloor - \frac{1}{2}x, & \text{si } x \in [2, 6] & (f_3) \end{cases}$$

Solución. Siendo f una función seccionada probaremos la inyectividad de cada una de las subfunciones:

$$1) \text{ Si } f_1(x_1)=f_1(x_2) \rightarrow \frac{1}{2}x_1^2+1=\frac{1}{2}x_2^2+1 \rightarrow x_1^2=x_2^2 \leftrightarrow |x_1|=|x_2|$$

Para $x \in [-4, -2]$, $x < 0 \rightarrow -x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 = x_2$, f_1 es inyectiva

Si $f_2(x_1)=f_2(x_2) \rightarrow \sqrt{2+x_1}=\sqrt{2+x_2} \rightarrow 2+x_1=2+x_2 \rightarrow x_1=x_2$, f_2 es inyectiva

Si $f_3(x_1)=f_3(x_2) \rightarrow 1-\frac{1}{2}x_1=1-\frac{1}{2}x_2 \rightarrow x_1=x_2$, f_3 es inyectiva

Con lo que queda demostrado la inyectividad de f .

2) Determinación de los rangos de f_1 , f_2 y f_3 :

f_1 es decreciente en $x \in [-4, -2]$ $\rightarrow \text{Ran}(f_1) = \langle f_1(-2), f_1(-4) \rangle = \langle 3, 9 \rangle$

f_2 es creciente en $x \in [-2, 2]$ $\rightarrow \text{Ran}(f_2) = [f_2(-2), f_2(2)] = [0, 2]$

f_3 es decreciente en $x \in [2, 6]$ $\rightarrow \text{Ran}(f_3) = [f_3(6), f_3(2)] = [-2, 0]$

(Nota. En f_3 del paso (1), verificar que $\left\lfloor \frac{10-x}{4} \right\rfloor = 1$, en $x \in [2, 6]$)

3) Dado que $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$

$$\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_3) = \emptyset$$

$$\text{Ran}(f_2) \cap \text{Ran}(f_3) = \emptyset$$

Procedemos a calcular las funciones inversas de cada subfunción:

$$4) \text{ En } f_1: x = \frac{1}{2}y^2 + 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{2x-2}$$

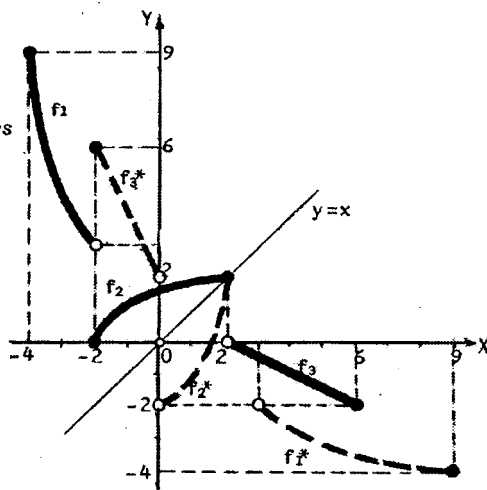
Como $\text{Ran}(f_1^*) = \text{Dom}(f_1) = [-4, -2]$

$$\rightarrow y = -\sqrt{2x-2}, \quad x \in \langle 3, 9 \rangle$$

$$\text{En } f_2: x = \sqrt{2+y} \rightarrow y = x^2 - 2, \quad x \in [0, 2]$$

$$\text{En } f_3: x = 1 - y/2 \rightarrow y = 2 - 2x, \quad x \in [-2, 0]$$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} -\sqrt{2x-2}, & x \in \langle 3, 9 \rangle \\ x^2 - 2, & x \in [0, 2] \\ 2 - 2x, & x \in [-2, 0] \end{cases}$$



EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Sean $g(x)=2x^2-4x+5$ con $x \in \langle 2, 5 \rangle$ y $h(x)=|x|-2$. Hallar el dominio de $g \circ h$.

Solución. (1) Veamos la inyectividad de g en $x \in \langle 2, 5 \rangle$

Completando el cuadrado: $g(x)=2(x-1)^2+3$. La gráfica de g es una parábola con vértice en $V(1,3)$. Luego, g es inyectiva para $x \geq 1$ (dere-

cha del vértice), es decir, para $x \in \langle 2, 5 \rangle \subset [1, +\infty)$.

(2) Rango de g : Siendo g una función creciente para $x \in \langle 2, 5 \rangle$, entonces:

$$\text{Ran}(g) = \langle g(2), g(5) \rangle \rightarrow \text{Ran}(g) = \text{Dom}(f^*) = \langle 5, 35 \rangle$$

$$(3) \text{Dom}(g \circ h) = \{x | x \in \text{Dom}(h) \wedge h(x) \in \text{Dom}(g^*)\} = (R) \wedge (|x| - 2) \in \langle 5, 35 \rangle \\ = 5 < |x| - 2 < 35 \rightarrow 7 < |x| < 37$$

$$\text{de donde: } \text{Dom}(g \circ h) = \langle -37, -7 \rangle \cup \langle 7, 37 \rangle$$

EJERCICIO 2. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ con dominio $[-1/2, 2/3]$. Determinar el valor de verdad de cada afirmación:

a) f es inyectiva

$$b) \text{Ran}(f) = [f(-1/2), f(2/3)]$$

c) La función inversa de f es $y = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3x+3}$ con dominio $[-2/3, 23/4]$

Solución. a) Completando el cuadrado: $f(x) = 3(x-1)^2 - 1$. La gráfica de f es una parábola de vértice en $V(1, -1)$ y es inyectiva para $x \geq 1$ o $x \leq 1$. Como $[-1/2, 2/3] \subset \langle -\infty, 1 \rangle \rightarrow f$ es inyectiva. La afirmación es V.

$$b) \text{Para } x_1 = -1/2 \rightarrow f(x_1) = 3(-1/2 - 1)^2 - 1 = 23/4$$

$$x_2 = 2/3 \rightarrow f(x_2) = 3(2/3 - 1)^2 - 1 = -2/3$$

Vemos que: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, f es decreciente en $[-1/2, 2/3]$

$\rightarrow \text{Ran}(f) = [f(x_2), f(x_1)] = [f(2/3), f(-1/2)]$. La afirmación es Falsa.

$$c) \text{Intercambiando variables: } x = 3(y-1)^2 - 1 \leftrightarrow y = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3x+3}$$

Como $\text{Ran}(f^*) = \text{Dom}(f) = [-1/2, 2/3]$, esto es, $y < 1$

Luego, $y = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3x+3}$, $x \in [-2/3, 23/4]$. La afirmación es verdadera.

EJERCICIO 3. Sean f y g funciones inyectivas tales que: $f^*(x) = \frac{2x}{x-3}$
 $g(x) = \frac{x+3}{x-3}$; si $(g \circ f)(u) = 3$, hallar $(f \circ g)(u+2)$.

Solución. (1) Intercambiando variables, en f^* : $x = \frac{2y}{y-3} \rightarrow y = \frac{3x}{x-2}$

$$\rightarrow f(x) = \frac{3x}{x-2}. \text{ En } g: x = \frac{y+3}{y-3} \rightarrow g^*(x) = \frac{3x+3}{x-1} = 3 + \frac{6}{x-1}$$

$$(2) \text{ Si } (g \circ f)(u) = 3 \rightarrow g^*[f(u)] = 3 \rightarrow g^*\left(\frac{3u}{u-2}\right) = 3$$

$$(3) \text{ Pero: } g^*\left(\frac{3u}{u-2}\right) = 3 + \frac{6}{\frac{3u}{u-2} - 1} = \frac{3(2u-1)}{u+1}$$

$$(4) \text{ De (2) y (3): } \frac{3(2u-1)}{u+1} = 3, \text{ de donde: } u=2$$

$$(5) \text{ Luego, } (f \circ g)(u+2) = f^*[g(4)] = f^*\left(\frac{4+3}{4-1}\right) = f^*(7) = \frac{14}{7-3} = \frac{7}{2}$$

EJERCICIO 4. Sea $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2, & x \in [3, 9] \\ 5x-9, & x \in (9, +\infty) \end{cases}$

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

a) f no es inyectiva

b) $f[f(7)] = 71$

$$c) f^*(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{x}, & x \in [0, 36] \\ \frac{x+9}{5}, & x \in (36, +\infty) \end{cases}$$

Solución. a) Sean $f_1(x) = (x-3)^2$, $x \in [3, 9]$ y $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f_1)$

$$\text{Si } f_1(x_1) = f_1(x_2) \rightarrow (x_1-3)^2 = (x_2-3)^2 \leftrightarrow |x_1-3| = |x_2-3|$$

Pero como $x \in [3, 9]$, $x > 3 \rightarrow x_1-3 = x_2-3 \rightarrow x_1 = x_2$, f_1 es inyectiva.

Sean $f_2(x) = 5x-9$ y $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f_2)$

Si $f_2(x_1) = f_2(x_2) \rightarrow 5x_1-9 = 5x_2-9 \rightarrow 5x_1 = 5x_2 \rightarrow x_1 = x_2$, f_2 es inyectiva.

$$\text{Ran}(f_1) = [f_1(3), f_1(9)] = [0, 36]; \text{Ran}(f_2) = \langle f_2(9), f_2(+\infty) \rangle = \langle 36, +\infty \rangle$$

Siendo f_1 y f_2 inyectivas y $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$, entonces, f es inyectiva.

Luego, la afirmación es falsa.

b) $f(7) = (7-3)^2 = 16 \rightarrow f[f(7)] = f(16) = 5(16)-9 = 71$

La afirmación es verdadera.

c) Por a), f es inyectiva $\rightarrow \exists f^*$. Luego, intercambiando variables en f_1 y f_2 se tiene: En f_1 : $x = (y-3)^2 \leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{x}$

Pero como el $\text{Ran}(f_1) = \text{Dom}(f_1) = [3, 9] \rightarrow y = 3 + \sqrt{x}$, $x \in [0, 36]$

En f_2 : $x = 5y-9 \rightarrow y = \frac{1}{5}(x+9)$, $x \in (36, +\infty)$

$$\text{Entonces: } f^*(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{x}, & x \in [0, 36] \\ \frac{y+9}{5}, & x \in (36, +\infty) \end{cases}. \text{ La afirmación es verdadera.}$$

EJERCICIO 5. Definimos en $\mathbb{R}$ la función f por $f(x) = \frac{4x}{1+|x|}$

a) Determinar si f es biyectiva de $\mathbb{R}$ a $\langle -4, 4 \rangle$

b) Determinar si existe la función f^* .

c) Esbozar la gráfica de f y f^* en un mismo sistema coordenado.

Solución. Sean $f_1(x) = \frac{4x}{1+x} = 4 - \frac{4}{1+x}$, $x \geq 0$ y $f_2(x) = \frac{4x}{1-x} = -4 + \frac{4}{1-x}$, $x < 0$

a) Veamos la inyectividad de f_1 y f_2 :

En f_1 , sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f_1)$. Si $f_1(x_1) = f_1(x_2) \rightarrow 4 - \frac{4}{1+x_1} = 4 - \frac{4}{1+x_2}$

$$\rightarrow \frac{4}{1+x_1} = \frac{4}{1+x_2} \rightarrow x_1 = x_2, f_1 \text{ es inyectiva.}$$

En f_2 , sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f_2)$. Si $f_2(x_1) = f_2(x_2) \rightarrow -4 + \frac{4}{1-x_1} = -4 + \frac{4}{1-x_2}$

$$\rightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \rightarrow x_1 = x_2, f_2 \text{ es inyectiva.}$$

Determinación de los rangos de f_1 y f_2 .

$f_1(x) = 4 - \frac{4}{1+x}$ es creciente $\forall x \in [0, +\infty) \rightarrow \text{Ran}(f_1) = [f_1(0), f_1(+\infty)) = [0, 4)$

$f_2(x) = -4 + \frac{4}{1-x}$, es creciente $\forall x \in (-\infty, 0) \rightarrow \text{Ran}(f_2) = \langle f_2(-\infty), f_2(0) \rangle = \langle -4, 0 \rangle$

(Verificar analíticamente los rangos de f_1 y f_2)

Siendo f_1 y f_2 inyectivas y $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset \rightarrow f$ es inyectiva $\forall x \in \mathbb{R}$

Como el $\text{Ran}(f) = \text{Ran}(f_1) \cup \text{Ran}(f_2) = \langle -4, 4 \rangle = \text{Conjunto de llegada}$, entonces f es biyectiva de $\mathbb{R}$ a $\langle -4, 4 \rangle$.

b) Siendo f inyectiva, existe la función f^* .

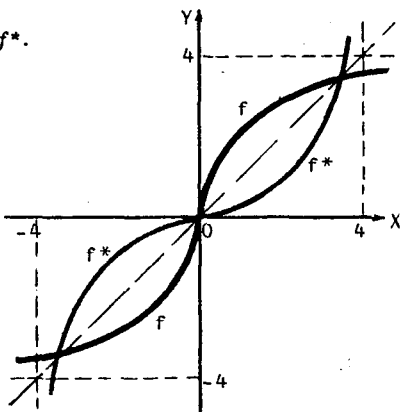
Intercambio de variables:

$$\text{En } f_1: x = \frac{4y}{1+y} \rightarrow y = \frac{x}{4-x}, x \in [0, 4)$$

$$\text{En } f_2: x = \frac{4y}{1-y} \rightarrow y = \frac{x}{4+x}, x \in \langle -4, 0 \rangle$$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} \frac{x}{4-x}, & x \in [0, 4) \\ \frac{x}{4+x}, & x \in \langle -4, 0 \rangle \end{cases}$$

c) Obsérvese que la gráfica de f^* se obtiene de la gráfica de f por reflexión respecto de la recta $y=x$.



EJERCICIO 6. Hallar, si existe, la función inversa de:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2+2} + 1, & -1 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 7/x+1, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

Si existe f^* , graficar f y f^* en el mismo plano.

Solución. Veamos la inyectividad de f :

$$(1) \text{ Sean } f_1(x) = \sqrt{x-x^2+2} + 1 = \sqrt{9/4 - (x-1/2)^2} + 1 \text{ y } x_1, x_2 \in \text{Dom}(f_1)$$

$$\text{Si } f_1(x_1) = f_1(x_2) \rightarrow \sqrt{9/4 - (x_1-1/2)^2} + 1 = \sqrt{9/4 - (x_2-1/2)^2} + 1$$

$$\rightarrow (x_1-1/2)^2 = (x_2-1/2)^2 \rightarrow |x_1-1/2| = |x_2-1/2|$$

Como $x \in [-1, 1/2]$, $x \leq 1/2 \rightarrow -(x_1-1/2) = -(x_2-1/2) \rightarrow x_1 = x_2$, f_1 es inyectiva.

$$(2) \text{ Sean: } f_2(x) = 2 - \frac{7}{x+1} \text{ y } x_1, x_2 \in \text{Dom}(f_2)$$

$$\text{Si } f_2(x_1) = f_2(x_2) \rightarrow 2 - \frac{7}{x_1+1} = 2 - \frac{7}{x_2+1} \rightarrow x_1+1 = x_2+1$$

$$\rightarrow x_1 = x_2, f_2 \text{ es inyectiva}$$

(3) Determinación de los rangos de f_1 y f_2 .

$$f_1 \text{ es creciente en } [-1, 1/2] \rightarrow \text{Ran}(f_1) = [f_1(-1), f_1(1/2)] = [1, 5/2]$$

$$f_2 \text{ es creciente en } \langle 2, 4 \rangle \rightarrow \text{Ran}(f_2) = \langle f_2(2), f_2(4) \rangle = \langle -1/3, 3/5 \rangle$$

Siendo f_1 y f_2 inyectivas y $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$, f es inyectiva $\rightarrow \exists f^*$.

(4) Intercambio de variables:

$$\text{En } f_1: x = \sqrt{9/4 - (y-1/2)^2} + 1 \leftrightarrow y = 1/2 \pm \sqrt{9/4 - (x-1/2)^2}$$

$$\text{Ran}(f_1^*) = \text{Dom}(f_1) = [-1, 1/2], \text{ o sea } y \leq 1/2 \rightarrow y = 1/2 - \sqrt{9/4 - (x-1/2)^2}$$

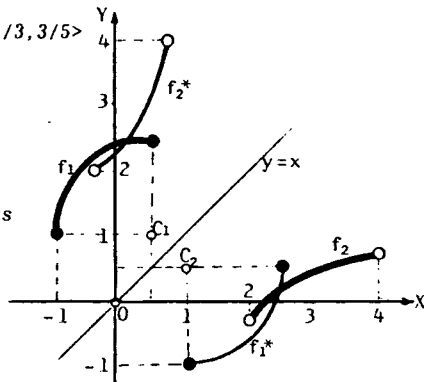
$$\text{En } f_2: x = 2 - \frac{7}{y+1} \leftrightarrow y = \frac{x+5}{2-x}, \quad x \in <-1/3, 3/5>$$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5+8x-4x^2}), & x \in [1, 5/2] \\ \frac{x+5}{2-x}, & x \in <-1/3, 3/5> \end{cases}$$

(5) Obsérvese que las gráficas de f_1 y f_1^* son partes de las circunferencias

$$C_1: (x-1/2)^2 + (y-1)^2 = 9/4 \quad y$$

$$C_2: (x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 9/4 \quad \text{respectivamente}$$



EJERCICIO 7. Demostrar que la función f definida por: $f(x) = 6 - 2x - \frac{1}{2}x^2$ con $\text{Dom}(f) = [-4, -2] \cup <0, 2]$ es univalente y hallar f^* .

Solución. $f(x) = 8 - \frac{1}{2}(x+2)^2$, $x \in [-4, -2] \cup <0, 2]$

La gráfica de f en $\mathbb{R}^2$ es la parábola de vértice $V(-2, 8)$

(1) Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ y si $f(x_1) = f(x_2)$

$$\rightarrow 8 - \frac{1}{2}(x_1+2)^2 = 8 - \frac{1}{2}(x_2+2)^2$$

$$\rightarrow |x_1+2| = |x_2+2| \quad (1)$$

a) Para $x_1, x_2 \in [-4, -2]$

$$\text{Como } x \leq -2 \rightarrow x+2 \leq 0 \rightarrow |x+2| = -(x+2)$$

$$\text{Luego, en (1): } -(x_1+2) = -(x_2+2) \rightarrow x_1 = x_2$$

b) Para $x_1, x_2 \in <0, 2]$, $x > 0 \rightarrow |x+2| = x+2$

$$\text{En (1): } x_1+2 = x_2+2 \rightarrow x_1 = x_2$$

(2) Rang $\circ$ de f en cada intervalo:

$$f_1(x) = 8 - \frac{1}{2}(x+2)^2 \text{ es creciente en } [-4, -2]$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f_1) = [f_1(-4), f_1(-2)] = [6, 8]$$

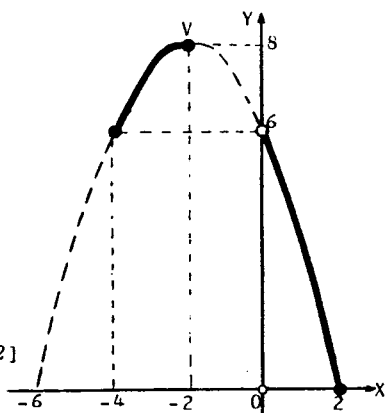
$$f_2(x) = 8 - \frac{1}{2}(x+2)^2 \text{ es decreciente en } <0, 2] \rightarrow \text{Ran}(f_2) = [f_2(2), f_2(0)] = [0, 6]$$

Por a), b) y $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$, f es univalente $\rightarrow \exists f^*$.

(3) Intercambiando variables: $x = 8 - \frac{1}{2}(y+2)^2 \leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{16-2x}$

$$\text{Si } \text{Ran}(f_1^*) = \text{Dom}(f_1) = [-4, -2], \quad y \leq -2 \rightarrow y = -2 - \sqrt{16-2x}, \quad x \in [6, 8]$$

$$\text{Si } \text{Ran}(f_2^*) = \text{Dom}(f_2) = <0, 2], \quad y > 0 \rightarrow y = -2 + \sqrt{16-2x}, \quad x \in [0, 6]$$



$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{16-2x}, & x \in [6, 8] \\ -2 + \sqrt{16-2x}, & x \in [0, 6] \end{cases}$$

EJERCICIO 8. Sea la función definida por $f(x) = \frac{ax+5}{3x-2b}$. Hallar los valores de a y b si se cumple simultáneamente las condiciones:

a) $\text{Dom}(f^*) = \mathbb{R} - \{2\}$ y b) $f^* = f$

Solución. Sea $y = \frac{ax+5}{3x-2b} \rightarrow x = \frac{2by+5}{3y-a} \rightarrow f^*(x) = \frac{2bx+5}{3x-a}$

Entonces, f^* es real $\leftrightarrow 3x-a = 0 \leftrightarrow x = a/3 \rightarrow \text{Dom}(f^*) = \mathbb{R} - \{a/3\}$

Por a): $\text{Dom}(f^*) = \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow a/3 = 2 \leftrightarrow a = 6$

Por b): $f^*(x) = f(x) \rightarrow \frac{2bx+5}{3x-6} = \frac{6x+5}{3x-2b}$. La igualdad se cumple si: $b=3$

$$\therefore f(x) = \frac{6x+5}{3x-6}, \quad a=6, \quad b=3$$

EJERCICIO 9. Sea la función f definida por $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \sqrt{x - \llbracket x \rrbracket}$, $x \in [-1, 3]$

a) Hallar la función f^* .

b) Graficar f y f^* en un mismo plano.

Solución. a) Puesto que $x - \llbracket x \rrbracket \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces, si

$$\llbracket x \rrbracket = n \leftrightarrow n < x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z} \rightarrow f(x) = n + \sqrt{x-n}, \quad x \in [n, n+1]$$

(1) Veamos si f es inyectiva $\forall x \in [n, n+1]$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow n + \sqrt{x_1-n} = n + \sqrt{x_2-n}$

$$\rightarrow x_1 - n = x_2 - n \rightarrow x_1 = x_2, \quad f \text{ es inyectiva}$$

(2) Cálculo del rango de la función f :

$$\llbracket x \rrbracket = n \leftrightarrow n \leq x < n+1 \leftrightarrow 0 \leq x-n < 1 \leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-n} < 1$$

$$\leftrightarrow n \leq n + \sqrt{x-n} < n+1$$

$$\leftrightarrow n \leq f(x) < n+1 \rightarrow y \in [n, n+1]$$

Luego, el rango de f es la unión de intervalos de longitud unitaria de la forma $[n, n+1]$

al igual que su dominio, esto es:

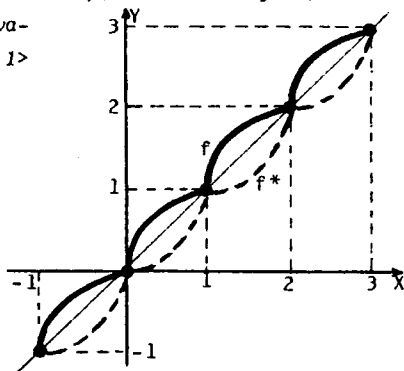
$$\text{Dom}(f) = \text{Ran}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$$

Como no hay intersección entre los rangos la función f es univalente $\rightarrow \exists f^*$.

(3) Intercambio de variables: $x = n + \sqrt{y-n}$

$$\text{de donde: } f^*(x) = n + (x-n)^2, \quad x \in [n, n+1]$$

b) Construimos la gráfica de $f(x) = n + \sqrt{x-n}$



dando valores a n , ($n=-1,0,1,2$) de modo que cubra todo el intervalo $[-1,3]$.

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x+1} & , x \in [-1, 0] \\ \sqrt{x} & , x \in [0, 1] \\ 1 + \sqrt{x-1} & , x \in [1, 2] \\ 2 + \sqrt{x-2} & , x \in [2, 3] \\ 3 & , x = 3 \end{cases} \quad f^*(x) = \begin{cases} -1 + (x+1)^2 & , x \in [-1, 0] \\ x^2 & , x \in [0, 1] \\ 1 + (x-1)^2 & , x \in [1, 2] \\ 2 + (x-2)^2 & , x \in [2, 3] \\ 3 & , x = 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 10. Sea la función $f(x) = \frac{(x+2)(2x^2-7x+6)(x-1)}{(x-2)(x^2+x-2)}$

a) Demostrar que f es univalente.

b) Hallar f^* y esbozar las gráficas de f y f^* en un mismo plano.

Solución. a) En efecto, $f(x) = \frac{(x+2)(2x-3)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-1)} = 2x-3$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$

Si $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\} \rightarrow \text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{f(-1), f(1), f(2)\} = \mathbb{R} - \{-7, -1, 1\}$

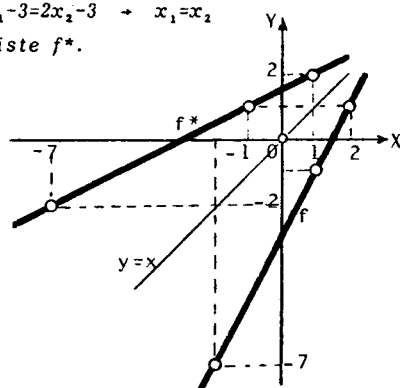
Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$. Si $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \rightarrow x_1 = x_2$

Luego, f es univalente, por lo tanto, existe f^* .

b) Intercambio de variables:

$$x = 2y - 3 \rightarrow y = \frac{x+3}{2}$$

$$\therefore f^*(x) = \frac{x+3}{2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-7, -1, 1\}$$



EJERCICIO 11. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & , \sqrt{3} \leq x \leq 2 \\ 1-\sqrt{x^2-4} & , x \leq -4 \end{cases} ; \quad g(x) = \sqrt{|x^2-4|} - 3, \quad x \in (-\infty, -4] \cup (-\infty, 2]$$

tales que $f=h \circ g$.

a) Demostrar que f y g son funciones univalentes.

b) Hallar la función h .

Solución. a) Sean $f_1(x) = 2-x^2$, $x \in [\sqrt{3}, 2]$ y $f_2(x) = 1-\sqrt{x^2-4}$, $x \in (-\infty, -4]$

$$(1) \text{ En } f_1: \text{ Si } f_1(x_1) = f_1(x_2) \rightarrow 2-x_1^2 = 2-x_2^2 \rightarrow |x_1| = |x_2|$$

Como $x \in [\sqrt{3}, 2]$, $x > 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow x_1 = x_2$, f_1 es univalente

$$(2) \text{ En } f_2: \text{ Si } f_2(x_1) = f_2(x_2) \rightarrow 1 - \sqrt{x_1^2 - 4} = 1 - \sqrt{x_2^2 - 4} \rightarrow |x_1| = |x_2|$$

Siendo $x \in (-\infty, -4]$, $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow -x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 = x_2$, f_2 es univalente

(3) Determinación de los rangos:

$$f_1(x) = 2-x^2 \text{ es decreciente en } [\sqrt{3}, 2] \rightarrow \text{Ran}(f_1) = [f_1(2), f_1(\sqrt{3})] = [-2, -1]$$

$f_2(x)$ es creciente en $[-\infty, -4] \rightarrow \text{Ran}(f_2) = [f_2(-\infty), f_2(-4)] = [-\infty, 1-2\sqrt{3}]$

Siendo $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \emptyset$, entonces existe f^* .

$$(4) |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x^2 \geq 4 \leftrightarrow (x \leq -2) \vee (x \geq 2) \\ 4 - x^2, & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Interceptando los dominios parciales con el $\text{Dom}(g) = [-\infty, -4] \cup (0, 2]$ obtenemos:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} - 3, & \text{si } x \leq -4 & (g_1) \\ \sqrt{4 - x^2} - 3, & \text{si } 0 < x \leq 2 & (g_2) \end{cases}$$

$$(5) \text{ Sean } x_1, x_2 \in \text{Dom}(g_1). \text{ Si } g_1(x_1) = g_1(x_2) \rightarrow \sqrt{x_1^2 - 4} - 3 = \sqrt{x_2^2 - 4} - 3 \\ \rightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \rightarrow |x_1| = |x_2|$$

Como $x \leq -4$, o sea, $x < 0 \rightarrow -x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 = x_2$, g_1 es univalente.

$$(6) \text{ Sean } x_1, x_2 \in \text{Dom}(g_2). \text{ Si } g_2(x_1) = g_2(x_2) \rightarrow \sqrt{4 - x_1^2} - 3 = \sqrt{4 - x_2^2} - 3 \\ \rightarrow 4 - x_1^2 = 4 - x_2^2 \rightarrow |x_1| = |x_2|$$

Como $x \in (0, 2]$, o sea $x > 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow x_1 = x_2$, g_2 es univalente.

Luego, de (5) y (6), g es univalente $\forall x \in \text{Dom}(g)$

$$b) \text{ Si } f = h \circ g \rightarrow f \circ g^* = (h \circ g) \circ g^* = h \circ (g \circ g^*) = h \circ I = h^* \\ \rightarrow (f \circ g^*)^* = (h^*)^* \rightarrow g \circ f^* = h$$

$$(7) \text{ Intercambio de variables en } f_1: x = 2 - y^2 \leftrightarrow y = \pm \sqrt{2 - x}$$

Siendo $\text{Dom}(f_1) = \text{Ran}(f_1) = [\sqrt{3}, 2] \rightarrow y = \sqrt{2 - x}$, $x \in [-2, -1]$

$$(8) \text{ En } f_2: x = 1 - \sqrt{y^2 - 4} \leftrightarrow y = \pm \sqrt{4 + (1 - x)^2} \\ \text{Dom}(f_2) = \text{Ran}(f_2) = [-\infty, -4] \rightarrow y = -\sqrt{(x - 1)^2 + 4}, x \in [-\infty, 1 - 2\sqrt{3}] \\ \therefore f^*(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x}, & x \in [-2, -1] & (f_1^*) \\ -\sqrt{(x - 1)^2 + 4}, & x \in [-\infty, 1 - 2\sqrt{3}] & (f_2^*) \end{cases}$$

$$9) g \circ f^* \text{ está definida } \leftrightarrow \text{Dom}(g) \cap \text{Ran}(f^*) \neq \emptyset$$

Dado que $\text{Ran}(f_1^*) = \text{Dom}(f_1) = [\sqrt{3}, 2]$ y $\text{Ran}(f_2^*) = \text{Dom}(f_2) = [-\infty, -4]$

Vemos que solo existen: $g_1 \circ f_1^*$ y $g_2 \circ f_2^*$

$$\text{Ran}(f_1^*) \subset \text{Dom}(g_1) \rightarrow \text{Dom}(g_1 \circ f_1^*) = \text{Dom}(f_1^*) = [-\infty, 1 - 2\sqrt{3}]$$

$$\text{Ran}(f_2^*) \subset \text{Dom}(g_2) \rightarrow \text{Dom}(g_2 \circ f_2^*) = \text{Dom}(f_2^*) = [-2, -1]$$

$$10) \text{ Luego: } (g_1 \circ f_1^*)(x) = g_1[f_1^*(x)] = g_1[-\sqrt{(x - 1)^2 + 4}] = \sqrt{(x - 1)^2 + 4} - 3 = |x - 1| - 3$$

Siendo $x \in [-\infty, 1 - 2\sqrt{3}]$, o sea $x < 1 \rightarrow (g_1 \circ f_1^*)(x) = -(x - 1) - 3 = -x - 2$

$$(g_2 \circ f_2^*)(x) = g_2[f_2^*(x)] = g_2(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{4 - (2 - x)} - 3 = \sqrt{x + 2} - 3$$

$$\therefore h(x) = g[f^*(x)] = \begin{cases} \sqrt{x + 2} - 3, & \text{si } x \in [-2, -1] \\ -x - 2, & \text{si } x \in [-\infty, 1 - 2\sqrt{3}] \end{cases}$$

$$\text{ EJERCICIO 12. Sea la función: } f(x) = \begin{cases} -(x + 2)^2 - 4, & x \in [-5, -2] \\ 2x \lfloor x + 3 \rfloor, & x \in [-2, -1] \\ \sqrt{x + 1} + 2, & x \in [-1, 3] \\ 4, & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Determinar, si existe, la función f^* . Graficar f y f^* en un mismo plano.

Solución. Determinemos la univalencia de cada una de las subfunciones de f .

(1) Sean: $f_1(x) = -(x+2)^2 - 4$, $x_1, x_2 \in [-5, -2]$, $x < 0$

Si $f_1(x_1) = f_1(x_2) \rightarrow -(x_1+2)^2 - 4 = -(x_2+2)^2 - 4 \rightarrow |x_1+2| = |x_2+2|$

Pero como $x < 0 \rightarrow -(x_1+2) = -(x_2+2) \rightarrow x_1 = x_2$, f_1 es univalente.

(2) Sea $f_2(x) = 2x \lfloor x+3 \rfloor$, $x \in (-2, -1) \rightarrow -2 < x < -1 \rightarrow 1 < x+3 < 2$

Luego, si $\lfloor x+3 \rfloor = 1 \rightarrow f_2(x) = 2x$ (función lineal) $\rightarrow f_2$ es univalente.

(3) Sean: $f_3(x) = \sqrt{x+1} + 2$, $x_1, x_2 \in (-1, 3)$

Si $f_3(x_1) = f_3(x_2) \rightarrow \sqrt{x_1+1} + 2 = \sqrt{x_2+1} + 2 \rightarrow x_1+1 = x_2+1$

$\rightarrow x_1 = x_2$, f_3 es univalente.

(4) $f_4(-1) = 4$, es un punto del plano $\rightarrow f_4$ es univalente.

(5) Verificar que los respectivos rangos son:

$\text{Ran}(f_1) = [-13, -4]$, $\text{Ran}(f_2) = (-4, -2)$, $\text{Ran}(f_3) = (2, 4)$, $\text{Ran}(f_4) = \{4\}$

Como no hay intersección dos a dos entre los rangos, la función f es univalente $\forall x \in \text{Dom}(f)$ y por lo tanto, existe f^* .

(6) Intercambio de variables:

En f_1 : $x = -(y+1)^2 - 4 \leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{-x-4}$

Pero $\text{Dom}(f_1) = \text{Ran}(f_1^*) = [-5, -2]$, $y \leq -2 \rightarrow y = -2 - \sqrt{-(x+4)}$

$\rightarrow f_1^*(x) = -2 - \sqrt{-(x+4)}$, $x \in [-13, -4]$

En f_2 : $x = 2y \rightarrow y = x/2$

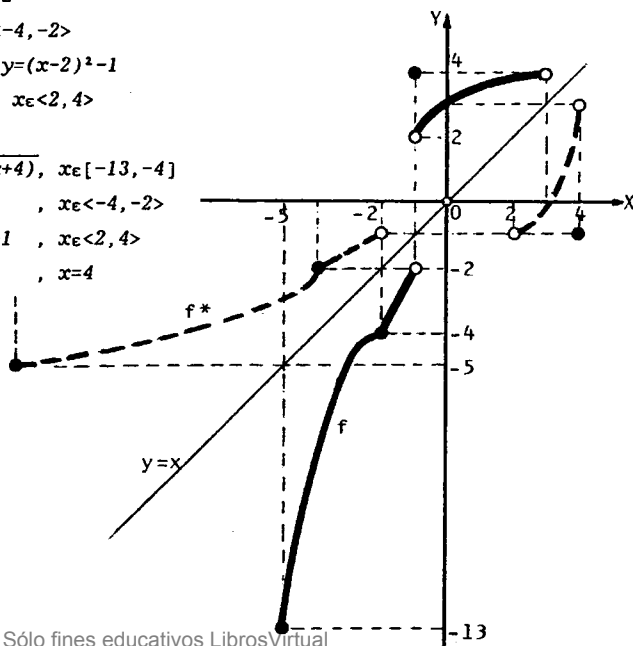
$\rightarrow f_2^*(x) = x/2$, $x \in (-4, -2)$

En f_3 : $x = \sqrt{y+1} + 2 \rightarrow y = (x-2)^2 - 1$

$\rightarrow f_3^*(x) = (x-2)^2 - 1$, $x \in (2, 4)$

En f_4 : $y = -1$, si $x = 4$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{-(x+4)}, & x \in [-13, -4] \\ x/2, & x \in (-4, -2) \\ (x-2)^2 - 1, & x \in (2, 4) \\ -1, & x = 4 \end{cases}$$



EJERCICIOS: Grupo 39

1. f es una función real de variable real e inyectiva. Si $f(\frac{x+1}{x})=a$ y $f^*(x) = \frac{3x}{3x+1}$, para cierto real x , hallar el valor de $n=4x-5$.
2. Las funciones f y g son tales que $f(x) = \frac{2x+6}{x-4}$, $x \neq 4$, $g^*(x) = \frac{x+2}{2x}$, $x \neq 0$ y se sabe que existe un número real a tal que $(f \circ g)(a)=6$. Hallar el número $n=(g \circ f)(a + \frac{16}{27})$.
3. Sean las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{3x}{x-2}$, $x \neq 2$, $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$, $x \neq 2$. Si $(g \circ f)(u)=3$, hallar $(f \circ g)(u+2)$.
4. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ por la regla: $f(x) = \frac{3x-4a}{5}$. Si $f^*(3)=2a-36$ y $f^*(5)=3a+b$, hallar el valor $n=f^*(a-3b)$.
5. Sean $f(x)=x^2+2$, $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Si $g^*[f^*(x)]=-4/3$, hallar $n=g^*(a+5)$.
6. Sean f y g funciones reales de variable real tales que $f(x)=3x+5$, $g(x)=mx+b$ y $f[g(x)]=x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hallar $(f \circ g)(1/a + 5)$.
7. f es una función real biyectiva tal que $f[f(a)]=f(8)$; $f^*(8)=3$. Hallar el valor de $n=f^*[f(a)] + \frac{1}{5}f[f^*(5)]$.
8. Si f^* es una función biyectiva tal que $f^*(\frac{x+4}{3x})=c$; hallar el conjunto solución de $f(c) > \frac{3x}{x+4}$.
9. Sea la función $f:[1,4] \rightarrow [a,b]$, tal que $f(x)=x^2-2x+3$. Demostrar que la función f es inyectiva y hallar a y b para que f sea biyectiva.
10. Si f , g y h son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definidas por las ecuaciones $f(x)=2|x|-x$, $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$, $h(x)=2x+3$. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
 a) f es inyectiva b) g es sobreyectiva c) h es inyectiva
11. Si $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=2\lfloor 2x \rfloor$, establecer el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
 a) f es sobreyectiva b) f es inyectiva c) $f(1/2)-f(2/3)+f(\sqrt{2})=12$
12. Sean las funciones inyectivas: $f(x)=3x^2-6x+4$, $x \in [1, +\infty)$ y $g(x)=\frac{x-2}{x+1}$, $x \neq -1$. Si $f^*[g^*(a)]=2$, hallar $n=f[g(a+8/5)]$.
13. Dadas las funciones: $f=\{(x,x^2) | \sqrt{x(x-1)} \geq 0\}$ y $g=\{(x,\sqrt{3-x}) | -1 \leq x \leq 3\}$, hallar, si existe, $f \circ g$.

14. Sea $f: A \rightarrow f(A) = B$, una función definida en $A = [-1, 4]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 5-3x & , x \in [-1, 2) \\ 3x^2 - 6x + 12 & , x \in [2, 4] \end{cases} \quad \text{Hallar el valor de verdad de las afirmaciones siguientes:}$$

a) f es biyectiva b) $B = [-1, 36]$ c) $f^*(10) = 1 + \sqrt{3}/3$ d) $f^*(4) + f^*(21) = 10/3$

15. Dadas las funciones reales $f(x) = \frac{1+|x|}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; hallar el dominio de $f \circ g^*$. (No es necesario hallar f^* y g^*).

16. Demostrar que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es biyectiva.

17. Determinar analíticamente si la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ es biyectiva.

18. Sea f una función real definida por $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $x \in [0, +\infty) \setminus \{2\}$. Determinar si f es biyectiva.

19. Sea $f(x) = \lfloor 2x-4 \rfloor (x^2+2)$. a) Si $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, hallar el rango y graficar la función. b) Determinar, si existe, inversa de $f(x)$.

20. Analizar si las funciones reales f y g son inyectivas:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+10 & , x < 0 \\ \sqrt{x^2+16} & , 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{x^2-4} & , \text{si } x > 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2-10x-21 & , x \in [-5, -1] \\ \frac{|x-2|-1}{|x+3|} & , x \in (1, 2] \end{cases}$$

21. Sea la función lineal $f(x) = ax+b$, $x \in [-3, 3]$, $a > 1/2$

a) Si $h(x) = f(x) + f^*(x) = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$, hallar a y b .

b) Si $g(x) = |x+3| - |x+1|$, hallar $f \circ g$, si existe.

22. Sea la función f inyectiva definida en $\mathbb{R}$ por la ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x} & , x < 1 \\ x - \lfloor x \rfloor & , 1 \leq x < 2 \\ 3x-5 & , 2 \leq x < 4 \end{cases} \quad \text{Hallar } f^*(-2) + 2f^*(1/2) + 3f^*(2)$$

23. Sea f una función real de variable real definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $x \neq 2$

a) Determinar el dominio y el rango de f .

b) Determinar f^* (si es posible) demostrando lo que fuera necesario.

c) Es verdad que el gráfico de f es simétrico respecto a la recta $y=x$?

d) Existe algún número real cuya imagen según f sea él mismo? Justificar e interpretar geométricamente.

24. Decimos que una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente si: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f): x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Demostrar que si una función $g: A \rightarrow B$, con $B \subset \mathbb{R}$ es sobreyectiva y estrictamente decreciente, en-

tonces: a) g tiene inversa. b) g^* es estrictamente decreciente.

25. Si $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x \leq 0 \\ -3x^2 - 6x + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$. a) Demostrar que h es estrictamente decreciente. b) Determinar h^* .

26. Sea la función $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{1}{1-|x|}$. Hallar, si existe, f^* .

27. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \in [-3, -1] \\ 2 + \sqrt{3 + 2x - x^2}, & x \in [-1, 1] \end{cases}$. a) Hallar, si existe, f^*

b) Esbozar las gráficas de f y f^* en un mismo plano.

28. Demostrar que la función $f(x) = \frac{1}{2}(12 - 4x + x^2)$, $x \in [0, 1] \cup [2, 3]$ es univalente y hallar la función f^* .

En los ejercicios del 29 al 38, se dan las funciones reales f ; probar que son univalentes y hallar, en cada caso, la función f^* .

29. $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{x^2 + 12x + 27}, & x \leq -1 \\ x^2 + 6x + 6, & x > 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & x \in [-4, -2] \\ \sqrt{x+2}, & x \in [-2, 2] \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2, & x \in [-3, -2] \\ \frac{|x+3|}{|x-2| - 1}, & x \in (-1, 2) \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 7, & x < 2 \\ \sqrt{\frac{x+6}{x}}, & x \geq 2 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 5, & x \in [-2, 1] \\ \sqrt{x-5}, & x \in [5, +\infty) \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7, & x \in (-3, -1) \cup (1, 7] \\ \sqrt{7-2x}, & x \in [-1, 3] \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x \in (-\infty, 2] \\ \frac{x^2}{x-2}, & x \in (2, 4) \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \geq 1 \\ x^3 + 4, & x < 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1, & x \in [-4, -2] \\ \sqrt{2+x}, & x \in [-2, 2] \\ 1 - \frac{x}{2}, & x \in (2, 6] \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [1, 2] \\ \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}, & x \in [-1, 1] \\ -\sqrt{-x}, & x \in [-9, -1] \end{cases}$

39. Dadas las funciones reales de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \sqrt{3} \leq x \leq 2 \\ 1 - \sqrt{x^2 - 4}, & x \leq -4 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = |x - 2|, \quad -4 \leq x \leq -3/2$$

Determinar $(g \circ f^*)(x)$.

40. Sean las funciones: $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [-1, 2] \\ \frac{\lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor}{x}, & x \in (2, 3) \end{cases}$; $g(x) = \frac{x+2}{x-2}, x \neq 2$

Hallar, si existen, las funciones: f^* y g^* .

41. Sea la función $f(x) = \frac{x-3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - 1$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$; demostrar que f es univalente y hallar f^* .

42. Dadas las funciones: $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < -1 \\ x+1, & x \geq -1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Hallar, si existe, fog^* .

43. Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 10-\sqrt{2-x}, & x < -2 \\ x^2+4, & -2 \leq x \leq 4 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} 4-x, & x \leq -3 \\ \sqrt{2x-3}, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Determinar una función h , si existe, tal que $g=h \circ f$.

44. Si $f: [-4, 6] \rightarrow [-2, 2] \cup \langle 3, 9 \rangle$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1, & x \in [-4, -2] \\ \sqrt{2+x}, & x \in [-2, 2] \\ 1 - \frac{x}{2}, & x \in \langle 2, 6 \rangle \end{cases} \quad \text{Demostrar que } f \text{ es biyectiva.}$$

45. Sean $f(x) = \frac{x}{2+x}$, $x < -2$ y $g(x) = \begin{cases} 2x^2-12x+2, & -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}, & x > 3 \end{cases}$

Hallar $f \circ g$ indicando su dominio y regla de correspondencia.

46. Sea la función real $f: A \rightarrow B$ $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x^2-2x-5), & x \in [1, 4] \\ -2x+3, & x \in [-2, 1] \end{cases}$

Haciendo las restricciones posibles, hallar A y B para que f sea biyectiva, de modo tal que el dominio restringido sea el mayor posible.

47. Sean f, g, h y t funciones reales definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0 \\ 3-x, & x > 4 \end{cases}; \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ x, & x < 0 \end{cases}; \quad t(x) = \begin{cases} -1-\sqrt{-x}, & x < 0 \\ x-3, & x > 4 \end{cases}$$

Si $t = h \circ g \circ f$, hallar g y g^* si es que existe.



9.1 IMAGEN DIRECTA DE UN CONJUNTO

Definición 5.10 Sea una función $f: A \rightarrow B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$. Si $M \subset A = \text{Dom}(f)$ se denomina la imagen directa de M mediante f , al conjunto $f(M)$, donde:

$$f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$$

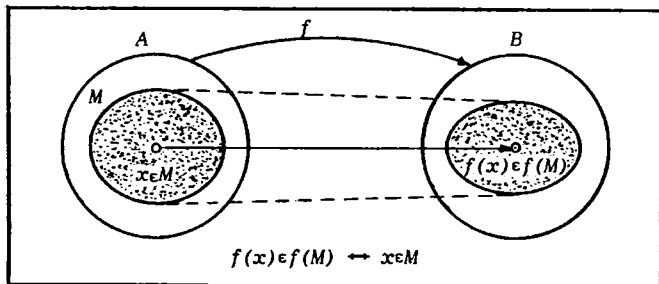
y se lee "Conjunto de las imágenes de x , tal que $x \in M$ "

o bien:

$$f(M) = \{y \in B \mid \exists x \in M \wedge f(x) = y\}$$

Según esta definición:

$$y \in f(M) \leftrightarrow \exists x \in M \mid y = f(x)$$



En particular si $M=A$, entonces $f(A)$ se llama **imagen del dominio por f** . Además, para toda función f se tiene: $f(\emptyset) = \emptyset$. Obviamente, f es sobreyectiva si y sólo si, $f(A)=B$.

EJEMPLO 1. Sean los conjuntos: $A=\{0,1,2,3,5,7\}$, $B=\{-1,1,3,4,6\}$,
 $M=\{1,2,3,5\}$ y $N=\{0,5,3,7\}$, y sea la función $f=\{(0,1), (1,3),$
 $(2,2), (-1,6), (7,5), (3,7)\}$. Hallar: a) $f(M)$ b) $f(N)$ c) $f(M \cup N)$ d) $f(M \cap N)$

Solución. a) $M \subset A \rightarrow f(M) = \{f(x) \mid x \in M\} = \{f(1), f(2), f(3), f(5)\}$. En f se tiene
 $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=7$, $f(5)=\text{no existe} \rightarrow f(M) = \{3, 2, 7\}$

b) $N \subset A \rightarrow f(N) = \{f(x) \mid x \in N\} = \{f(0), f(3), f(5), f(7)\}$.

En f : $f(0)=1$, $f(3)=7$, $f(5)=\text{no existe}$, $f(7)=5 \rightarrow f(N) = \{1, 7, 5\}$

c) $M \cup N = \{0, 1, 2, 3, 7\} \subset A \rightarrow f(M \cup N) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(7)\} = \{1, 3, 2, 7, 5\}$

d) $M \cap N = \{1, 3\} \subset A \rightarrow f(M \cap N) = \{f(1), f(3)\} = \{3, 7\}$

Observación. $f(M) \cup f(N) = \{3, 2, 7\} \cup \{1, 3, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\} = f(M \cup N)$

$$f(M) \cap f(N) = \{7\} \neq f(M \cap N)$$

PROPIEDADES DE LA IMAGEN DIRECTA DE UN CONJUNTO

Sea la función $f: A \rightarrow B$ y M y N subconjuntos del dominio A .

ID.1 Si un subconjunto del dominio es parte de otro, entonces la misma relación vale para sus imágenes. Esto es:

$$\text{Si } f: A \rightarrow B, M \subset A, N \subset A \text{ y } M \subset N \rightarrow f(M) \subset f(N)$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } M \subset N \leftrightarrow (x \in M \wedge x \in N)$$

(Def. $\subset$)

- (2) Sea $z \in f(M) \rightarrow \exists x \in M | f(x) = z$ (Def. de I.D)
 (3) $\rightarrow \exists x \in N | f(x) = z$ (Por ser $M \subset N$)
 (4) $\rightarrow z \in f(N)$ (Def. de I.D)
 (5) Por lo tanto, de (2) y (4): $f(M) \subset f(N)$ (Def. $\subset$)

ID.2 La imagen de la unión de dos subconjuntos del dominio, es igual a la unión de sus imágenes. Esto es:

$$\text{Si } f: A \rightarrow B, M \subset A \text{ y } N \subset A \rightarrow f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$$

Demostración. Probaremos la igualdad por doble inclusión

$$a) f(M \cup N) \subset f(M) \cup f(N)$$

En efecto:

- (1) Sea $z \in f(M \cup N) \rightarrow \exists x \in (M \cup N) | f(x) = z$ (Def. de I.D)
 (2) $\rightarrow \exists x | (x \in M \vee x \in N) \wedge f(x) = z$ (Def. de $\cup$)
 (3) $\rightarrow (\exists x | x \in M \wedge f(x) = z) \vee (\exists x | x \in N \wedge f(x) = z)$ (Intersec. I.12)
 (4) $\rightarrow z \in f(M) \vee z \in f(N)$ (Def. de I.D)
 (5) $\rightarrow z \in f(M) \cup f(N)$ (Def. de $\cup$)
 (6) Luego, de (1) y (5): $f(M \cup N) \subset f(M) \cup f(N)$ (Def. $\subset$)

- b) Probaremos ahora que: $f(M) \cup f(N) \subset f(M \cup N)$

En efecto:

- (1) Por la propiedad U.7 (Unión de conjuntos): $A \subset (A \cup B), \forall B$
 $B \subset (A \cup B), \forall A$
 (2) Si $M \subset (M \cup N) \rightarrow f(M) \subset f(M \cup N)$ (ID.1)
 (3) Si $N \subset (M \cup N) \rightarrow f(N) \subset f(M \cup N)$
 (4) Entonces: $f(M) \cup f(N) \subset f(M \cup N)$

Por lo tanto, de a) y b) queda demostrado que: $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$

ID.3 La imagen de la intersección de dos subconjuntos del dominio está incluida en la intersección de las imágenes. Esto es:

$$\text{Si } f: A \rightarrow B, M \subset A, N \subset A \rightarrow f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$$

La igualdad se cumple en el caso de que f sea inyectiva.

Demostración. En efecto:

- (1) Sea $z \in f(M \cap N) \rightarrow \exists x \in (M \cap N) | f(x) = z$ (Def. de I.D)
 (2) $\rightarrow (\exists x \in M | f(x) = z) \wedge (\exists x \in N | f(x) = z)$ (Def. $\cap$)
 (3) $\rightarrow [z \in f(M)] \wedge [z \in f(N)]$ (Def. de I.D)
 (4) $\rightarrow z \in [f(M) \cap f(N)]$ (Def. $\cap$)
 (5) Por lo tanto, de (1) y (4): $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$ (Def. $\subset$)

ID.4 La diferencia de imágenes de dos subconjuntos del dominio está incluida en la imagen de su diferencia. Esto es:

$$\text{Si } f:A \rightarrow B, M \subset A \text{ y } N \subset A \rightarrow f(M)-f(N) \subseteq f(M-N)$$

Se cumple la igualdad en el caso de que f sea inyectiva.

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sea } z \in [f(M)-f(N)] \rightarrow \exists x \in [f(M)-f(N)] \mid f(x)=z \quad (\text{Def. de I.D})$$

$$(2) \rightarrow (\exists x \in f(M) \mid f(x)=z) \wedge (\nexists x \in f(N) \mid f(x)=z) \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(3) \rightarrow \{z \in f(M)\} \wedge \{z \notin f(N)\} \quad (\text{Def. de I.D})$$

$$(4) \rightarrow z \in [f(M-N)] \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(5) \text{ Por lo tanto, de (1) y (4): } f(M)-f(N) \subset f(M-N) \quad (\text{Def. } \subset)$$

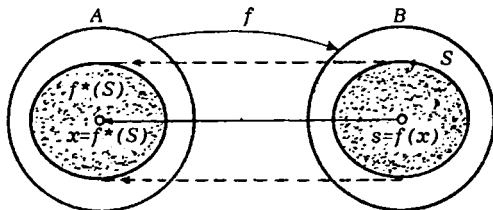
5.15 IMAGEN DIRECTA DE UN CONJUNTO

Definición 5.11 Sea una función $f:A \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Si $S \subset B = \text{Ran}(f)$, se denomina la imagen inversa o preimagen del conjunto S mediante f , al conjunto $f^*(S)$, donde:

$$f^*(S) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in S\}$$

$$\rightarrow x \in f^*(S) \leftrightarrow f(x) \in S$$

Es decir, un elemento del dominio pertenece a la imagen inversa de S si y sólo si su imagen pertenece a S .



EJEMPLO 1. Sean los conjuntos $A=\{0,1,2,3,5,7\}$, $B=\{-1,1,3,4,6\}$, $S=\{-1,3,4,6\}$ y la función: $f=\{(0,1), (1,3), (2,2), (-1,6), (7,5), (3,7)\}$, hallar $f^*(S)$.

Solución. $f^* = \{(1,0), (3,1), (2,2), (6,-1), (5,7), (7,3)\}$

$$S \subset B \rightarrow f^*(S) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in S\} = \{f^*(x) \mid x \in S\}$$

$$\rightarrow f^*(S) = \{f^*(-1), f^*(3), f^*(4), f^*(6)\}$$

En f^* : $f^*(-1)$ no existe, $f^*(3)=1$, $f^*(4)$ no existe, $f^*(6)=-1$

$$\therefore f^*(S) = \{1, -1\}$$

EJEMPLO 2. Dado el conjunto $S = \{-3, 1, 3\}$. Si $f(x) = 2x - 5$, hallar $f^*(S)$.

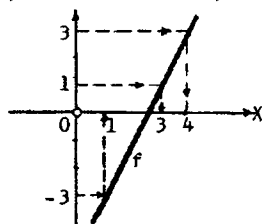
Solución. $f^*(S) = \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) \in S\}$

$$\text{Si } f(x) = -3 \rightarrow 2x - 5 = -3 \rightarrow x = 1$$

$$f(x) = 1 \rightarrow 2x - 5 = 1 \rightarrow x = 3$$

$$f(x) = 3 \rightarrow 2x - 5 = 3 \rightarrow x = 4$$

$$\therefore f^*(S) = \{1, 3, 4\}$$



PROPIEDADES DE LA IMAGEN INVERSA DE UN CONJUNTO

Para la función $f: X \rightarrow Y$ y los conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$ se cumplen las siguientes propiedades:

II.1 Si un subconjunto del dominio es parte de otro, entonces la misma relación vale para sus imágenes inversas. Esto es:

$$\text{Si } A \subset B \rightarrow f^*(A) \subset f^*(B)$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } A \subset B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B) \quad (\text{Def. } \subset)$$

$$(2) \text{ Sea } z \in f^*(A) \rightarrow \exists y \in A \mid f(x) \in A \quad (\text{Def. de I.1})$$

$$(3) \rightarrow \exists y \in B \mid f(x) \in B \quad (\text{Hipótesis: } A \subset B)$$

$$(4) \rightarrow z \in f^*(B) \quad (\text{Def. de I.1})$$

$$(5) \text{ Por lo tanto, de (2) y (4): } f^*(A) \subset f^*(B) \quad (\text{Def. } \subset)$$

II.2 La imagen inversa de la unión es igual a la unión de las imágenes inversas. Es decir:

$$f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } x \in f^*(A \cup B) \leftrightarrow f(x) \in (A \cup B) \quad (\text{Def. de I.1})$$

$$(2) \leftrightarrow (f(x) \in A) \cup (f(x) \in B) \quad (\text{Def. } \cup)$$

$$(3) \leftrightarrow x \in f^*(A) \vee x \in f^*(B) \quad (\text{Def. de I.1})$$

$$(4) \leftrightarrow x \in [f^*(A) \cup f^*(B)] \quad (\text{Def. } \cup)$$

$$(5) \text{ Por lo tanto, de (1) y (4): } f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$$

II.3 La imagen inversa de la intersección es igual a la intersección de las imágenes inversas. Es decir:

$$f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$$

La demostración queda como ejercicio.

II.4 La imagen inversa del complemento de un conjunto del rango es igual al complemento de su imagen. Es decir:

$$f^*(A') = [f^*(A)]'$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Si } x \in f^*(A') \leftrightarrow f(x) \in A' \quad (\text{Def. de I.I})$$

$$(2) \leftrightarrow f(x) \notin A \leftrightarrow \neg[f(x) \in A] \quad (\text{Def. Comp. y Neg.})$$

$$(3) \leftrightarrow \neg[x \in f^*(A)] \leftrightarrow x \notin f^*(A) \quad (\text{Def. I.I y Neg.})$$

$$(4) \leftrightarrow x \in [f^*(A)]' \quad (\text{Def. Comp.})$$

$$(5) \text{ Por lo tanto, de (1) y (4): } f^*(A') = [f^*(A)]'$$

II.5 La imagen inversa de la diferencia es igual a la diferencia de las imágenes inversas. Es decir: $f^*(A-B) = f^*(A) - f^*(B)$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sea } x \in [f^*(A-B)] \rightarrow f(x) \in (A-B) \quad (\text{Def. de I.I})$$

$$(2) \rightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(3) \rightarrow x \in f^*(A) \wedge x \notin f^*(B) \quad (\text{Def. de I.I})$$

$$(4) \rightarrow x \in [f^*(A) - f^*(B)] \quad (\text{Def. Dif.})$$

$$(5) \text{ Luego, de (1) y (4): } f^*(A-B) = f^*(A) - f^*(B)$$

EJEMPLO 1. Dado el conjunto $M = \langle -3, 2 \rangle$ y la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = |x-1| + 1$, hallar $f(M)$ y construir su gráfica.

Solución. Eliminemos las barras de valor absoluto en $x=1 \in M$ y volvamos a definir f de modo tal que su dominio cubra al conjunto $M = \langle -3, 2 \rangle = \langle -3, 1 \rangle \cup [1, 2]$; esto es: Si $x < 1 \rightarrow f(x) = -(x-1) + 1 = 2 - x \rightarrow f_1(x) = 2 - x, x \in \langle -3, 1 \rangle$
 $x \geq 1 \rightarrow f(x) = (x-1) + 1 = x \rightarrow f_2(x) = x, x \in [1, 2]$

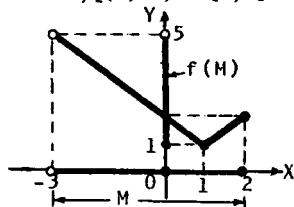
Luego, $\forall x \in M_1 = \langle -3, 1 \rangle: -3 < x < 1 \leftrightarrow -1 < -x < 3$

$$\leftrightarrow 1 < 2 - x < 5 \leftrightarrow 1 < f_1(x) < 5$$

$$\forall x \in M_2 = [1, 2]: 1 \leq x \leq 2 \leftrightarrow 1 \leq f_2(x) \leq 2$$

Entonces: $f(M) = \{f(x) = f_1(x) \cup f_2(x) | x \in (M_1 \cup M_2)\}$

$$\therefore f(M) = \langle 1, 5 \rangle \cup [1, 2] = [1, 5]$$



EJEMPLO 2. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(x) = x^2 - 2x + 2$. Determinar la imagen inversa del subconjunto del rango $\langle 2, 5 \rangle$.

Solución. Si $S = \langle 2, 5 \rangle \rightarrow f^*(S) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in \langle 2, 5 \rangle\}$ (Def. de I.I)

$$\rightarrow 2 < f(x) \leq 5 \rightarrow 2 < (x-1)^2 + 1 \leq 5 \rightarrow 1 < |x-1| \leq 4$$

$$\rightarrow (|x-1| > 1) \wedge (|x-1| \leq 4), \text{ de donde: } f^*(\langle 2, 5 \rangle) = [-1, 0] \cup \langle 2, 3 \rangle$$

EJEMPLO 3. Sea $f:A \rightarrow B$ una función definida por $f(x)=x^2+2x$. Si $S \subset B$, definimos $f^*(S)=\{x \in A \mid f(x) \in S\}$. Según esto, si $S=\{y \in \mathbb{R} \mid 3 < y \leq 8\}$, hallar las imágenes inversas de S .

Solución. $x \in f^*(S) \leftrightarrow f(x) \in \{3, 8\}$

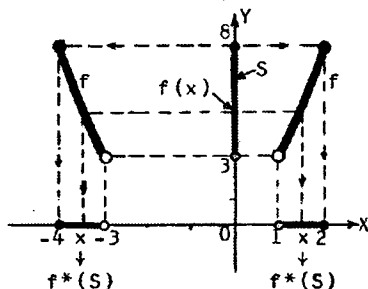
$$\leftrightarrow 3 < x^2+2x \leq 8$$

$$\leftrightarrow (x^2+2x-3 > 0) \wedge (x^2+2x-8 \leq 0)$$

$$\leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0 \wedge (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\leftrightarrow (x < -3 \vee x > 1) \wedge (-4 \leq x \leq 2)$$

$$\therefore f^*(S) = [-4, -3) \cup (1, 2]$$



EJEMPLO 4. Para una función $f:A \rightarrow B$ cualquiera y $S \subset B$, se define:

$f^*(S)=\{x \in A \mid f(x) \in S\}$. Según esto, para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 8-4x, & x \in (-3, 1] \cup (2, +\infty) \\ 2x+22, & x \in (-\infty, -3] \cup (1, 2] \end{cases}; \text{ hallar } f^*(\langle 6, 16 \rangle)$$

Solución. Dado que $S=\langle 6, 16 \rangle$ y $S \subset B$, hallemos el $\text{Ran}(f)=B$.

$$(1) \text{ Sea } f_1(x)=8-4x, x \in (-3, 1] \cup (2, +\infty)$$

$$\text{Si } x \in (-3, 1] \leftrightarrow -3 < x \leq 1 \leftrightarrow -4 \leq -4x < 12 \leftrightarrow 4 \leq 8-4x < 20$$

$$\rightarrow \text{Ran}(f_1) = [4, 20)$$

$$x \in (2, +\infty) \leftrightarrow x > 2 \leftrightarrow -4x < -8 \leftrightarrow 8-4x < 0 \rightarrow \text{Ran}(f_1) = \langle -\infty, 0 \rangle$$

$$\therefore \text{Ran}(f_1) = \langle -\infty, 0 \rangle \cup [4, 20)$$

$$(2) \text{ Sea } f_2(x)=2x+22, x \in (-\infty, -3] \cup (1, 2]$$

$$\text{Si } x \in (-\infty, -3] \leftrightarrow x \leq -3 \leftrightarrow 2x \leq -6 \leftrightarrow 2x+22 \leq 16 \rightarrow \text{Ran}(f_2) = \langle -\infty, 16]$$

$$x \in (1, 2] \leftrightarrow 1 < x \leq 2 \leftrightarrow 24 < 2x+22 \leq 26 \rightarrow \text{Ran}(f_2) = \langle 24, 26]$$

$$\therefore \text{Ran}(f_2) = \langle -\infty, 16] \cup \langle 24, 26]$$

$$(3) \text{ Determinación de } f^*(\langle 6, 16 \rangle) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$$

$$a) \text{ Vemos que: } \langle 6, 16 \rangle \subset [4, 20) \rightarrow f_1^*(\langle 6, 16 \rangle) = \{x \in A \mid f_1(x) \in \langle 6, 16 \rangle\}$$

$$\rightarrow (8-4x) \in \langle 6, 16 \rangle \leftrightarrow 6 < 8-4x \leq 16$$

$$\leftrightarrow -2 < -4x \leq 8 \leftrightarrow -2 \leq x < 1/2$$

$$b) \text{ También: } \langle 6, 16 \rangle \subset \langle -\infty, 16]$$

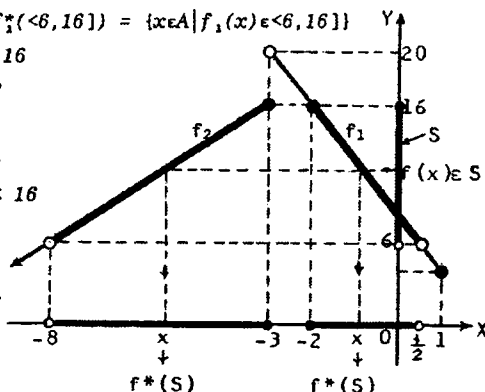
$$\rightarrow f_2^*(\langle 6, 16 \rangle) = \{x \in A \mid f_2(x) \in \langle 6, 16 \rangle\}$$

$$\rightarrow (2x+22) \in \langle 6, 16 \rangle \leftrightarrow 6 < 2x+22 \leq 16$$

$$\leftrightarrow -8 < x \leq -3$$

(4) Luego, de a) y b), se tiene:

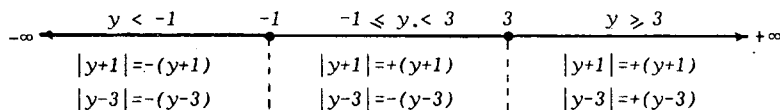
$$f^*(\langle 6, 16 \rangle) = \langle -8, -3] \cup [-2, 1/2)$$



EJEMPLO 5. Sea $f: A \rightarrow B$ una función cualquiera. Si $S \subset B$, definimos:

$f^*(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$. Si $S = \{y \in \mathbb{R} \mid |y+1| + |y-3| \leq 6\}$ y $f(x) = 1/x$, hallar $f^*(S)$.

Solución. Determinemos el conjunto S por el método de los puntos críticos.



Para $y < -1$, en S : $-(y+1) - (y-3) \leq 6 \iff y \geq -2 \rightarrow y \in [-2, -1]$

$-1 \leq y < 3$, en S : $(y+1) - (y-3) \leq 6 \iff 4 \leq 6 \rightarrow y \in [-1, 3]$

$y \geq 3$, en S : $(y+1) + (y-3) \leq 6 \iff y \leq 4 \rightarrow y \in [3, 4]$

$\therefore S = [-2, -1] \cup [-1, 3] \cup [3, 4] = [-2, 4]$

Entonces: $f^*(S) = \{x \in A \mid (1/x) \in [-2, 4]\}$. Si $(\frac{1}{x}) \in [-2, 4] \iff -2 \leq \frac{1}{x} \leq 4$

$$\iff \left(\frac{1}{x} \geq -2\right) \wedge \left(\frac{1}{x} \leq 4\right) \iff \left(\frac{2x+1}{x} \geq 0\right) \wedge \left(\frac{4x-1}{x} \geq 0\right)$$

$$\iff (x \leq -1/2 \vee x > 0) \wedge (x < 0 \vee x \geq 1/4) \iff (x \leq -1/2 \vee x \geq 1/4)$$

$$\therefore f^*(S) = (-\infty, -1/2] \cup [1/4, +\infty)$$

EJERCICIOS: Grupo 40

- Sean los conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{-1, 0, 3, 5, 7\}$, $M = \{-1, 0, 2, 3\}$, $S = \{-1, 0, 3, 7\}$ y la función $f(x) = 2x - 1$. Hallar $f(M)$ y $f^*(S)$.
- Sean $f: A \rightarrow B$ una función y los subconjuntos $M \subset A$ y $N \subset B$. Demostrar las siguientes relaciones:
 - $M \subset f^*[f(M)]$
 - $f[f^*(N)] \subset N$
 - $f^*(B - N) = A - f^*(N)$
 - $f[M \cap f^*(N)] = f(M) \cap N$
- Sea $f: A \rightarrow B$. Demostrar la equivalencia de las siguientes proposiciones, cualesquiera que sean $M \subset A$ y $N \subset B$.
 - $f^*[f(M)] = M$
 - $M \cap N = \emptyset \rightarrow f(M) \cap f(N) = \emptyset$
 - $N \subset M \rightarrow f(M - N) = f(M) - f(N)$
- Sea $A = \mathbb{R} - \{2\}$ y la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
 - Determinar $f^*(4/3)$
 - Si $M = [-1, 2/5]$, hallar $f(M)$
 - Es verdad que $f(x) < 1, \forall x \in A$. Justificar.

5. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$.
- Considerar $M = [-5, 8]$ y representar gráficamente $\{x, f(x) \mid x \in M\}$, indicando explícitamente el conjunto $f(M)$.
 - Resolver $0 < 3x^2 - 12x - 4 < 92$ y expresar analíticamente y gráficamente la vinculación del conjunto solución con el gráfico de f .
 - Demostrar que f es inyectiva en $[-4, 1]$.
6. Dado el conjunto A , se define una función $f: P(A) \rightarrow [0, +\infty)$, que cumple la siguiente propiedad: $\forall X, Y \in P(A): X \cap Y = \emptyset \rightarrow f(X \cup Y) = f(X) + f(Y)$
Demostrar que: a) $f(\emptyset) = 0$
b) $\forall M, N \in P(A)$ tales que $M \subset N$, se cumple $f(M) \leq f(N)$
c) $\forall M, N \in P(A)$ se cumple: $f(M \cup N) = f(M) + f(N) - f(M \cap N)$
7. En los ejercicios siguientes se dan una función $f: A \rightarrow B$, un conjunto $S \subset B$. Si se define: $f^*(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$; hallar $f^*(S)$.
- $f(x) = 2x - 1$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{y-3} < -1\}$
 - $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid (|y-1| + |y-2|)(|1-y| - |2-y|) \geq y^2 - 6\}$
 - $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{|y-1|-2}{y+3} \leq 0\}$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{y}{y-1} < 2\}$
 - $f(x) = 1/x$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{y-3}{y-2} > 0\}$
8. Dada una función $f: A \rightarrow B$ y $S \subset B$, definimos $f^*(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$. Entonces para la función definida por $f(x) = \frac{9x^2-2}{3x-1} - (3x+4)$, hallar $f^*(\langle -\infty, 0 \rangle)$.
9. Sea $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{5y-1}{2y-1} < 0\}$. Si $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $x \neq -3$ es una función, hallar: $f^*(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in S\}$.
10. Dada una función $f: A \rightarrow B$, y $M \subset B$, $N \subset B$, demostrar que:
 $f^*(M \cap N) = f^*(M) \cap f^*(N)$
11. Dada la función: $f(x) = \frac{1}{9}(4 - 60x - 18x^2)$
- Esbozar su gráfico
 - Determinar $f^*([4, +\infty))$
 - Graficar $g(x) = |f(x)|$
 - Determinar $g^*([4, +\infty))$
12. Para una función $f: A \rightarrow B$ cualquiera y $S \subset B$, se define $f^*(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}$
Según esto, para $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x \in \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle \\ 3x+5, & x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$, hallar $f^*(\langle -\infty, -4 \rangle)$



CAPITULO

6

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

6.1 LA FUNCION EXPONENCIAL

Antes de dar la definición para una función exponencial, comencemos construyendo las gráficas de las ecuaciones:

$$y = 2^x \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

formando una tabla de valores para cada ecuación, esto es:

$$y = 2^x$$

→

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

→

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Llevando cada par ordenado (x,y) sobre un plano coordenado obtenemos:

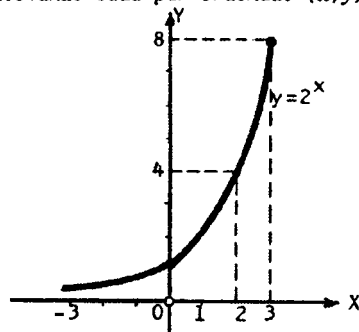


Figura 6.1

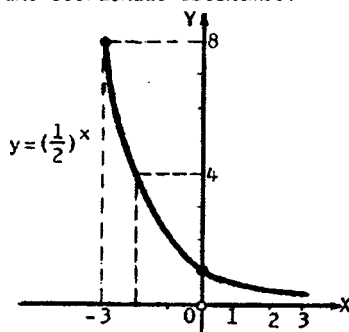


Figura 6.2

Se observa claramente en ambas gráficas que para cada número real x existe uno, y sólo uno, número real " y " tal que:

$$y = 2^x \quad \text{o} \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Vemos entonces que la ecuación $y=2^x$ define una función univalente $f=\{(x,y)|y=2^x\}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Esta función se llama **función exponencial de base 2**. De manera semejante podemos afirmar que toda ecuación de la forma $y=b^x$, en donde $b > 0$, define una función exponencial sobre $\mathbb{R}$.

Si $b > 1$, la gráfica de cualquier función de la forma $\{(x,y)|y=b^x\}$ se parece mucho a la gráfica de $y=2^x$. Si estudiamos esta gráfica (Fig. 6.1) vemos que es posible convenir en aceptar las siguientes propiedades para cada una de tales funciones.

- (1) El rango o imagen de la función exponencial es el conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$). Es decir, que para cada $x \in \mathbb{R}$, $y=b^x > 0$.
(La gráfica está dispuesta encima del eje X)
- (2) Si $x=0 \rightarrow b^x=1$; $x > 0 \rightarrow b^x > 1$; $x < 0 \rightarrow 0 < b^x < 1$
- (3) A medida que x crece, crece también $y=b^x$. (f es estrictamente creciente)
Es decir, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R} | x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Si $0 < b < 1$, la gráfica de la función de la forma $\{(x,y)|y=b^x\}$ tendrá una apariencia distinta. Sin embargo, cada una de esas funciones tendrá la forma general de la gráfica de $y=(\frac{1}{2})^x$. (Fig. 6.2).

Las siguientes propiedades son válidas para las funciones de este tipo.

- (1) El rango o imagen de la función es $\mathbb{R}^+$, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}$, $b^x > 0$.
- (2) Si $x=0 \rightarrow b^x=1$; $x > 0 \rightarrow 0 < b^x < 1$; $x < 0 \rightarrow b^x > 1$
- (3) A medida que x crece, decrece $y=b^x$. (f es estrictamente decreciente)
Es decir, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R} | x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Esta propiedad se expresa brevemente con la notación:

$$\text{Si } 0 < b < 1, \text{ entonces: } \begin{cases} b^x \rightarrow 0 & \text{cuando } x \rightarrow +\infty \\ b^x \rightarrow \infty & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

De este breve análisis, la siguiente definición para la función exponencial

Definición 6.1 Sea b cualquier número real positivo distinto de 1.

Entonces una función f , denotada por $\exp_b$, se llama

función exponencial de base b si, y sólo si: $f=\{(x,y)|f(x)=b^x, x \in \mathbb{R}\}$

o bien: $\exp_b = \{(x,y)|\exp_b(x)=b^x, x \in \mathbb{R}\}$

El siguiente teorema resume todo lo dicho y lo aceptamos sin demostración:

TEOREMA 6.1 Si $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$, entonces la función exponencial:

$$f: R \rightarrow R^+ = \{(x, y) \mid f(x) = b^x\}$$

a) Es biyectiva si $b > 0$ y $b \neq 1$, esto es, si:

$$i) x_1, x_2 \in f \text{ y } b^{x_1} = b^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$ii) \text{Ran}(f) = R^+$$

b) Es estrictamente creciente si $b > 1$. Es decir, si:

$$x_1, x_2 \in f \text{ y } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

c) Es estrictamente decreciente si $0 < b < 1$. Es decir, si:

$$x_1, x_2 \in f \text{ y } x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

EJEMPLO 1. La gráfica de cierta función exponencial contiene al punto $P(3/2, 27)$. Cuál es la base y la regla de correspondencia de la función?

Solución. Sea la función exponencial: $f(x) = b^x$

$$\text{Si } P(3/2, 27) \in f \rightarrow 27 = b^{3/2} \rightarrow (3^3)^{2/3} = b \leftrightarrow b = 9$$

$$\therefore f = \{(x, y) \mid y = 9^x\}$$

EJEMPLO 2. Dada la función $f(x) = 1 + \exp_3|x-2|$, construir su gráfica y hallar su dominio y rango. Es inyectiva?

Solución. Si $f(x) = 1 + \exp_3|x-2| \rightarrow y - 1 = 3^{|x-2|}$

$$x - 2 \geq 0 \rightarrow |x - 2| = +(x - 2) \rightarrow y - 1 = 3^{x-2}$$

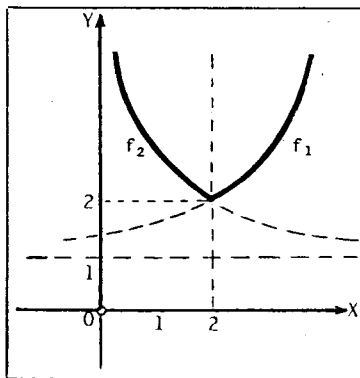
$$x - 2 < 0 \rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \rightarrow y - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 3^{x-2}, & \text{si } x \geq 2 \\ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

En $f_1(x) = 1 + 3^{x-2}$, la base es $b = 3$, $b > 1$, entonces su gráfica es similar al de la figura 6.1, es creciente $\forall x \geq 2$.

En $f_2(x) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$, la base es $b = 1/3$, esto es, $0 < b < 1$, luego su gráfica es similar al de la figura 6.2, es decreciente $\forall x < 2$.

Por lo tanto: $\text{Dom}(f) = R$ y $\text{Ran}(f) = [2, +\infty)$. Geométricamente vemos que f no es inyectiva, dado que una recta horizontal corta al curva en dos puntos.



6.2 LOGARITMOS

Si b es un número positivo diferente de 1 y si N es cualquier número positivo dado, entonces existe un número real único L , tal que:

$$N = b^L$$

Se dice que el número L es el **logaritmo** de N de **base** b y se escribe:

$$L = \log_b N$$

Esta definición se puede enunciar de una forma más concisa como sigue:

Definición 6.2 Si N y b son números positivos y si $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b N = L \leftrightarrow N = b^L$$

Según esta definición, vemos que el concepto de un exponente y el de un logaritmo son simplemente dos formas diferentes de ver exactamente la misma cosa. Las dos ecuaciones $N = b^L$ y $\log_b N = L$ son equivalentes por lo que podemos usar indistintamente las dos formas.

Ejemplos: a) $\log_2 8 = 3 \leftrightarrow 2^3 = 8$

$$c) b^1 = b \rightarrow \log_b(b) = 1$$

$$b) \log_8(1/4) = -2/3 \leftrightarrow 8^{-2/3} = \frac{1}{4}$$

$$d) b^0 = 1 \rightarrow \log_b(1) = 0$$

Ahora veamos algunos ejemplos de aplicación de la equivalencia de la definición 6.2 para calcular el logaritmo L , el número N y la base b .

EJEMPLO 1. Hallar el logaritmo de 16 en base $\sqrt{2}$.

Solución. Si $\log_{\sqrt{2}} 16 = x \leftrightarrow 16 = (\sqrt{2})^x \leftrightarrow 2^4 = (2)^{x/2}$

$$\leftrightarrow 4 = \frac{x}{2} \rightarrow x = 8$$

Luego: $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$

EJEMPLO 2. Hallar el número cuyo logaritmo en base $1/16$ es -0.75 .

Solución. Sea x el número buscado, y $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$$\rightarrow \log_{1/16}(x) = -\frac{3}{4} \leftrightarrow x = \left(\frac{1}{16}\right)^{-3/4} = (16)^{3/4} = (2^4)^{3/4}$$

$$\leftrightarrow x = 2^3 = 8$$

EJEMPLO 3. Si $\log_x(9/4) = -2/3$, hallar x .

Solución. $\log_x(9/4) = -\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{9}{4} = x^{-2/3} \leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{-3/2} = x \leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{3/2} = x$

$$\leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 = x \rightarrow x = 8/27$$

EJEMPLO 4. Hallar el valor de $E = (\log_7 \sqrt[3]{7}) (\log_4 0.25)$

Solución. Sea $\log_7 \sqrt[3]{7} = x \leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{7}}{7^x} = 7^x \leftrightarrow \frac{1}{3} - 2 = x \rightarrow x = -5/3$

$$\text{Si } \log_4 0.25 = y \leftrightarrow 0.25 = 4^y \leftrightarrow \frac{1}{4} = 4^y \rightarrow y = -1$$

$$\text{Luego: } E = (-5/3)(-1) = 5/3$$

EJEMPLO 5. Si $\log_x(1/81) = \log_8(1/16)$, hallar x .

Solución. Sea $\log_8(1/16) = y \leftrightarrow \frac{1}{16} = 8^y \leftrightarrow 2^{-4} = 2^{3y} \rightarrow y = -4/3$

$$\text{Luego: } \log_x(1/81) = -4/3 \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^4 = x^{-4/3} \leftrightarrow (3^{-4})^{-3/4} = x$$

$$\leftrightarrow 3^3 = x \rightarrow x = 27$$

EJEMPLO 6. Hallar el valor de:

$$E = 2\log_{1/4}(32) - 3\log_{1/8}(\sqrt[3]{16}) + \frac{5}{2}\log_{343}(49) - \frac{2}{3}\log_4(8^{-3/2})$$

Solución. Sean: $\log_{1/4}(32) = x_1 \leftrightarrow 32 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x_1} \leftrightarrow 2^5 = 2^{-2x_1} \rightarrow x_1 = -5/2$

$$\log_{1/8}(\sqrt[3]{16}) = x_2 \leftrightarrow \sqrt[3]{16} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x_2} \leftrightarrow 2^{4/3} = 2^{-3x_2} \rightarrow x_2 = -\frac{4}{9}$$

$$\log_{343}(49) = x_3 \leftrightarrow 49 = (343)^{x_3} \leftrightarrow 7^2 = 7^{3x_3} \rightarrow x_3 = \frac{2}{3}$$

$$\log_4(8^{-3/2}) = x_4 \leftrightarrow 8^{-3/2} = 4^{x_4} \leftrightarrow 2^{-9/2} = 2^{2x_4} \rightarrow x_4 = -\frac{9}{4}$$

$$\text{Luego: } E = 2\left(-\frac{5}{2}\right) - 3\left(-\frac{4}{9}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS: Grupo 41

- Una función f cuyo dominio es el conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ está definida por $f(x) = 4^{-x}$
 - Escribir f como un conjunto de pares ordenados.
 - Escribir los elementos que pertenecen al rango de f .
- Si g es una función cuyo dominio es $D = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

y $g(x)=64^x$, expresar g como un conjunto de pares ordenados.

3. En los ejercicios siguientes, hallar la base de una función exponencial cuya gráfica incluye a los puntos dados.

a) $(3,27)$ b) $(-2,1/100)$ c) $(2,1/4)$ d) $(-2/3,1/4)$

4. En los ejercicios siguientes, trazar la gráfica para cada una de las funciones dadas. Indicar el dominio y el rango.

a) $\{(x,y)|y=2^{x/2}\}$

f) $f(x) = 2 + \exp_{4/3}(|x-2|)$

b) $\{(x,y)|y = \frac{1}{3}(3^x)\}$

g) $f(x) = 5 + \exp_{2/3}|2x+7|$

c) $\{(x,y)|y = 2^{x+3}\}$

h) $f(x) = \exp_{1/2} \llbracket x \rrbracket$

d) $f(x) = 1 - \exp_2(x+1)$

i) $f(x) = \exp_2 \llbracket x \rrbracket$

e) $f(x) = -1 + \exp_{2/3}(|x+1|)$

j) $f(x) = 1 - \exp_2 \llbracket x+1 \rrbracket$

5. Determinar el valor de x , si:

a) $\log_x(\sqrt[3]{25}) = 1/3$

b) $\log_{8/27}(x) = \log_4 \sqrt[3]{16}$

c) $\log_x 125 = \log_2 \sqrt{8}$

6. Hallar el valor de:

$$E = \frac{1}{2} \log_3(81) + 3 \log_{10}(0.001) + 2 \log_5(125) - \frac{1}{2} \log_8(2) + 5 \log_8(4 \sqrt[3]{16})$$

7. Hallar el valor de: $E = \frac{\log_{216}(6^*) \times \log_{27}(9^{3/4})}{\log_{\sqrt{3}}(3^*) + \log_4(8^{-3/2})}$

8. Hallar el valor de: $E = \frac{\log_{728}(81) + \log_8(4)}{\log_{1/8} 27 - \log_{2/5}(25/4)}$

6.2.1 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

PROPIEDAD L.1: Para todo número real positivo x, y, b , en donde $b \neq 1$, se verifica:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

"El logaritmo de un producto de dos números reales positivos es la suma de los logaritmos de ambos números"

Demostración. En efecto, si hacemos: $\text{Log}_b(x)=A$ y $\text{Log}_b(y)=B$
por la definición 6.2, se tiene:

$$\text{Log}_b(x) = A \leftrightarrow x=b^A \quad ; \quad \text{Log}_b(y) = B \leftrightarrow y=b^B$$

Efectuando el producto: $xy = (b^A)(b^B) = b^{A+B}$

De modo que usando nuevamente la definición 6.2: $\text{Log}_b(xy) = A+B$

y por sustitución:

$$\text{Log}_b(xy) = \text{Log}_b(x) + \text{Log}_b(y)$$

PROPIEDAD L.2: Para todo número real positivo x, b , tales que $b \neq 1$
y para cada número real n :

$$\text{Log}_b(x^n) = n\text{Log}_b(x)$$

"El logaritmo de la n -ésima potencia de un número positivo es n veces el logaritmo del mismo".

Demostración. En efecto, si hacemos: $\text{Log}_b(x) = A \leftrightarrow x = b^A$ (Def. 6.2)

$$\text{Pero: } x^n = (b^A)^n = b^{nA} \quad (\text{Ley de Exp.})$$

De donde se tiene: $\text{Log}_b(x^n) = nA$ (Def. 6.2)

y por sustitución: $\text{Log}_b(x^n) = n\text{Log}_b(x)$

PROPIEDAD L.3: Para todo número real positivo x, y, b , tal que $b \neq 1$,

$$\text{Log}_b\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_b(x) - \text{Log}_b(y)$$

"El logaritmo de un cociente de dos números reales positivos es la diferencia de los logaritmos del dividendo y divisor".

Demostración. En efecto, si hacemos: $\text{Log}_b(x)=A \leftrightarrow x=b^A$ (Def. 6.2)

$$\text{Log}_b(y)=B \leftrightarrow y=b^B \quad (\text{Def. 6.2})$$

Entonces, dividiendo: $\frac{x}{y} = b^{A-B} \rightarrow \text{Log}_b\left(\frac{x}{y}\right) = A-B$ (Def. 6.2)

y por sustitución: $\text{Log}_b\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_b(x) - \text{Log}_b(y)$

PROPIEDAD L.4: Para todo número real positivo x, b , tales que $b \neq 1$ y para todo número real n :

$$\text{Log}_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\text{Log}_b(x)$$

"El logaritmo de la raíz n -ésima de un número real positivo es igual al logaritmo del número dividido entre el índice de la raíz".

Demostración. En efecto, sea: $\text{Log}_b(x) = A \leftrightarrow x = b^A$ (Def. 6.2)

$$\text{Pero: } x^{1/n} = (b^A)^{1/n} = b^{A/n} \rightarrow \text{Log}_b(x^{1/n}) = \frac{A}{n} \quad (\text{Def. 6.2})$$

y por sustitución: $\text{Log}_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\text{Log}_b(x)$

Nota. Las propiedades obtenidas se llaman fundamentales o generales, puesto que ellas no dependen de la base b (siempre que $b > 0$).

Las propiedades, entre otras, que se dan a continuación son las llamadas, propiedades particulares, cuyas demostraciones se dejan como ejercicio para el lector.

PROPIEDAD L.5: $\text{Log}_b(x) = \text{Log}_b(x^n) = \text{Log}_{\sqrt[n]{b}}(\sqrt[n]{x})$

PROPIEDAD L.6: $\text{Log}_b(x) = \frac{1}{n}\text{Log}_b(x^n)$

PROPIEDAD L.7: $\text{Log}_b(x^m) = \frac{m}{n}\text{Log}_b(x)$

PROPIEDAD L.8: $\text{Log}_b(x) \cdot \text{Log}_x(b) = 1$

PROPIEDAD L.9: $\text{Log}_{a/b}(x) = \frac{\text{Log}_a(x)}{1 - \text{Log}_a(b)} = \frac{\text{Log}x}{\text{Log}a - \text{Log}b}$

PROPIEDAD L.10: $\text{Log}_{ab}(x) = \frac{\text{Log}_a(x)}{1 + \text{Log}_a(b)} = \frac{\text{Log}x}{\text{Log}a + \text{Log}b}$

PROPIEDAD L.11: Cambio de base de un sistema de logaritmos a otro.

$$\text{Log}_a(x) = \frac{\text{Log}_b(x)}{\text{Log}_b(a)}$$

Por ejemplo, hallar por dos métodos diferentes: $\text{Log}_2(8)$

Primer Método: Por la definición 6.2: $\text{Log}_2(8) = x \leftrightarrow 8 = 2^x$
 $\leftrightarrow 2^3 = 2^x \rightarrow x = 3$

Segundo Método: Por la propiedad L.11: $\text{Log}_2 8 = \frac{\text{Log} 8}{\text{Log} 2} = \frac{\text{Log} 2^3}{\text{Log} 2} = \frac{3\text{Log} 2}{\text{Log} 2} = 3$

DEFINICION 6.3 Se denomina **cologaritmo** de un número N al logaritmo de su inversa, esto es:

$$\text{Colog}_b(N) = \text{Log}_b\left(\frac{1}{N}\right) = \text{Log}_b(1) - \text{Log}_b(N) = -\text{Log}_b(N)$$

De modo que el cologaritmo del número N es el logaritmo del mismo número tomado con signo contrario. Esta definición permite escribir la propiedad L.3 como sigue:

$$\text{Log}_b\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_b(x) - \text{Log}_b(y) = \text{Log}_b(x) + \text{Colog}_b(y)$$

DEFINICIÓN 6.4 Se denomina **antilogaritmo** al número correspondiente al logaritmo dado, esto es, si L es el logaritmo de N en base b , entonces:

$$\text{antilog}_b(L) = N \quad \text{antilog}_b(L) = b^L$$

De esta definición se deduce que:

$$\text{antilog}_b(\log_b N) = N$$

$$\log_b(\text{antilog}_b N) = N$$

Los ejemplos que siguen ilustran las aplicaciones de las propiedades y definiciones establecidas en esta sección.

EJEMPLO 1. Representar cada una de las expresiones dadas como un solo logaritmo con coeficiente uno.

$$a) A = 2\text{Log}_a(y) + \frac{1}{2}\text{Log}_a(x) - 3\text{Log}_a(z)$$

$$b) B = \text{Log}_b(x) + 3\text{Log}_b(y) - 2\text{Log}_b(9) - 5$$

$$\text{Solución. } a) A = \text{Log}_a(y)^2 + \text{Log}_a(\sqrt{x}) - \text{Log}_a(z)^3 \quad (\text{L.2 y L.4})$$

$$\rightarrow A = \text{Log}_a\left(\frac{y^2 \cdot \sqrt{x}}{z^3}\right) \quad (\text{L.1 y L.3})$$

b) Dado que $\text{Log}_b(b)=1$ podemos escribir:

$$B = \text{Log}_b(x) + \text{Log}_b(y)^3 - \text{Log}_b(9)^2 - \text{Log}_b(b)^5 \quad (\text{L.2})$$

$$\rightarrow B = \text{Log}_b\left(\frac{x \cdot y^3}{81b}\right) \quad (\text{L.1 y L.3})$$

$$\text{EJEMPLO 2. Hallar el valor de } E = \text{Log}_2\left(\frac{\sqrt{512} (1/4)^3}{64(1/8)^2}\right)$$

$$\text{Solución. } E = \text{Log}_2(\sqrt{512}) - \text{Log}_2(64) - \text{Log}_2(1/8)^2 + \text{Log}_2(1/4)^3 \quad (\text{L.1 y L.3})$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}_2(512) + 5\text{Log}_2(1/4) - \text{Log}_2(64) - 2\text{Log}_2(1/8) \quad (\text{L.4 y L.2})$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}_2(2)^9 + 5\text{Log}_2(2^{-2}) - \text{Log}_2(2^6) - 2\text{Log}_2(2^{-3})$$

y por L.2: $E = \frac{9}{2}\text{Log}_2(2) - 10\text{Log}_2(2) - 6\text{Log}_2(2) + 6\text{Log}_2(2) = -11/2$

EJEMPLO 3. Simplificar: $E = \text{Log}(\frac{75}{16}) - 2\text{Log}(\frac{5}{9}) + \text{Log}(\frac{32}{243})$

Solución. $E = \text{Log}(\frac{75}{16}) + \text{Log}(\frac{5}{9})^{-2} + \text{Log}(\frac{32}{243})$ (L.2)

$$E = \text{Log}(\frac{3 \times 25}{16}) + \text{Log}(\frac{9}{5})^2 + \text{Log}(\frac{2 \times 16}{3 \times 81}) = \text{Log}(\frac{3 \times 25 \times 81 \times 2 \times 16}{16 \times 25 \times 3 \times 81}) = \text{Log}2$$

EJEMPLO 4. Dado $\text{Log}_a(^3\sqrt{[a(\sqrt{2}-1)]^5}) = \frac{1}{3}$, hallar el valor de:

$$E = \text{Log}_a(^3\sqrt{[a(\sqrt{2}+1)]^3}).$$

Solución. $E = \frac{3}{5}\text{Log}_a[a(\sqrt{2}+1)] = \frac{3}{5}[\text{Log}_a(a) + \text{Log}_a(\sqrt{2}+1)]$ (L.4 y L.1)

$$= \frac{3}{5}[1 + \text{Log}_a\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}] = \frac{3}{5}[1 + \text{Log}_a(\frac{1}{\sqrt{2}-1})]$$

$$\rightarrow E = \frac{3}{5}[1 - \text{Log}_a(\sqrt{2}-1)] \quad (1)$$

Si $\text{Log}_a(^3\sqrt{[a(\sqrt{2}-1)]^5}) = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{3}\text{Log}_a[a(\sqrt{2}-1)] = \frac{1}{3}$

$$\rightarrow \text{Log}_a(a) + \text{Log}_a(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{5} \rightarrow \text{Log}_a(\sqrt{2}-1) = -\frac{4}{5}$$

Luego, en (1), se tiene: $E = \frac{3}{5}(1 + \frac{4}{5}) = \frac{27}{25}$

EJEMPLO 5. Si $\text{Log}_{12}(3)=b$, hallar $\text{Log}_{12}(8)$.

Solución. $\text{Log}_{12}(8) = \text{Log}_{12}(2)^3 = 3\text{Log}_{12}(2) = 3\text{Log}_{12}(\frac{12}{6})$

$$= 3[\text{Log}_{12}(12) - \text{Log}_{12}(3 \times 2)] = 3[1 - \text{Log}_{12}(3) - \text{Log}_{12}(2)]$$

$$= 3 - 3b - 3\text{Log}_{12}(2) = 3 - 3b - \text{Log}_{12}(8)$$

Entonces: $2\text{Log}_{12}(8) = 3(1-b) \leftrightarrow \text{Log}_{12}(8) = \frac{3}{2}(1-b)$

EJEMPLO 6. Hallar el valor de: $E = \text{Log}_{b^2}(\text{antilog}_{b^2}8) - \text{antilog}_{a^2}(\text{Log}_a 16)$

Solución. $E = \text{Log}_{b^2}[(b^2)^4] - \text{antilog}_{a^2}[2\text{Log}_a 2]$ (Def. 6.4 y L.6)

$$= \text{Log}_{b^2}[(b^2)^{16}] - \text{antilog}_{a^2}[\text{Log}_a 2^2]$$

$$= 16\text{Log}_{b^2}(b^2) - \text{antilog}_{a^2}[2\text{Log}_{a^2}(4)] \quad (L.6)$$

$$\rightarrow E = 16(1) - \text{antilog}_{a^2}(\text{Log}_{a^2}16) = 16 - 16 = 0$$

EJEMPLO 7. Si $\text{Log}2=k$, hallar el valor de: $E = \text{Log}5 + \text{Log}(\frac{25}{4}) - \text{Log}(\frac{1}{8})$

Solución. $E = \text{Log}5 + \text{Log}(\frac{5}{2})^2 - \text{Log}(2)^{-3} = \text{Log}5 + 2(\text{Log}5 - \text{Log}2) + 3\text{Log}2$
 $= 3\text{Log}5 + \text{Log}2 = 3\text{Log}(\frac{10}{2}) + \text{Log}2 = 3(\text{Log}10 - \text{Log}2) + \text{Log}2$
 $= 3(1 - \text{Log}2) + \text{Log}2 = 3 - 2\text{Log}2 \quad \rightarrow \quad E = 3 - 2k$

EJEMPLO 8. Demostrar que: $\frac{7}{16}\text{Log}(3+2\sqrt{2}) - 4\text{Log}(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\text{Log}(\sqrt{2}-1)$

Solución. En efecto, sea: $E = \frac{7}{16}\text{Log}(3+2\sqrt{2}) - 4\text{Log}(\sqrt{2}+1)$

Dado que: $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{7}{16}\text{Log}(\sqrt{2}+1)^2 - 4\text{Log}(\sqrt{2}+1)$

Luego: $E = -\frac{25}{8}\text{Log}(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}+1}) = \frac{25}{8}\text{Log}(\sqrt{2}-1)$

EJEMPLO 9. Calcular: $E = 81^{1-\text{Log}_3 2} + 7^{-\text{Log}_7 4}$

Solución. $E = 3^{4(\text{Log}_3 9 - \text{Log}_3 2)} + 7^{\text{Log}_7 4^{-1}} = 3^{4\text{Log}_3 (9/2)} + 7^{\text{Log}_7 4^{-1}}$
 $= 3^{2\text{Log}_3 (9/2)^2} + 7^{\text{Log}_7 4^{-1}} = 3^{\text{Log}_3 (9/2)^2} + 7^{\text{Log}_7 4^{-1}}$

De la definición 6.2 se deduce fácilmente que: $N = b^{\text{Log}_b N}$

Entonces, según esta propiedad: $E = (\frac{9}{2})^2 + 4^{-1} = \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = 20.5$

EJEMPLO 10. Hallar el valor de x en:

$$[_{7^{\text{Log}_3 \text{Log}_2 \text{Log}_3 (x+1)}} \text{Log}_7 5]_{[_{11^{\text{Log}_1 \text{Log}_2 \text{Log}_3 3} \text{Log}_1 13}]} = 2$$

Solución. Ordenando los exponentes de cada factor, se tiene:

$$[_{7^{(\text{Log}_7 5)(\text{Log}_3 \text{Log}_2 \text{Log}_3 (x+1))}}]_{[_{11^{(\text{Log}_1 13)(\text{Log}_1 \text{Log}_2 \text{Log}_3 3)}}]} = 2$$

Aplicando sucesivamente la propiedad: $N = b^{\text{Log}_b N}$, obtenemos:

$$[_{5^{\text{Log}_3 \text{Log}_2 \text{Log}_3 (x+1)}}]_{[_{13^{\text{Log}_1 \text{Log}_2 \text{Log}_3 3}}]} = 2 \quad \rightarrow \quad [\text{Log}_2 \text{Log}_3 (x+1)][\text{Log}_2 \text{Log}_3 3] = 2$$

$$+ \text{Log}_2 [\text{Log}_3 (x+1) \cdot \text{Log}_3 3] = 2 \quad + \quad \text{Log}_2 [\text{Log}_3 (x+1)] = 2 \quad \quad \quad (L.11)$$

$$+ \text{Log}_3 (x+1) = 2^2 = 4 \quad \leftrightarrow \quad x+1=5^4, \text{ de donde: } x=624$$

EJEMPLO 11. Si x e y son dos números consecutivos y

$$\text{Log}_x 6 + \text{Log}_y 6 = \text{Log}_x 6 \cdot \text{Log}_y 6, \text{ hallar el valor de } x+y.$$

Solución. Sea $y=x+1 \rightarrow \text{Log}_x 6 + \text{Log}_{x+1} 6 = \text{Log}_x 6 \cdot \text{Log}_{x+1} 6$

Según la propiedad L.8, se tiene:

$$\frac{1}{\log_6 x} + \frac{1}{\log_6 (x+1)} = \left(\frac{1}{\log_6 x}\right)\left(\frac{1}{\log_6 (x+1)}\right) \rightarrow \log_6 x + \log_6 (x+1) = 1$$

$$+ \log_6 x(x+1) = \log_6 6 \leftrightarrow x(x+1)=6 \leftrightarrow x^2+x-6=0 \leftrightarrow x=2 \text{ ó } x=-3$$

Dado que $x > 0$, la única solución es $x=2 \rightarrow x+y=5$

EJEMPLO 12. Si $\log_a bc=x$, $\log_b ac=y$, $\log_c ab=z$; calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$$

Solución. Se tiene: $x+1 = \log_a bc + \log_a a = \log_a (abc)$

$$y+1 = \log_b ac + \log_b b = \log_b (abc)$$

$$z+1 = \log_c ab + \log_c c = \log_c (abc)$$

De modo que: $E = \frac{1}{\log_a (abc)} + \frac{1}{\log_b (abc)} + \frac{1}{\log_c (abc)}$

y por L.8: $E = \log_{abc} (a) + \log_{abc} (b) + \log_{abc} (c) = \log_{abc} (abc) = 1$

EJEMPLO 13. Se sabe que: $x_1 = \log_2 x_2$, $x_2 = \log_2 x_3$, $x_3 = \log_2 x_4$, $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 128$, $x_2 + x_3 = 6$. Hallar: x_1, x_2, x_3 y x_4 .

Solución. Si $x_1 = \log_2 x_2 \rightarrow x_2 = 2^{x_1}$; $x_2 = \log_2 x_3 \rightarrow x_3 = 2^{x_2}$;

$$x_3 = \log_2 x_4 \rightarrow x_4 = 2^{x_3} \rightarrow x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2^{x_1+x_2+x_3}$$

$$+ 128 = 2^7 = 2^{x_1+x_2+x_3} \leftrightarrow x_1+x_2+x_3 = 7 \text{ . Pero: } x_2+x_3 = 6$$

Entonces: $x_1+6=7 \leftrightarrow x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=2^2=4$; $x_4=2^4=16$

EJEMPLO 14. Si $\log_6 15=a$ y $\log_{12} 18=b$, calcular en términos de a y b :

$\log_{24} 24$. Mostrar que la expresión obtenida es un número real.

Solución. $\log_{24} 24 = \log_{5 \cdot 2} (2^3 \cdot 3) = \frac{1}{2} \log_5 (2^3 \cdot 3) = \frac{3}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 3$ (1)

$$a = \log_6 15 = \frac{\log_5 15}{\log_5 6} = \frac{1 + \log_5 3}{\log_5 3 + \log_5 2} \rightarrow a \log_5 3 + a \log_5 2 = 1 + \log_5 3$$

$$+ (a-1) \log_5 3 + a \log_5 2 = 1 \quad (2)$$

$$b = \log_{12} 18 = \frac{\log_5 18}{\log_5 12} = \frac{2 \log_5 3 + \log_5 2}{2 \log_5 2 + \log_5 3} \rightarrow 2b \log_5 2 + b \log_5 3 = 2 \log_5 3 + \log_5 2$$

$$+ (b-2) \log_5 3 + (2b-1) \log_5 2 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo (2) y (3) obtenemos:

$$\log_5 2 = \frac{b-2}{a(b-2)+(a-1)(1-2b)} \quad , \quad \log_5 3 = \frac{1-2b}{a(b-2)+(a-1)(1-2b)}$$

y al sustituir estas dos expresiones en (1) se obtiene:

$$\log_{25} 24 = \frac{b-5}{2(2b-a-ab-1)}$$

La expresión obtenida es real $\leftrightarrow 2b-a-ab-1 \neq 0$

$$\text{En efecto, si } a = \log_6 15 \leftrightarrow 6^a = 15 \rightarrow 6^1 < 6^a < 6^2 \rightarrow 1 < a < 2 \quad (4)$$

$$\rightarrow -2 < -a < -1 \quad (5)$$

$$b = \log_{12} 18 \leftrightarrow 12^b = 18 \rightarrow 12^1 < 12^b < 12^{3/2} \rightarrow 1 < b < 3/2 \quad (6)$$

$$\rightarrow 2 < 2b < 3 \quad (7)$$

$$\text{Multiplicando (4) y (6) se tiene: } 1 < ab < 3 \rightarrow -3 < -ab < -1 \quad (8)$$

Sumando (5), (7) y (8) resulta: $-3 < 2b-a-ab < 1$

$$\text{Luego: } -4 < 2b-a-ab-1 < 0 \rightarrow 2b-a-ab-1 \neq 0$$

Por lo tanto, la expresión hallada es un número real.

EJERCICIOS: Grupo 42

En los ejercicios del 1 al 3, usar las propiedades de los logaritmos para representar cada una de las expresiones dadas como un solo logaritmo con coeficiente uno.

$$1. \quad 2\log_a(x-b) - a\log_a(x-c) + \frac{3}{4}\log_a 81 - x$$

$$2. \quad 3\log_2 a + \frac{2}{3}\log_2 125 - \frac{4}{3}\log_2 27 - a$$

$$3. \quad \frac{5}{7}\log_e 128 - 4\log_2(0.2) + \frac{1}{3}\log_e(0.027) - \frac{2}{3}\log_e 216 + 2$$

En los ejercicios del 4 al 8, hallar la representación numérica más simple de x.

$$4. \quad x = 2\log\left(\frac{13}{7}\right) + \log\left(\frac{133}{65}\right) - \log\left(\frac{143}{90}\right) + \log\left(\frac{77}{171}\right)$$

$$5. \quad x = 2\log\left(\frac{5}{3}\right) + \log\left(\frac{363}{64}\right) - 2\log\left(\frac{11}{5}\right) + \log\left(\frac{192}{125}\right)$$

$$6. \quad x = \log\sqrt{84} + \log\sqrt{650} - \frac{1}{2}\log 546$$

$$7. \quad x = \log\left(\sqrt[3]{729} \cdot \sqrt[3]{9^{-1} \cdot 27^{-4/3}}\right)$$

$$8. \quad x = \log_4\left(\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{16} \sqrt[3]{64} \cdot 8^{-3/4}\right)$$

En los ejercicios del 9 al 12, despejar x de las expresiones dadas.

$$9. \quad \log x = \frac{1}{2}\log 16 - \frac{1}{3}\log 8 + 1$$

$$10. \quad \log x = 2 + \frac{1}{2}(\log 18 + \log 8 - 2\log 25)$$

$$11. \quad 3\log x - \log 32 = 2\log(x/2)$$

$$12. \quad 2\log_2(x-2) = \log_2(7a-1) - 2a$$

13. Sabiendo que $\text{Log}_a(\sqrt[3]{a(\sqrt{2}-1)})=0.6$, calcular el valor de:
 $x=\text{Log}_a(\sqrt[3]{a(\sqrt{2}+1)})$.
14. Demostrar que $\forall x>1: \text{Log}_b(x + \sqrt{x^2-1}) = -\text{Log}_b(x - \sqrt{x^2-1})$
15. Si $\text{Log}_2(a^2b^3)=\text{Log}_4(a/b)=k$, hallar, en términos de k , el valor de:
 $\text{Log}_2(ab)$.
16. Si $\text{Log}_{30}3=a$ y $\text{Log}_{30}5=b$, hallar $\text{Log}_{30}8$.
17. Sean a, b, k números mayores que 1, si $(\text{Log}_a k)^4 = 16(\text{Log}_b k)^4$, hallar una relación entre las bases.
18. Si $A=\text{Log}_b[\text{antilog}_b(4)]$ y $B=\text{antilog}_b[\text{Log}_b(4)]$, hallar el valor de AB
19. Hallar el ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$, tal que:
 $\text{Log}_n \text{Sen} 2\alpha = \text{Log}_n \text{Log}_{0.5} \text{Log}_b \text{antilog}_b(0.5)$, siendo $n>0$ y $n \neq 1$.
20. Si $\text{Log}_2(3)=p$, hallar $\text{Log}_{36}243$ en términos de p .
21. Si $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ y $\text{Log}_{ab}(a)=5$, hallar: $\text{Log}_{ab}(\sqrt[3]{a}/\sqrt{b})$.
22. Si $x=[\text{Log}_a(\text{antilog}_a(2))][\text{antilog}_a(\text{Log}_a(8))]$, hallar x .
23. Si $\text{Log}_3a=1/2$ y $\text{Log}_3(\sqrt{ab}/9)=-3/2$, hallar el valor de b .
24. Despejar x de: $\text{Log}_2x + \text{Log}_4x + \text{Log}_8x = 11/2$
25. Si $p, q \in (0, +\infty)$ y $\text{Log}_{pq}(q)=6$, hallar el valor de $E=\text{Log}_{pq}(\sqrt[3]{p}/q^8)$
26. Calcular: $\text{antilog}_4x = \text{antilog}_2 \text{Colog}_{\sqrt{6}}(3\text{Log}_{\sqrt{3}}3)$
27. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, si $a^2+b^2=10ab$, demostrar que $\frac{1}{2}\text{Log}a - \text{Log}(a+b) = \frac{1}{2}\text{Log}3 - \text{Log}6$
28. Si $x=\text{Log}_b \text{antilog}_b \text{Colog}_b \text{antilog}_b(-1/b)$, hallar el valor de:
 $E = (\text{Log}_b x^b - \text{Colog}_x b^x)^2 + \text{Colog}_{1/x}(b^{x^2+b^2})$
29. Si $\text{Log}(ab^2)=1$ y $\text{Log}(a^3b)=-1$, hallar el valor de $E=ab$.
30. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, hallar $\text{Log}_y x$ sabiendo que $243(\text{Log}_x 2)^3 = 32(\text{Log}_y z)^4$.
31. Sean a y b las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Si $(c-b) \neq 1$ y $(c+b) \neq 1$, expresar $2(\text{Log}_{c-b}a)(\text{Log}_{c+b}a)$ como suma de logaritmos en las bases anteriores.



6.3 LA FUNCION LOGARITMICA

Sea la ecuación logarítmica: $y = \text{Log}_b x$

Sabemos que si $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, esta ecuación asocia un número real único "y" con cada $x \in \mathbb{R}^+$. De ahí que la ecuación defina una función que se puede expresar del modo siguiente:

$$f = \text{Log}_b = \{(x, y) | y = \text{Log}_b x, x > 0\}$$

Nótese que el dominio de cualquier función logarítmica es $\mathbb{R}^+$. Nos falta saber cual es la imagen o rango de una función tal. Esta pregunta se puede responder examinando la parte (a) del Teorema 6.1 que nos permite definir la función logarítmica como sigue:

DEFINICION 6.5. Si $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces la función logarítmica en base b, denotado por Log_b , es la función inversa de la función exponencial $\exp_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Esto es:

$$\text{Log}_b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} = \{(x, y) | f(x) = \text{Log}_b x, x > 0\}$$

o sea:

$$\text{Log}_b = (\exp_b)^*$$

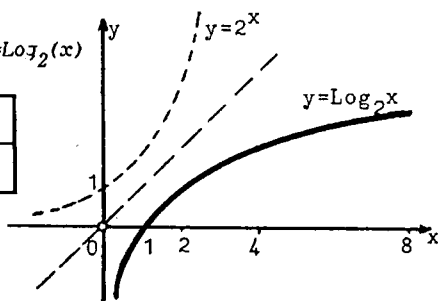
Como consecuencia de esta definición se tiene que:

- a) $\text{Log}_b[\exp_b(x)] = x$
- b) $\exp_b[\text{Log}_b(x)] = x$
- c) $\text{Log}_b(x) = y \leftrightarrow x = b^y$

Puesto que $\{(x, y) | y = \text{Log}_b x\} = \{(x, y) | x = b^y\}$, podemos obtener la gráfica de la ecuación $y = \text{Log}_b x$, trazando la gráfica de la ecuación exponencial $x = b^y$. Aquí la variable independiente es la y; por tanto, para trazar su gráfica empezamos por seleccionar valores de y, para determinar los valores correspondientes de x.

Por ejemplo, tracemos la gráfica de $y = \text{Log}_2 x$

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3



Aunque esta curva es la gráfica de una función logarítmica en particular, su forma general y sus características son típicas de la gráfica de cualquier función logarítmica $y = \log_b x$, donde $b > 1$.

Observaciones:

- (1) El rango o imagen de una función logarítmica de base $b > 1$ es la totalidad de los números reales.
- (2) Si $0 < x < 1$, entonces $\log_b(x) < 0$
(La gráfica está dispuesta debajo del eje X)
Si $x=1 \rightarrow \log_b x=0$ y si $x > 1 \rightarrow \log_b x > 0$
(La gráfica está dispuesta sobre el eje X)
- (3) Si x_1, x_2 son números reales positivos, entonces:
 $\log_b x_1 < \log_b x_2 \iff x_1 < x_2$ (La función es estrictamente creciente)
- (4) Toda línea paralela al eje X corta a la curva en uno y solo un punto.
(La función logarítmica es inyectiva)
- (5) Toda gráfica de una función logarítmica de la forma $y = \log_b x$, pasa por el punto $(1, 0)$.

EJEMPLO 1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \langle 2, +\infty \rangle$ definida por $f(x) = \exp_2(x+1) + 2$. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

- f^* es estrictamente creciente
- $x=2$ es una asíntota de la gráfica de f^* .
- $\text{Dom}(f^*) = \langle 2, +\infty \rangle$
- $y=2$ es una asíntota de la gráfica de f .

Solución. Analicemos cada una de las afirmaciones dadas:

$$a) f(x) - 2 = \exp_2(x+1) = 2^{x+1}$$

Cambiando de variables se tiene:

$$x-2 = 2^{y+1} \rightarrow \log_2(x-2) = y+1$$

$$\text{de donde: } f^*(x) = -1 + \log_2(x-2)$$

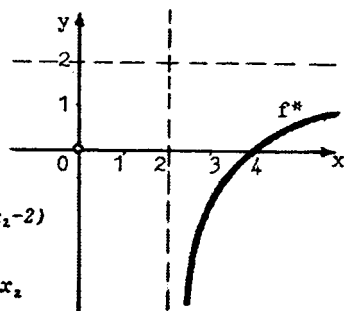
$$\text{Sean } x_1, x_2 \in \text{Dom}(f^*) = \langle 2, +\infty \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Si } f^*(x_1) > f^*(x_2) &\rightarrow -1 + \log_2(x_1 - 2) > -1 + \log_2(x_2 - 2) \\ &\rightarrow \log_2(x_1 - 2) > \log_2(x_2 - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Siendo las bases iguales } \rightarrow x_1 - 2 > x_2 - 2 \rightarrow x_1 > x_2$$

f^* es estrictamente creciente en todo su dominio.

Luego, la afirmación es verdadera.



- b) Si $x=2 \rightarrow f^*(2)=-1+\log_2(0)=-\infty$, entonces $x=2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f^* . La afirmación es verdadera.
- c) Por definición $f: \mathbb{R} \rightarrow \langle 2, +\infty \rangle$, entonces, $f^*: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Esto es, $\text{Dom}(f^*) = \langle 2, +\infty \rangle$. La afirmación es verdadera.
- d) $f(x)=2+2^{x+1}=2(1+2^x)$. Cuando x tiende a $-\infty$, entonces, $2^{-\infty}$ tiende a 0, luego, $y=2(1+0)=2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f . La afirmación es verdadera.

EJEMPLO 2. Si $f(x)=\log_4[\log_{1/2}(\log_3 x)]$, hallar el dominio de f .

Solución. La función es real $\leftrightarrow \log_{1/2}(\log_3 x) > 0$. (1)

Dado que $(\frac{1}{2}) \in \langle 0, 1 \rangle$, se cumple (1) $\leftrightarrow 0 < \log_3 x < 1/2$

$$\leftrightarrow (\log_3 x > 0) \wedge (\log_3 x < 1/2) \leftrightarrow (x > 3^0) \wedge (x < 3^{1/2})$$

$$\leftrightarrow (x > 1) \wedge (x < \sqrt{3}) \rightarrow \text{Dom}(f) = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$$

EJEMPLO 3. Mostrar que la gráfica de la función $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ es simétrica respecto al origen. Hallar la función inversa.

Solución. Una función es simétrica respecto al origen cuando es impar, esto es:

$$i) \text{ Si } x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$$

$$ii) f(x) = -f(-x), \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$\text{En efecto, } f(-x) = \log_a(-x + \sqrt{x^2+1}) = \log_a \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \log_a \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\rightarrow f(-x) = \log_a (x + \sqrt{x^2+1})^{-1} = -\log_a (x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x)$$

Luego, $f(x) = -f(-x)$

Para hallar la función inversa de f intercambiamos las variables:

$$x = \log_a(y + \sqrt{y^2+1}) \rightarrow y + \sqrt{y^2+1} = a^x \rightarrow \sqrt{y^2+1} = a^x - y$$

$$\text{Elevando al cuadrado obtenemos: } 2a^x y = a^{2x} - 1 \rightarrow f^*(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

EJEMPLO 4. Hallar el dominio de la función inversa de $y = \frac{2^x}{1+2^x}$

$$\text{Solución. Intercambiando variables: } x = \frac{2^y}{1+2^y} \rightarrow 2^y = \frac{x}{1-x}$$

De donde, tomando logaritmos de base 2, se tiene: $y = \log_2(\frac{x}{1-x})$

$$\text{La función es real } \leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 0 \leftrightarrow \frac{x}{x-1} < 0 \rightarrow \text{Dom}(f^*) = \langle 0, 1 \rangle$$

EJEMPLO 5. Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x-1) & , \text{ si } 3 \leq x \leq 9 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & , \text{ si } 1 < x < 3 \\ -1 + \sqrt{x(2-x)} & , \text{ si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

a) Hallar, si existe, $f^*(x)$.

b) Graficar $f(x)$ y $f^*(x)$ en el mismo sistema de coordenadas.

Solución. (1) Sean: $f_1(x) = \log_2(x-1)$, $x \in [3, 9]$; $f_2(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$, $x \in [1, 3]$

$$\text{y } f_3(x) = -1 + \sqrt{1 - (x-1)^2}, \quad x \in [0, 1]$$

(2) Siendo estas funciones univariantes y crecientes en su intervalo de definición (verificar), entonces:

$$\text{Ran}(f_1) = \{f_1(3), f_1(9)\} = [1, 3] = \text{Dom}(f_1^*)$$

$$\text{Ran}(f_2) = \{f_2(1), f_2(3)\} = [0, 1] = \text{Dom}(f_2^*); \text{Ran}(f_3) = [-1, 0] \quad (\text{Verificar})$$

(3) Como $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) \cup \text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_3) \cup \text{Ran}(f_2) \cap \text{Ran}(f_3) = \emptyset \rightarrow \exists f^*(x)$

(4) Determinación de las funciones inversas (Intercambiando variables).

$$\text{En } f_1: x = \log_2(y-1) \leftrightarrow y-1 = 2^x$$

$$\rightarrow f_1^*(x) = 1 + 2^x, \quad x \in [1, 3]$$

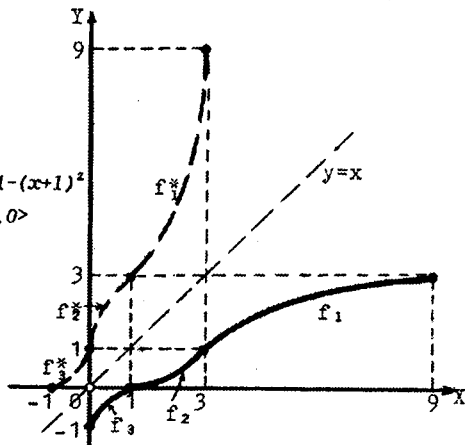
$$\text{En } f_2: x = \frac{1}{4}(y-1)^2 \rightarrow y-1 = 2\sqrt{x}$$

$$\rightarrow f_2^*(x) = 1 + 2\sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{En } f_3: x = -1 + \sqrt{1 - (y-1)^2} \rightarrow (y-1)^2 = 1 - (x+1)^2$$

$$\rightarrow f_3^*(x) = 1 - \sqrt{1 - (x+1)^2}, \quad x \in [-1, 0]$$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} 1 + 2^x & , \quad x \in [1, 3] \\ 1 + 2\sqrt{x} & , \quad x \in [0, 1] \\ 1 - \sqrt{1 - (x+1)^2} & , \quad x \in [-1, 0] \end{cases}$$



EJERCICIOS: Grupo 43

En los ejercicios del 1 al 8, trazar la gráfica para cada una de las funciones dadas.

1. $f = \{(x, y) | y = \log_{1/2}(x)\}$

4. $f = \{(x, y) | y = \log_2(1/x)\}$

2. $f = \{(x, y) | y = \log_3(x)\}$

5. $f = \{(x, y) | y = \log_2|x-1|\}$

3. $f = \{(x, y) | y = \log_2 \lfloor x \rfloor\}$

6. $f = \{(x, y) | y = \log(x+6)+1\}$

7. $f = \{(x, y) | y = |\log_2 x|\}$ 8. $f = \{(x, y) | y = |\log_2 |x||\}$
9. Una función f viene dada por la ecuación $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$. Hallar el dominio de la función dada y escribir la función inversa.
10. Hallar el dominio de las funciones que se indican:
- a) $y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$ d) $y = \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right)$
- b) $y = \log(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$ e) $y = \sqrt{\log\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$
- c) $y = \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
11. Sea $\{a, b, c, d, x\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:
- a) Si $x > 1$ y $b < 1 \rightarrow \log_b x > 0$ c) $\log_b(x) = -\log_{1/b}(x)$
- b) $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d) = \log_a d$
12. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x, x_1, x_2 \in (0, +\infty)$. Establecer el valor de verdad de cada afirmación:
- a) Si $x_1 < x_2 \rightarrow \log_b(x_1) < \log_b(x_2)$
- b) La gráfica de $y = \log_b(x)$ corta al eje X en $x=1$.
- c) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces la gráfica de $y = \log_b x$ corta a la recta $y=c$ en un punto y sólo en uno.
- d) La gráfica de $y = \log_b x$ pasa por el punto $(a, \log_a b)$.
13. Establecer el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones
- a) $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Si $a < b \rightarrow \log_c a < \log_c b$
- b) La función exponencial en base $b > 0$, $b \neq 1$, es inyectiva.
- c) $b > 0$, $\log_b x < \log_b y \rightarrow x < y$
14. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
- a) Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_b x$ y $g(x) = \log_{1/b}(x)$, $b > 0$, $b \neq 1$, son simétricas respecto del eje X .
- b) Si $b_1 > b_2 > 1$, entonces $\log_{b_1} x \geq \log_{b_2} x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$
- c) La ecuación $\log_b x = b^x$ tiene solución solamente si $0 < b < 1$.
15. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:
- a) La inecuación $0 < \log_{2/\sqrt{5}}(x) < 1$ tiene como conjunto solución el intervalo $(0, 1)$.
- b) Si $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, la ecuación:
 $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4 \cdot \dots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} x = 1/2$, tiene como con-

junto solución $\{a_n\}$.

- c) Si $f: \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = \log_2(x+1) - \log_2(x-1)$, entonces $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \langle 1, +\infty \rangle$ está definida por $f^*(x) = \sqrt{2^x + 1}$

16. Determinar: $E = \sqrt{\frac{2^{2+\log_7 5} + 5^{\log_7 14}}{5^{\log_7 2}}}$

17. Sean f y g funciones reales de variable real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|+1} & , \text{ si } -7 \leq x < -2 \\ \lfloor x/2 \rfloor + x^2 & , \text{ si } 0 \leq x < 2 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} 2^{x - \lfloor x \rfloor} & , \text{ si } 2 < x < 5/2 \\ \ln \sqrt{x^2 + 2} & , \text{ si } 7/2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Hallar, si existe, la función $gof(x)$ y su dominio.

18. Sea la función: $g(x) = \begin{cases} 2x \lfloor x+3 \rfloor & , \text{ si } x \in \langle -2, 0 \rangle \\ -3/5 \ln x & , \text{ si } x \in \langle e^{-20/3}, 1 \rangle \\ x^2 + 1 & , \text{ si } x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$

- a) Determinar si g es inyectiva.

- b) Si $A = [-4, +\infty) \setminus \{4\}$, determinar la función $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(goh)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

19. Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & , \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{3}{4} \lfloor x^3 \rfloor & , \text{ si } x > 1 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} \log_x \left(\frac{x+3}{x+1} \right) & , \text{ si } x > 3 \\ \lfloor x \rfloor^2 - 2x + 2 & , \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

Hallar: $(fog)(x)$.

6.4 ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones exponenciales son aquellas que tienen la incógnita en el exponente.

Para resolver las ecuaciones exponenciales existen dos métodos fundamentales:

6.4.1 METODO DE REDUCCION A UNA BASE COMUN

Este método se basa en la aplicación de la propiedad:

$$\text{Si } b > 0 \text{ y } b \neq 1 \rightarrow b^x = b^y \iff x = y$$

EJEMPLO 1. Resolver: $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$

Solución. Haciendo uso de las leyes de los exponentes, se tiene:

$$3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3^2} - \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} = 750 \rightarrow 3^x \left(3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \right) = 750$$

$$\rightarrow 3^x \left(\frac{250}{81} \right) = 750 \rightarrow 3^x = 3^5 \leftrightarrow x=5$$

EJEMPLO 2. Resolver: $3^{2x+5} = 28(3^{x+1} - 2) = 55$

Solución. $3^{2x} \cdot 3^5 - 28(3^x \cdot 3 - 2) = 55 \rightarrow 243(3^{2x}) - 84(3^x) + 1 = 0$

Haciendo: $3^x = m$ ($m > 0$) $\rightarrow 243m^2 - 84m + 1 = 0 \leftrightarrow m = 1/3$ o $m = 1/81$

Para: $m = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x = 3^{-1} \leftrightarrow x = -1$

$$m = \frac{1}{81} \rightarrow 3^x = 3^{-4} \leftrightarrow x = -4 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} m = \frac{1}{3} \\ m = \frac{1}{81} \end{array}} \right\} \therefore \text{C.S.} = \{-4, -1\}$$

EJEMPLO 3. Resolver: $2 \cdot 3^{2x+1} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$

Solución. $2 \cdot 3^{2x} \cdot 3 - 13(3^x \cdot 2^x) + 6(2^{2x}) = 0 \rightarrow 6(3^{2x}) - 13(3^x \cdot 2^x) + 6(2^{2x}) = 0$

Sean: $3^x = m$ y $2^x = n$ ($m > 0$ y $n > 0$) $\rightarrow 6m^2 - 13mn + 6n^2 = 0$

Factorizando: $(3m-2n)(2m-3n) = 0 \leftrightarrow m = 2n/3$ o $m = 3n/2$

Luego: $3^x = \frac{2}{3}(2^x) \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \leftrightarrow x = -1$

$$3^x = \frac{3}{2}(2^x) \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \leftrightarrow x = 1 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3^x = \frac{2}{3}(2^x) \\ 3^x = \frac{3}{2}(2^x) \end{array}} \right\} \therefore \text{CS} = \{-1, 1\}$$

EJEMPLO 4. Resolver el sistema: $2^{1+x} + 2^{2+2y} = 2^4$; $2^x - 2^{2y} = 2$

Solución. En la primera ecuación: $2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{2y} = 16 \rightarrow 2^x + 2(2^{2y}) = 8$ (1)

Restando la segunda ecuación dada de (1), se tiene:

$$3 \cdot 2^{2y} = 6 \rightarrow 2^{2y} = 2 \leftrightarrow 2y = 1 \rightarrow y = 1/2$$

Sustituyendo en (1): $2^x + 2(2) = 8 \rightarrow 2^x = 2^2 \leftrightarrow x = 2$

$$\therefore \text{C.S.} = \{(2, 1/2)\}$$

EJEMPLO 5. Resolver el sistema, si $n \in \mathbb{Z}$, $x > 0$, $y > 0$

$$y^n = x^{y-x} \quad (1) \quad ; \quad x^{2n} = y^{y-x-n} \quad (2)$$

Solución. Multiplicando (1) y (2): $(x^x y)^n = (xy)^{y-x} (y)^{-n}$

$$\rightarrow x^n (xy)^n = (xy)^{y-x} (y)^{-n} \rightarrow (xy)^n (xy)^n = (xy)^{y-x}$$

$$\rightarrow (xy)^{2n} = (xy)^{y-x}$$

Caso 1. Si $xy \neq 1 \rightarrow 2n = y - x \rightarrow y = x + 2n$

$$\begin{aligned} \text{En (1): } (x+2n)^n &= x^{2n} + x+2n=x^2 + x^2-x-2n=0 + x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+8n}) \\ &+ y = 2n + \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+8n}) \end{aligned}$$

Caso 2. Si $xy=1 \rightarrow y=x^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{En (1): } (x^{-1})^n &= x^{x^{-1}-x} \leftrightarrow -n=x^{-1}-x + x^2-nx-1=0 + x = \frac{1}{2}(n+\sqrt{n^2+4}) \\ &+ y = \frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}} = \frac{1}{2}(\sqrt{n^2+4} - n) \end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Resolver el sistema en $\mathbb{R}$: $(3x+y)^{x-y} = 9$ (1)

$$324^{(x-y)^{-1}} = 18x^2 + 12xy + 2y^2 \quad (2)$$

Solución. En (2): $(2^2 \times 3^4)^{\frac{1}{x-y}} = 2(3x+y)^2 + \frac{2}{(2^{\frac{2}{x-y}})(3^{\frac{4}{x-y}}) = 2(3x+y)^2$ (3)

$$\text{De (1): } 3x+y = 3^{\frac{2}{x-y}} ; \text{ en (3): } (2^{\frac{2}{x-y}})(3^{\frac{4}{x-y}}) = 2(3^{\frac{4}{x-y}})$$

$$\text{de donde: } 2^{\frac{2}{x-y}} = 2 \leftrightarrow \frac{2}{x-y} = 1 \rightarrow x-y = 2 \quad (4)$$

$$\text{Sustituyendo (4) en (1): } (3x+y)^2 = 9 \leftrightarrow 3x+y=3 \text{ o } 3x+y=-3$$

$$\text{Luego: } (x-y=2 \wedge 3x+y=3) \leftrightarrow x=5/4, y=-3/4$$

$$(x-y=2 \wedge 3x+y=-3) \leftrightarrow x=-1/4, y=-9/4$$

$$\therefore C.S = \{(5/4, -3/4), (-1/4, -9/4)\}$$

6.4.2 METODO DE LOGARITMACION EN AMBOS LADOS DE UNA ECUACION

EJEMPLO 7. Dado $\text{Log}2=0.3010$, resolver la ecuación: $5^{5-3x} = 2^{x+2}$

Solución. Aplicamos logaritmos en ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$(5-3x)\text{Log}5 = (x+2)\text{Log}2 \rightarrow (5-3x)\text{Log}\left(\frac{10}{2}\right) = (x+2)\text{Log}2$$

$$\rightarrow (5-3x)(\text{Log}10 - \text{Log}2) = (x+2)\text{Log}2 \rightarrow (5-3x)(1 - \text{Log}2) = (x+2)\text{Log}2$$

$$\text{de donde: } x = \frac{5-7\text{Log}2}{3-2\text{Log}2} = \frac{5-7(0.3010)}{3-2(0.3010)} = \frac{2.893}{2.348} = 1.206$$

EJEMPLO 8. Resolver: $(a^3 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = (a-b)^{2x}(a+b)^{-2}$

$$\text{Solución. } [(a^2 - b^2)^2]^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2} \rightarrow \frac{(a^2 - b^2)^{2x}}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$$

$$\rightarrow \frac{(a+b)^{2x}(a-b)^{2x}}{(a+b)^2(a-b)^2} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2} \rightarrow (a+b)^x = a-b$$

$$\text{Aplicando logaritmos: } x\text{Log}(a+b) = \text{Log}(a-b) \rightarrow x = \frac{\text{Log}(a-b)}{\text{Log}(a+b)}$$

EJEMPLO 9. Resolver: $e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x - 4 = 0$

Solución. Haciendo: $e^x = m$, ($m > 0$), se tiene:

$$m^3 - 3m^2 + 4m - 4 = 0 \quad + \quad (m-2)(m^2 - m + 2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad m-2=0 \quad \text{o} \quad m^2 - m + 2 = 0$$

Única solución real: $m=2$, luego, si: $e^x=2$, aplicando logaritmos en ambos lados de la ecuación, se tiene: $x \ln e = \ln 2$ (Pero: $\ln e = 1$)

$$\therefore x = \ln 2$$

EJERCICIOS: Grupo 44

Resolver las siguientes ecuaciones sin emplear logaritmos:

$$1. (2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{1/3})^{2/5} = \sqrt[5]{2x^2 - 2x - 2}$$

$$2. 3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$$

$$3. x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^x = 0$$

$$4. (3^{x-1} + 3^{x+2})(5^{x+2} + 5^{x-1}) = 3528$$

$$5. 64(2^{x-5})^x - 729(3^x)^{x-5} = 0$$

$$6. 3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$$

$$7. 3(2^{x+3}) = 132(3^{x-3})$$

$$8. 2^{2x+6} + 1 = 8(2^{x+1})$$

$$9. a^{2x}(a^2+1) = (a^{3x}+a^x)a$$

$$10. (3^{5-x})(5^{2x-4}) = 15^{11-3x}$$

$$11. 4^{x+1/2} - 3^{2x} = 4^{x-1/2} - 3^{2x-1}$$

$$12. (x^3)^{3^x} = (-8^{2^{-1}})^{\frac{1}{\sqrt[1/2]{81}}}$$

Resolver las siguientes ecuaciones haciendo uso de logaritmos:

$$13. 3^{x+1} + 18(3^{-x}) = 29$$

$$14. 10^{5-3x} = 2^{7-2x}$$

$$15. 4^{2x-1} = 5^{x+2}$$

$$16. (a^{3-x})(b^{5x}) = (a^{x+5})(b^{3x})$$

21. Si $\log_2 k = y$ y $\log_3 h = x$, resolver los sistemas de ecuaciones:

$$a) 2^{x+y} = 6^y ; 3^x = 3 \cdot 2^{y+1}$$

$$b) 3^{1-x-y} = 4^{-y} ; 2^{2x-1} = 3^{3y-x}$$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$22. \sqrt[3]{x+y} = 2 ; (x+y)3^y = 216$$

$$24. x^y - y^x, x^3 = y^2$$

$$23. x^x = y^y ; x^y = 2x$$

$$25. x^{x+y} = y^{x-y} ; x^2 y = 1$$

26. $\sqrt{x+y} = 2$; $(x+y) \cdot 3^x = 279936$
27. $x^{-y}\sqrt{x+y} = 2\sqrt{3}$; $(x+y) \cdot 2^{y-x} = 3$, $0 < y < x$
28. $x^{x+y} = y^n$; $y^{x+y} = x^{2n} \cdot y^n$, $y > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (dado)
29. $(x+y)^{x+y} = 8 - (x+y)^x$; $(x+y)^{x-y} = 8 - 16(x+y)^{y-x}$, x, y enteros (> 0)
30. $x^{uv+4u-u^2} = y^{(1+u)(2u-8)}$ 31. $2^{3+2x} + 2^{4y} = 8$
- $2^{uv} = 125(5)^u$ $2^{1+2x} + 2^{2+4y} - 4^z = 15$
- $xy^2 = 1$; $x + y^2 = 3$ $2^{3+4y} - 4^{1+z} = 24$



6.5 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

La ecuación con la incógnita bajo el signo de logaritmo se llama **ecuación logarítmica**. En general, una ecuación logarítmica se resuelve teniendo en cuenta las condiciones iniciales que debe cumplir la variable, esto es, la determinación del universo de la variable dentro del cual se resuelve la ecuación aplicando las propiedades descritas en la sección 6.2.1.

Si la ecuación logarítmica tiene la forma:

$$\text{Log}_b f(x) = L$$

el universo de la ecuación se determina del modo siguiente:

- a) Primera Condición: Base positiva y diferente de uno. ($b > 0 \wedge b \neq 1$)
- b) Segunda Condición: Número positivo ($f(x) > 0$)

Universo de la ecuación: $U = (b > 0 \wedge b \neq 1) \wedge (f(x) > 0)$

Los ejemplos que siguen ilustran algunas de las técnicas que ^{se} pueden emplear.

EJEMPLO 1. Resolver: $2\text{Log}(\text{Log}x) = \text{Log}(7-2\text{Log}x) - \text{Log}5$

Solución. a) Aquí, la primera condición está dada: $b=10$

b) $\text{Log}x > 0 \rightarrow x > 10^0 \rightarrow x > 1 \quad \therefore U = \{x > 1, +\infty\}$

Según las propiedades L.2 y L.3: $\text{Log}(\text{Log}x)^2 = \text{Log}\left(\frac{7-2\text{Log}x}{5}\right)$

Como la función logaritmo es inyectiva $\rightarrow (\text{Log}x)^2 = \frac{7-2\text{Log}x}{5}$

De donde: $5\text{Log}^2x + 2\text{Log}x - 7 = 0 \rightarrow (5\text{Log}x + 7)(\text{Log}x - 1) = 0 \rightarrow \text{Log}x = -7/5 \text{ o } \text{Log}x = 1$

Vemos que la primera alternativa no cumple la segunda condición inicial.

Luego, si $\text{Log}x = 1 \rightarrow x = 10 \in U \quad \therefore \text{C.S.} = \{10\}$

EJEMPLO 2. Resolver: $\text{Log}_x(12) - 3\text{Log}_x(4) + \text{Log}_x(6) = 4$

Solución. Condiciones iniciales: $(x > 0) \wedge (x \neq 1) \rightarrow U = \langle 0, +\infty \rangle - \{1\}$

$$\text{Luego: } \text{Log}_x 12 - \frac{3}{2}\text{Log}_x 4 + \text{Log}_x 6 = 4 \rightarrow \text{Log}_x 12 - \text{Log}_x 4^{3/2} + \text{Log}_x 6 = 4$$

$$\rightarrow \text{Log}_x \left(\frac{12 \times 6}{8} \right) = 4 \rightarrow \text{Log}_x 9 = 4 \leftrightarrow 9 = x^4 \rightarrow x^2 = 3 \leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ o } x = -\sqrt{3}$$

Dado que $x = -\sqrt{3} \notin U \rightarrow C.S. = \{\sqrt{3}\}$

EJEMPLO 3. Resolver: $3\text{Log}_2 x - \frac{1}{\text{Log}_x 2} = 8\text{Log}_x 2$

Solución. Condiciones iniciales: $(x > 0) \wedge (x \neq 1) \rightarrow U = \langle 0, +\infty \rangle - \{1\}$

$$\text{Luego, según L.8: } 3\text{Log}_2 x - \text{Log}_2 x = \frac{8}{\text{Log}_2 x} \rightarrow (\text{Log}_2 x)^2 = 4$$

$$\leftrightarrow \text{Log}_2 x = 2 \text{ o } \text{Log}_2 x = -2 \leftrightarrow x = 2^2 = 4 \text{ o } x = 2^{-2} = 1/4$$

Ambas raíces pertenecen al universo $\rightarrow C.S. = \{1/4, 4\}$

EJEMPLO 4. Resolver: $\text{Log}_a(x^2) - \text{Log}_x(a) = \text{Log}_9(1/27)$

$$(a > 0, a \neq 1; x > 0, x \neq 1)$$

Solución. Sea: $\text{Log}_9(1/27) = y \rightarrow \frac{1}{27} = 9^y \rightarrow 3^{-3} = 3^{2y} \rightarrow y = -3/2$

$$\text{En la ecuación dada: } \frac{1}{2}\text{Log}_a x - \frac{1}{\text{Log}_a x} = -\frac{3}{2} \quad (\text{L.6 y L.8})$$

$$\text{de donde: } 2(\text{Log}_a x)^2 + 3\text{Log}_a x - 2 = 0 \leftrightarrow \text{Log}_a x = 1/2 \text{ ó } \text{Log}_a x = -2$$

$$\leftrightarrow x = a^{1/2} \text{ ó } x = a^{-2}$$

$$\therefore C.S. = \{\sqrt{a}, 1/a^2\}$$

EJEMPLO 5. Resolver: $8 + \text{Log}_3(4^{\text{Log}_3 x}) = \text{Log}_3(36^{\text{Log}_3 x})$

Solución. Según L.2: $8 + (\text{Log}_3 x)(\text{Log}_3 4) = (\text{Log}_3 x)(\text{Log}_3 36)$

$$\rightarrow 8 + (\text{Log}_3 x)(\text{Log}_3 4) = (\text{Log}_3 x)(\text{Log}_3 9 + \text{Log}_3 4) = (\text{Log}_3 x)(2 + \text{Log}_3 4)$$

$$\rightarrow 8 + (\text{Log}_3 x)(\text{Log}_3 4) = 2\text{Log}_3 x + (\text{Log}_3 x)(\text{Log}_3 4)$$

Simplificando se tiene: $\text{Log}_3 x = 4 \leftrightarrow x = 3^4 = 81 \rightarrow C.S. = \{81\}$

EJEMPLO 6. Resolver: $\text{Log}_x(3) \cdot \text{Log}_{81/x}(3) = -\text{Log}_{x-3}(x); x > 1$

Solución. Universo de la ecuación: $U = \langle 1, +\infty \rangle$ (dato)

Según las propiedades L.9 y L.6, se tiene:

$$+ \log_x 3 \left(\frac{\log_{81}(3)}{1 - \log_{81} x} \right) = -\frac{1}{3} \log_x(x) + \frac{1}{\log_3 x} \left(\frac{(1/4) \log_3 3}{1 - (1/4) \log_3 x} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{De donde: } (\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x + 3 = 0 \leftrightarrow \log_3 x = 3 \text{ o } \log_3 x = 1 \leftrightarrow x = 3^3 \text{ o } x = 3^1$$

$$\therefore C.S. = \{3, 27\}$$

$$\text{EJEMPLO 7. Resolver: } \log_x(2) \cdot \log_{x/16}(2) = \log_{x/64}(2)$$

$$\text{Solución. Condiciones iniciales: } (x > 0) \wedge (x \neq 1) \rightarrow U = \langle 0, +\infty \rangle - \{1\}$$

$$\text{Según L. 9: } \log_x 2 \left(\frac{\log_{x/16} 2}{1 - \log_{x/16} x} \right) = \frac{\log_{x/64} 2}{1 - \log_{x/64} x}$$

$$\text{De donde: } 6(\log_x 2)^2 - 5 \log_x 2 + 1 = 0 \rightarrow \log_x^2 2 - 5 \log_x 2 + 6 = 0 \quad (L. 8)$$

$$\leftrightarrow \log_x 2 = 3 \text{ o } \log_x 2 = 2 \leftrightarrow x = 2^3 \text{ o } x = 2^2 \rightarrow C.S. = \{4, 8\}$$

$$\text{EJEMPLO 8. Resolver: } \log_{8x} \left(\frac{8}{x} \right) + \log_8^2(x) = 1$$

$$\text{Solución. Condiciones iniciales: } (x > 0) \wedge (8x \neq 1) \rightarrow U = \langle 0, +\infty \rangle - \{1/8\}$$

$$\text{Según L. 3: } \log_{8x}(8) - \log_{8x}(x) + \log_8^2(x) = 1$$

$$\text{y por L. 8: } \frac{1}{\log_8(8x)} - \frac{1}{\log_x(8x)} + \log_8^2(x) = 1$$

$$+ \frac{1}{1 + \log_8 x} - \frac{1}{1 + \log_x 8} + \log_8^2 x = 1 \rightarrow \frac{1}{1 + \log_8 x} - \frac{\log_8 x}{1 + \log_8 x} + \log_8^2 x = 1$$

$$\text{Sea } \log_8 x = m \rightarrow \frac{1-m}{1+m} + m^2 = 1 \rightarrow m^3 + m^2 - 2m = 0 \leftrightarrow m=0 \text{ ó } m=1 \text{ ó } m=-2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para: } m=0 \rightarrow \log_8 x = 0 \leftrightarrow x = 8^0 = 1 \\ m=1 \rightarrow \log_8 x = 1 \leftrightarrow x = 8^1 = 8 \\ m=-2 \rightarrow \log_8 x = -2 \leftrightarrow x = 8^{-2} = 1/64 \end{array} \right\} \therefore C.S. = \{1, 8, 1/64\}$$

$$\text{EJEMPLO 9. Resolver: } \log^2(100x) + \log^2(10x) + \log x = 14$$

$$\begin{aligned} \text{Solución. Por L. 1: } & (\log 100 + \log x)^2 + (\log 10 + \log x)^2 + \log x = 14 \\ & + (2 + \log x)^2 + (1 + \log x)^2 + \log x = 14 \rightarrow 2 \log^2 x + 7 \log x - 9 = 0 \\ & \leftrightarrow \log x = 1 \text{ ó } \log x = -9/2 \leftrightarrow x = 10 \text{ ó } x = 10^{-9/2} \end{aligned}$$

$$\text{EJEMPLO 10. Resolver: } \left(\frac{2}{5}\right)^{(\log_x 81 - \log_3 x)} = \left(\frac{25}{4}\right)^{(\log_3 x - \frac{5}{2})}$$

$$\text{Solución. } \left(\frac{2}{5}\right)^{(\log_x 3^4 - \log_3 x)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(\log_3 x - \frac{5}{2})}$$

$$\rightarrow 4\log_3 x - \log_3 x = -2\log_3 x + 5 \rightarrow \frac{4}{\log_3 x} + \log_3 x = 5$$

$$\text{de donde: } \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \rightarrow \log_3 x = 1 \text{ o } \log_3 x = 4$$

$$\rightarrow x=3 \text{ o } x=3^4=81 \rightarrow C.S = \{3, 81\}$$

EJEMPLO 11. Resolver el sistema: $2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512$; $\log \sqrt{xy} = 1 + \log 2$

Solución. En la primera ecuación: $2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2^9 \rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

Elevando al cuadrado se tiene: $(x+y)+2\sqrt{xy} = 81$ (1)

En la segunda ecuación: $\log \sqrt{xy} = \log 10 + \log 2 = \log 20 \rightarrow xy = 400$ (2)

Sustituyendo (2) en (1): $x+y+40=81 \rightarrow x+y=41$ (3)

De (2) y (3) formamos la ecuación cuadrática: $m^2 - 41m + 400 = 0$

cuyas raíces: $m=16$ o $m=25$, corresponden a los valores de x e y , esto es:

$$C.S = \{(16, 25), (25, 16)\}$$

EJEMPLO 12. Resolver el sistema: $y \cdot x^{(\log_y x)} = x^{5/2}$ (1)

$$(\log_4 y)(\log_y(y-3x)) = 1$$
 (2)

Solución. Condiciones iniciales: $y > 0$, $y \neq 1$, $x > 0$

En (2): $\log_y(y-3x) = \frac{1}{\log_4 y} = \log_y 4 \rightarrow y-3x=4$ (3)

En (1), aplicamos logaritmos de base x : $\log_x(y \cdot x^{(\log_y x)}) = \log_x x^{5/2}$

$$\rightarrow \log_x y + \log_y x \cdot \log_x x = \frac{5}{2} \log_x x \rightarrow \log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{5}{2}$$

de donde: $2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 = 0 \rightarrow \log_x y = 2 \text{ o } \log_x y = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow y=x^2 \text{ o } y=\sqrt{x} \rightarrow x=y^2$$

Si $y=x^2$, en (3): $x^2-3x-4=0 \rightarrow x=4 \text{ o } x=-1 < 0$

$x=y^2$, en (3): $y-3y^2=4 \rightarrow 3y^2-y+4=0$, no tiene raíces reales.

Única solución real: $x=4 \rightarrow y=(4)^2=16 \therefore C.S = \{(4, 16)\}$

EJEMPLO 13. Dado el sistema en $\mathbb{R}$: $\log_k x \cdot \log_2 xy = \frac{1}{\log_x 2}$,

$$\log_3(x+y) = \frac{3\log_3 x}{\log_3 x}$$

a) Plantear un sistema equivalente sin expresiones logarítmicas.

b) Determinar el máximo valor de k para el cual el conjunto solución es no vacío y los correspondientes valores de x e y .

Solución. Condiciones iniciales: $k > 0$, $k \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$

En la primera ecuación: $(\log_x 2)(\log_k x)(\log_2 xy) = 1$

Aplicando sucesivamente la propiedad L.11 (cambio de base), se tiene:

$$\text{Log}_k 2 \cdot \text{Log}_2 xy = 1 \rightarrow \text{Log}_k xy = 1 \leftrightarrow xy = k \quad (1)$$

En la segunda ecuación dada, por L.11: $\text{Log}_3(x+y) = 3\text{Log}_3 2 \leftrightarrow x+y=8$ (2)

(1) y (2) es el sistema buscado, del cual formamos la ecuación cuadrática: $m^2 - 8m + k = 0$, cuyas raíces serán reales $\leftrightarrow \Delta \geq 0$, esto es: $b^2 - 4ac \geq 0$

Entonces: $(-8)^2 - 4(1)(k) \geq 0 \leftrightarrow k \leq 16 \rightarrow k \in [0, 16] - \{1\}$

Luego, el máximo valor de k es $k=16$, para el cual las raíces son iguales:

$$x = y = 4$$

EJEMPLO 14. Resolver el sistema: $\text{Log}_3(x+y+z) = 3\left(\frac{\text{Log}_3 z}{\text{Log}_2 z}\right)$ (1)

$$\text{Log}_{12} z \cdot \text{Log}_2 [z(x+y)] = \frac{1}{\text{Log}_2 2} \quad (2)$$

$$x-2y = 2^{y(z-2)(z-6)} \quad (3)$$

Solución. En (1): $\text{Log}_3(x+y+z) = 3(\text{Log}_3 z)(\text{Log}_2 2) = 3\text{Log}_3 2 = \text{Log}_3 2^3$
 $\leftrightarrow x+y+z = 8$ (4)

En (2): $(\text{Log}_{12} z)(\text{Log}_2 z)[\text{Log}_2 z(x+y)] = 1$. Aplicando L.11, se tiene:

$$(\text{Log}_{12} z)[\text{Log}_2 z(x+y)] = 1 \rightarrow \text{Log}_{12} z(x+y) = 1 \leftrightarrow z(x+y) = 12 \quad (5)$$

De (4) y (5): $z(8-z) = 12 \leftrightarrow z^2 - 8z + 12 = 0 \leftrightarrow z=2$ o $z=6$
 $\leftrightarrow (x+y=6)$ o $(x+y=2)$

En (3): $(x-2y) = 2^{y^0} \rightarrow x-2y = 2$

Luego, para $z=2 \rightarrow (x+y=6) \wedge (x-2y=2) \leftrightarrow x=14/3, y=4/3$

$z=6 \rightarrow (x+y=2) \wedge (x-2y=2) \leftrightarrow x=2, y=0$

Dado que en (3), $y \neq 0$, entonces: C.S. = $\{(14/3, 4/3, 2)\}$

EJERCICIOS: Grupo 45

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- $\text{Log}_9(x^3+8) - \text{Log}_9(x+2) = \text{Log}_9 7$
- $\text{Log}_x 15 + 2\text{Log}_x 50 - \text{Log}_x 6 = 3$
- $\text{Log}_{16} x + \text{Log}_4 x + \text{Log}_2 x = 7$
- $\text{Log} \sqrt{7x+4} + \text{Log} \sqrt{2x+3} = 1 + \text{Log} 1.5$
- $\text{Log}_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \text{Log}_2(3^{x-1} + 1)$
- $\text{Log}_x \sqrt{5} + \text{Log}_x 5x - 2.25 = (\text{Log}_x \sqrt{5})^2$
- $\text{Log}_x(\sqrt{2}) \cdot \text{Log}_{x/32}(\sqrt{2}) = \text{Log}_{x-1}(\sqrt{2})$
- $\text{Log}_a x + 2\text{Log}_x a = 3, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- $\text{Log}(8)^{\text{Log} x} - \text{Log}(2)^{\text{Log} x} = \text{Log} x^x, x \neq 1$
- $\text{Log}_4 x + \text{Log}_4(x-1) = \text{Log}_4(\text{Log}_{4/\sqrt{2}} 8)$

11. $\log_x 3 \cdot \log_{x/9}(3) = \log_{81x}(3)$ 16. $\log 128 = \log 2^{3x^2-2x+1} - \log 12 + \log 5$
12. $(0.4)^{1+(\log x)^2} = (6.25)^{2-\log x^3}$ 17. $4\log^2 \sqrt{ax} = \log ax$, $a > 0$
13. $(\log_{2x} 4)(\log_4 x) + 0.5 = \log_x 2$ 18. $2\log(\sqrt{x + \frac{x}{24}} + \sqrt{\frac{x}{24}}) - 1 = \log 3 - \log 2$
14. $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$ 19. $\log_x(2x^{x-2}-1) = 2x-4$, $x \neq 1$
15. $\log \sqrt{7x+5} + \frac{1}{2}\log(2x+7) = 1 + \log 4.5$ 20. $(\sqrt[3]{x})^{\log_x(x^2+2)} = 2\log_3 \sqrt[3]{27}$
21. Dado $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, hallar el conjunto solución de:
 $\log_a(a/x) \cdot \log_a^2 x = (1 - \log_a^2 x) \log_a(ax)$
22. Despejar x de: $\log(2^x - 1) + \log(2^{x-1} - 1) = 1 - \log 2$
23. Hallar el menor número positivo x tal que:
 $\frac{1}{2}\log(\csc x + 7) - \log(1.2) = 1 - \frac{1}{2}\log(14 + \csc x)$
24. Resolver: $\log_{|x|}(2) \cdot \log_{\frac{|x|}{16}}(2) = \log_{\frac{|x|}{64}}(2)$
25. Resolver: $3^{1+\log \cot x} - 3^{1+\log \tan x} + 8 = 0$
26. Resolver: $\log_{1/2}(\frac{1}{16}) + 2\log_3(x-3) \cdot \log_3(x+2) = \log_3^2(x+2) + \log_3^2(x-3)$
27. Resolver: $\sqrt{\log_a \sqrt[3]{ax} + \log_x \sqrt[3]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[3]{\frac{a}{x}}} = a$, $a > 0$
28. Resolver: $\log_2 x \cdot \log_x \left(\frac{\log_{|x|} \sqrt[3]{3}}{\log_{\sqrt{3}} |x|} \right) = -1$
29. Resolver para $x \in \mathbb{R}$: $\log_{1/2}(\frac{1}{16}) + 2\log_3(x-3) \cdot \log_3(x+2) = \log_3^2(x+2) + \log_3^2(x-3)$
 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:
30. $3^{x+y} = \frac{1}{3}$; $\log 9 = 2\log(x-y)$ 35. $2x^2 + y = 75$; $\log x^2 - \log y = 2\log 2 + \log 3$
31. $\log^2 xy - \log^2(\frac{x}{y}) = 8$; $2^{\log x} = 4^{\log y}$ 36. $\log(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13$; $\log(\frac{x+y}{x-y}) = 3\log 2$
32. $x^2 - y^2 = 10$; $(x-y)^{\log(x+y)} = 10^3$ 37. $x^{\ln y} = e^{-3}$; $\ln^2 x + \ln^2 y = 10$
33. $\log_{0.5}(y-x) + \log_2(\frac{1}{y}) = -2$; $x^2 + y^2 = 25$ 38. $\ln x + 3\ln y = 5$; $2\ln x - \ln y = 3$
34. $y + \log x = \frac{2}{\pi} \arcsen 1$; $x^y = 2^{\log_{0.5} 10}$ 39. $\frac{\log_y x}{\log_x y} = \frac{9}{4}$; $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{3}$
40. Resolver: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 34$; $0.4(\log x + \log y) = 2 + \log 2.25$

41. Dados: $a \neq 1/2$, $b \neq 3$; resolver

$$(2a)^{\log 2a} = y^{\log(b/3)} \quad ; \quad \left(\frac{b}{3}\right)^{\log(b/3)} = x^{\log 2a}$$

42. Hallar los valores de x e y tales que:

$$\log^2(xy) - \log^2\left(\frac{x}{y}\right) = 32 \quad ; \quad 2^{\log x} = 4^{\log y}$$

43. Sean $f(x) = \log_{(3-x)}\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$ y $g(x-1) = x-3$, $0 < x < 5$. Resolver: $(f \circ g)(x) = -1$.

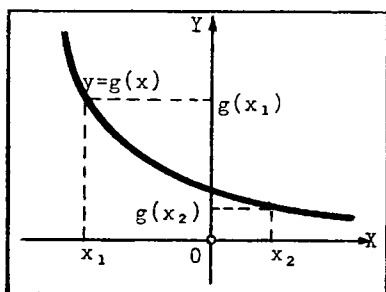
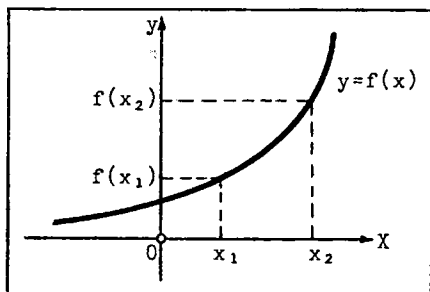


6.6 INECUACIONES EXPONENCIALES

La resolución de inecuaciones exponenciales se basa fundamentalmente en la aplicación de los incisos (b) y (c) del Teorema 6.1. En efecto, consideremos las gráficas de las funciones exponenciales:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{(x, y) | f(x) = b^x, b > 1\}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{(x, y) | g(x) = b^x, 0 < b < 1\}$$



En la gráfica de f se observa que:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \therefore f \text{ es creciente } \forall x \in \text{Dom}(f)$$

y en la gráfica de g :

$$x_1 < x_2 \rightarrow g(x_1) > g(x_2) \quad \therefore g \text{ es decreciente } \forall x \in \text{Dom}(g)$$

En forma similar, si tenemos inecuaciones exponenciales de la forma:

$$b^{P(x)} > b^{Q(x)} \quad \text{o} \quad b^{P(x)} < b^{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de x , entonces podemos considerar los casos siguientes:

Caso 1. Si $b > 1$, entonces:

$$b^{P(x)} > b^{Q(x)} \leftrightarrow P(x) > Q(x)$$

$$b^{P(x)} < b^{Q(x)} \leftrightarrow P(x) < Q(x)$$

Caso 2. Si $0 < b < 1$, entonces:

$$b^{P(x)} > b^{Q(x)} \leftrightarrow P(x) < Q(x)$$

$$b^{P(x)} < b^{Q(x)} \leftrightarrow P(x) > Q(x)$$

EJEMPLO 1. Resolver: $x+1\sqrt{8^{x+3}} < x-1\sqrt{32^{2x+5}}$

Solución. La inecuación es equivalente a: $(2^3)^{\frac{x+3}{x-1}} < (2^5)^{\frac{2x+5}{x-1}}$

$$\begin{aligned} \rightarrow 2^{\frac{3x+9}{x-1}} < 2^{\frac{10x+25}{x-1}} &\rightarrow \frac{3x+9}{x-1} < \frac{10x+25}{x-1} & (\text{Caso 1: } b=2>1) \\ \rightarrow \frac{7x^2+29x+34}{(x+1)(x-1)} > 0 \end{aligned}$$

Inecuación equivalente: $(7x^2+29x+34)(x+1)(x-1) > 0$ (1)

Para el primer factor: $\Delta = (29)^2 - 4(7)(34) = -111 < 0 \rightarrow 7x^2+29x+34 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Luego, (1) se cumple si: $(x+1)(x-1) > 0 \rightarrow x > 1 \vee x < -1$

$$\therefore \text{C.S} = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$$

EJEMPLO 2. Resolver: $x+3\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}} \leq x+2\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-2}}$

Solución. Se tiene: $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-6}{x+3}} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-2}{x+2}}$ (Caso 2: $0 < \frac{1}{5} < 1$)

$$\rightarrow \frac{2x-6}{x+3} \geq \frac{2x-2}{x+2} \rightarrow \frac{x+1}{(x+3)(x+2)} \leq 0$$

Inecuación equivalente: $(x+1)(x+2)(x+3) \leq 0, x \neq -3, x \neq -2$ (a)

Por el método de los valores críticos se determina que la solución de (a)

es: $\text{C.S} = \{x | x < -3 \vee -2 < x < -1\} = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle$ (Verificar)

EJEMPLO 3. Si A es el conjunto solución de la inecuación

$$x-2\sqrt{(0.008)^{x-1}} > x-1\sqrt{(0.04)^{x+3}}$$

y B es el conjunto solución de: $\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-9x+20} > 0$; hallar $(B-A)'$

Solución. En A: $(0.2)^{\frac{3(x-1)}{x-2}} > (0.2)^{\frac{2(x+3)}{x-1}} \rightarrow \frac{3(x-1)}{x-2} > \frac{2x+6}{x-1}$ (Caso 2)

$$\rightarrow \frac{3x-3}{x-2} - \frac{2x+6}{x-1} \leq 0 \rightarrow \frac{(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-1)} \leq 0$$

Inecuación equivalente: $(x-3)(x-5)(x-2)(x-1) \leq 0, x \neq 1, x \neq 2$

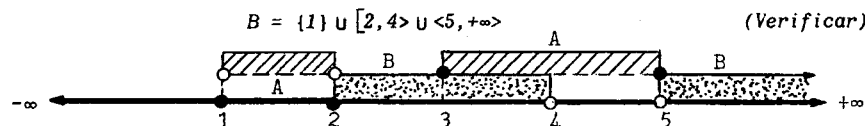
Por el método de los valores críticos se determina que:

$$A = \langle 1, 2 \rangle \cup [3, 5] \quad (\text{Verificar})$$

En B se tiene: $\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-4)(x-5)} \geq 0$

Inecuación equivalente: $(x-2)(x-4)(x-5) \geq 0$, $x=1$, $x \neq 4$, $x \neq 5$

Por el método de los valores críticos se determina que:



Luego: $B-A = [2, 3) \cup (5, +\infty) \cup \{1\} \rightarrow (B-A)' = (-\infty, 2) \cup [3, 5] - \{1\}$

EJEMPLO 4. Dado los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{-3} \sqrt{(3^x)^{\frac{1}{3}} - 2} \leq x+2 \sqrt{(9)^{\frac{1}{9}} x}\}$ y

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 2x} > x+4\}$; hallar: $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow x \in B\}$.

Solución. En A: $x^{-3} \sqrt{3^x \cdot 3^2} \leq x+2 \sqrt{(3^2)(3^{-2})^x} \leftrightarrow \frac{x+2}{3^{x-3}} \leq \frac{2-2x}{3^{\frac{x+3}{2}}}$
 $\leftrightarrow \frac{x+2}{x-3} \leq \frac{2-2x}{x+3} \leftrightarrow \frac{3(x^2-x+4)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$ (Caso 2: $b=3>1$)

Inecuación equivalente: $(x^2-x+4)(x+3)(x-3) \leq 0$, $x \neq -3$, $x \neq 3$ (1)

En el primer factor: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(4) = -15 < 0 \rightarrow x^2 - x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Luego, (1) se cumple si: $(x+3)(x-3) < 0 \leftrightarrow -3 < x < 3 \rightarrow A = (-3, 3)$

En B: $\sqrt{x^2 - 2x} > x+4$

$\rightarrow (x^2 - 2x > 0) \wedge [x+4 < 0 \vee (x+4 \geq 0 \wedge x^2 - 2x > (x+4)^2)]$ (T.45ii)

$\rightarrow x(x-2) > 0 \wedge [x < -4 \vee (x \geq -4 \wedge x < -8/5)]$

$\rightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 2) \wedge [x < -4 \vee (-4 \leq x < -8/5)]$

$\rightarrow [(x \leq 0 \vee x \geq 2) \wedge (x < -4)] \vee [(x \leq 0 \vee x \geq 2) \wedge (-4 \leq x < -8/5)]$

$\rightarrow [(x < -4)] \vee [(-4 \leq x < -8/5)] = (-\infty, -4) \cup [-4, -8/5) \rightarrow B = (-\infty, -8/5)$

Según la equivalencia lógica: $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, se tiene:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \cap B) \cup (A' \cap B') \equiv (A \cap B) \cup (A \cup B)'$$

$$A \cap B = (-3, 3) \cap (-\infty, -8/5) = (-3, -8/5)$$

$$A \cup B = (-3, 3) \cup (-\infty, -8/5) = (-\infty, 3) \rightarrow (A \cup B)' = [3, +\infty)$$

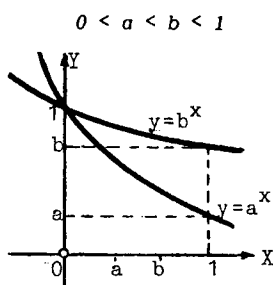
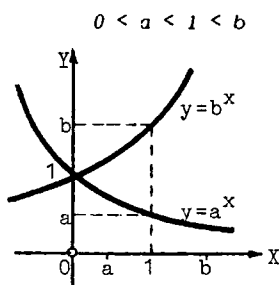
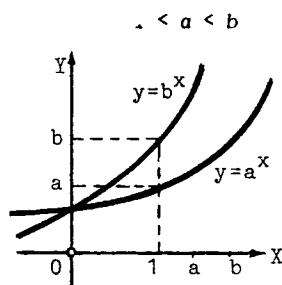
$$\therefore P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow x \in B\} = (-3, -8/5) \cup [3, +\infty)$$

EJEMPLO 5. Si $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \mid a < b$, resolver: $a^{x^2-1} < b^{x^2-1}$

Solución. Según las condiciones dadas, construyamos en un solo plano las gráficas de las funciones $y=a^x$, $y=b^x$.

Consideremos los siguientes casos:

$$0 < 1 < a < b \quad ; \quad 0 < a < 1 < b \quad ; \quad 0 < a < b < 1$$



$$i) x < 0 \rightarrow a^x > b^x$$

$$i) x < 0 \rightarrow a^x > b^x$$

$$i) x < 0 \rightarrow a^x > b^x$$

$$ii) x > 0 \rightarrow a^x < b^x$$

$$ii) x > 0 \rightarrow a^x < b^x$$

$$ii) x > 0 \rightarrow a^x < b^x$$

Obsérvese que en los tres casos considerados, en los que $a < b$, la desigualdad $a^x < b^x$ se cumple cuando $x > 0$; entonces, si:

$$a^{x^2-1} < b^{x^2-1} \rightarrow x^2-1 > 0 \rightarrow x^2 > 1 \leftrightarrow (x < -1) \vee (x > 1)$$

$$\therefore x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

EJERCICIOS: Grupo 46

Resolver las siguientes inecuaciones:

$$1. x+1\sqrt{(0.01)^{x-2}} \leq x+3\sqrt{(0.1)^{2x-3}}$$

$$4. x-2\sqrt{(0.008)^{x-1}} \geq x-1\sqrt{(0.04)^{x+3}}$$

$$2. \frac{(2^{2x-3})(2^{4-x})}{2^{5x-1}} < x+1\sqrt{2^{2x+3}}$$

$$5. x-5\sqrt{4^{x-4}} \geq x+1\sqrt{2^{2x}}$$

$$3. x+3\sqrt{(0.04)^{2x-1}} > x\sqrt{(0.2)^{2x-1}}$$

$$6. \left(\frac{2}{250}\right)^{x(1/5)^{4x^2+1}} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} \left(\frac{1}{625}\right)^{x^2-3x}$$

$$7. \text{Dados los conjuntos } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2-x-2} > x-1\} \text{ y } B = \{x \in \mathbb{R} \mid 25^{x-1} \leq \sqrt{(0.2)^{x+1}}\}$$

Hallar: $A \cap B$

$$8. \text{Dados los conjuntos } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-3}{x+1} \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4-81 \geq 0\}, C = \{x \in \mathbb{R} \mid$$

$$\frac{27^{x-2}}{9^{x+2}} \geq 81^x\}; \text{ hallar } (A \cap C) \cap B$$

$$9. \text{Dados los conjuntos: } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-5} \in [-2, 4)\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid (0.1)^{x-3} \leq 10^{x+3}\} \text{ y}$$

 $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+1} > \frac{x-2}{x+2}\}; \text{ hallar } (A-B) \cup (B \cap C).$

$$10. \text{Sean los conjuntos: } M = \{x \in \mathbb{R} \mid x+2\sqrt{81^{x+3}} > x-2\sqrt{9^{2x-1}}\} \text{ y}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2x+5} > x+1\}, \text{ hallar el conjunto: } P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

11. Sean los conjuntos: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \sqrt{(0.00032)^{x+2}} < x-3 \sqrt{(1/5)^{3x-1}}\}$ y $N = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|+2|x-1|-|2x-5| < 3\}$, hallar el conjunto $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in M \leftrightarrow x \in N\}$.

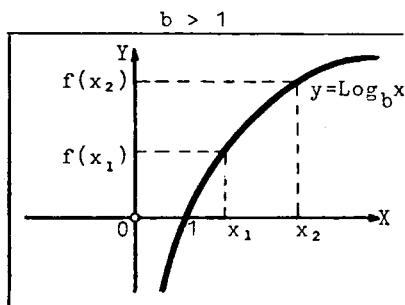
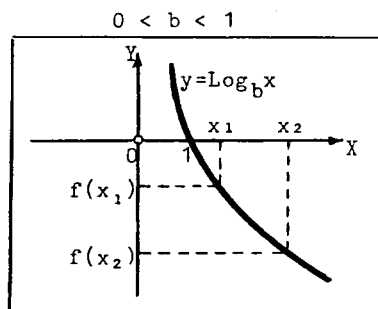


6.7 INECUACIONES LOGARÍTMICAS

Para una mayor comprensión en la resolución de inecuaciones logarítmicas es necesario remitirnos, en primer lugar, a la definición de logaritmos esto es:

$$\text{Log}_b N = x \leftrightarrow N = b^x$$

En segundo lugar, a la observación de la gráfica de la función $y = \text{Log}_b x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$, y al hecho importante de que en el campo de los números reales, solo tienen logaritmo los números positivos.



Los casos que se presentan son los siguientes:

Caso 1. Cuando $0 < b < 1$

En la gráfica de $y = \text{Log}_b x$ se observa que:

- (1) Los números mayores que 1 tienen logaritmo negativo ($y < 0$)
- (2) Los números entre 0 y 1 tienen logaritmo positivo ($y > 0$)

Entonces para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < b < 1 \text{ y } 0 < x_1 < x_2 &\leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) && (f \text{ es decreciente}) \\ &\leftrightarrow \text{Log}_b x_1 > \text{Log}_b x_2 \end{aligned}$$

de donde se deducen las siguientes relaciones:

a) Si $x > 0$, $0 < b < 1$ y $m \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Log}_b x > m \leftrightarrow 0 < x < b^m$

b) Si $x > 0$, $0 < b < 1$ y $m \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Log}_b x < m \leftrightarrow x > b^m$

Caso 2. Cuando la base $b > 1$

En la gráfica de $y = \log_b x$ se observa lo siguiente:

- (1) Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo ($y > 0$)
- (2) Los números entre 0 y 1 tienen logaritmo negativo ($y < 0$)

Entonces para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Si } b > 1 \text{ y } 0 < x_1 < x_2 &\leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) && (f \text{ es creciente}) \\ &\leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2 \end{aligned}$$

de donde podemos deducir las siguientes relaciones:

$$\text{a) Si } x > 0, b > 1 \text{ y } m \in \mathbb{R} \rightarrow \log_b x > m \leftrightarrow x > b^m$$

$$\text{b) Si } x > 0, b > 1 \text{ y } m \in \mathbb{R} \rightarrow \log_b x < m \leftrightarrow x < b^m$$

EJEMPLO 1. Resolver: $\log_3(2x-5) > 2$

Solución. Dado que $3 > 1$, entonces según el Caso 2a, se tiene:

$$\begin{aligned} \log_3(2x-5) > 2 &\leftrightarrow (2x-5 > 0) \wedge (2x-5 > 3^2) \\ &\leftrightarrow (x > 5/2) \wedge (x > 7) \leftrightarrow x \in (7, +\infty) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Resolver: $\log_3|3-4x| > 2$

Solución. En esta desigualdad se pueden tomar valores positivos y negativos para x , excepto $x=3/4$. Luego, según el Caso 2a:

$$\begin{aligned} \log_3|3-4x| > 2 &\leftrightarrow |3-4x| > 3^2 \wedge x \neq 3/4 \\ &\leftrightarrow |4x-3| > 9 \leftrightarrow 4x-3 > 9 \text{ o } 4x-4 < -9 \\ &\leftrightarrow x > 3 \text{ o } x < -3/2 \\ \therefore x \in (-\infty, -3/2) \cup (3, +\infty) &= \mathbb{R} - [-3/2, 3] \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver: $\log_{1/2}|2x-3| > -3$

Solución. Como $(1/2) \in (0, 1)$, tenemos el Caso 1a:

$$\rightarrow \log_{1/2}|2x-3| > -3 \leftrightarrow (x \neq 3/2) \wedge (0 < |2x-3| < (1/2)^{-3})$$

Dado que $|2x-3| > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{3/2\} \rightarrow (x \neq 3/2) \wedge |2x-3| < 2^3$

$$\leftrightarrow (x \neq 3/2) \wedge -8 < 2x-3 < 8$$

de donde obtenemos: $x \in (5/2, 11/2) - \{3/2\}$

EJEMPLO 4. Resolver: $\log_{1/3}|\log_4(x^2-5)| > 0$

Solución. Tenemos el Caso 1a, $(1/3) \in (0, 1)$

$$\rightarrow \log_{1/3}|\log_4(x^2-5)| > 0 \leftrightarrow 0 < \log_4(x^2-5) < (1/3)^0$$

$$\text{Si } \log_4(x^2-5) > 0 \leftrightarrow (x^2-5 > 0) \wedge (x^2-5 > 4^0) \quad (\text{Caso 2a})$$

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow (x^2-5 > 1) \leftrightarrow x^2 > 6 \leftrightarrow x < -\sqrt{6} \text{ o } x > \sqrt{6} \\ &\quad + S_1 = \langle -\infty, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, +\infty \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Si } \log_4(x^2-5) < 1 \leftrightarrow (x^2-5 > 0) \wedge (x^2-5 < 4^1) \leftrightarrow (x^2 > 5) \wedge (x^2 < 9)$$

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow (x > \sqrt{5} \vee x < -\sqrt{5}) \wedge (-3 < x < 3) \\ &\quad + S_2 = \langle -3, -\sqrt{5} \rangle \cup \langle \sqrt{5}, 3 \rangle \end{aligned}$$

$$\therefore C.S = S_1 \cap S_2 = \langle -3, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, 3 \rangle$$

EJEMPLO 5. Si $b > 1$, resolver: $\log_b x + \log_b(x+1) < \log_b(2x+6)$

$$\text{Solución. } \log_b x + \log_b(x+1) - \log_b(2x+6) < 0 \leftrightarrow \log_b\left(\frac{x(x+1)}{2x+6}\right) < 0$$

$$\text{Dado que } b > 1 \rightarrow \frac{x(x+1)}{2x+6} > 0 \wedge \frac{x(x+1)}{2x+6} < b^0 = 1 \quad (\text{Caso 2b})$$

$$\begin{aligned} &+ \underbrace{\frac{x(x+1)}{2x+6} > 0}_{(1)} \wedge \underbrace{\frac{(x-3)(x+2)}{2x+6} < 0}_{(2)} \end{aligned}$$

Por el método de los valores críticos se determina que:

$$S_1 = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle \text{ y } S_2 = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, 3 \rangle \quad (\text{Verificar})$$

$$\therefore C.S = S_1 \cap S_2 = \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 0, 3 \rangle$$

EJEMPLO 6. Si $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, resolver: $\sqrt{\log_x\left(\frac{x+3}{2x}\right)} < 1$

Solución. Siendo la base una variable, debemos considerar las siguientes condiciones iniciales:

a) Base positiva y diferente de 1: $x > 0$ y $x \neq 1$

b) Número o argumento positivo: $\frac{x+3}{2x} > 0 \leftrightarrow x < -3 \text{ o } x > 0$

Universo parcial de la variable: $U_1 = A \cap B = \langle 0, +\infty \rangle - \{1\}$

c) Además, por el radical: $\log_x\left(\frac{x+3}{2x}\right) \geq 0$

Caso 1. Si $0 < x < 1$ y $\log_x\left(\frac{x+3}{2x}\right) \geq 0 \rightarrow (0 < x < 1) \wedge (0 \leq \frac{x+3}{2x} < x^0)$

$$\rightarrow (0 < x < 1) \wedge (0 \leq \frac{x+3}{2x} < 1) = \emptyset \rightarrow S_1 = \emptyset$$

Caso 2. Si $x > 1$ y $\log_x\left(\frac{x+3}{2x}\right) \geq 0 \rightarrow (x > 1) \wedge (\frac{x+3}{2x} \geq x^0)$

$$\rightarrow (x > 1) \wedge (\frac{x+3}{2x} \leq 0) \rightarrow (x > 1) \wedge (0 < x \leq 3) \rightarrow S_2 = \langle 1, 3 \rangle$$

Universo parcial de la variable: $U_2 = S_1 \cup S_2 = \langle 1, 3 \rangle$

Universo de la inecuación: $U = U_1 \cap U_2 = \langle 1, 3 \rangle$

d) Ahora resolveremos la inecuación dada teniendo en cuenta que $x > 1$.

$$\log_x \left(\frac{x+3}{2x} \right) < 1 \rightarrow \log_x \left(\frac{x+3}{2x} \right) < 1 \leftrightarrow \frac{x+3}{2x} < x^1 \quad (\text{Caso 2b})$$

$$\leftrightarrow \frac{(2x-3)(x+1)}{2x} > 0 \leftrightarrow (-1 < x < 0 \vee x > 3/2)$$

Luego, si: $(x > 1) \wedge (-1 < x < 0 \vee x > 3/2) \rightarrow C.S. = \langle 3/2, 3 \rangle$

EJEMPLO 7. Hallar el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{\log_{2x-9}(x-4) - 1}$

Solución. La función es real $\leftrightarrow -1 + \log_{2x-9}(x-4) \geq 0 \leftrightarrow \log_{2x-9}(x-4) \geq 1$

Condiciones iniciales: (Cálculo del Universo)

a) Base positiva y diferente de 1: $(2x-9 > 0) \wedge (2x-9 \neq 1) \rightarrow A = \langle 9/2, +\infty \rangle - \{5\}$

b) Argumento positivo: $x-4 > 0 \rightarrow x > 4 \rightarrow B = \langle 4, +\infty \rangle$

Universo de la variable: $U = A \cap B = \langle 9/2, +\infty \rangle - \{5\}$

Caso 1. Si $0 < 2x-9 < 1$ y $\log_{2x-9}(x-4) \geq 1$

$$\leftrightarrow 9/2 < x < 5 \wedge (0 < x-4 \leq 2x-9)$$

$$\leftrightarrow 9/2 < x < 5 \wedge (x > 4 \wedge x \geq 5) = \emptyset \rightarrow S_1 = \emptyset$$

Caso 2. Si $2x-9 > 1$ y $\log_{2x-9}(x-4) \geq 1$

$$\leftrightarrow (x > 5) \wedge (x-4 \geq 2x-9) \leftrightarrow (x > 5) \wedge (x \leq 5) \rightarrow S_2 = \emptyset$$

$$\therefore \text{Dom}(f) = U \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$$

EJEMPLO 8. Resolver en $\mathbb{R}$: $\log_{|3x-2|}(|4x-8|-2) < 0$

Solución. Condiciones iniciales:

a) Siendo la base positiva $\forall x \in \mathbb{R} - \{2/3\} \rightarrow x \neq 2/3$

Además: $|3x-2| \neq 1 \leftrightarrow (x \neq 1) \vee (x \neq 1/3) \rightarrow A = \mathbb{R} - \{1/3, 2/3, 1\}$

b) $|4x-8|-2 > 0 \rightarrow |4x-8| > 2 \leftrightarrow x < 3/2$ o $x > 5/2$

$$\rightarrow B = \langle -\infty, 3/2 \rangle \cup \langle 5/2, +\infty \rangle$$

Universo de la variable: $U = A \cap B = \langle -\infty, 3/2 \rangle \cup \langle 5/2, +\infty \rangle - \{1/3, 2/3, 1\}$

Caso 1. Si $0 < |3x-2| < 1$ y $\log_{|3x-2|}(|4x-8|-2) < 0$

$$0 < |3x-2| < 1 \leftrightarrow (|3x-2| > 0) \wedge (|3x-2| < 1)$$

$$\leftrightarrow (x \neq 2/3) \wedge (-1 < 3x-2 < 1) = \langle 1/3, 1 \rangle - \{2/3\} \quad (1)$$

$$\log_{|3x-2|}(|4x-8|-2) < 0 \rightarrow |4x-8|-2 > |3x-2|^0 = 1$$

$$\rightarrow |4x-8| > 3 \leftrightarrow (4x-8 > 3) \vee (4x-8 < -3)$$

$$\leftrightarrow (x > 11/4) \vee (x < 5/4) \quad (2)$$

$$\therefore S = (1) \cap (2) = \langle 1/3, 1 \rangle - \{2/3\} = \langle 1/3, 2/3 \rangle \cup \langle 2/3, 1 \rangle$$

Caso 2. Si $|3x-2| > 1$ y $\log_{|3x-2|}(|4x-8|-2) < 0$

$$|3x-2| > 1 \leftrightarrow (3x-2 > 1) \quad (3x-2 < -1) \leftrightarrow (x < 1/3) \vee (x > 1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Log}_{|3x-2|}(|4x-8|-2) < 0 &\leftrightarrow |4x-8|-2 < |3x-2|^0 = 1 \\ &\leftrightarrow |4x-8| < 3 \leftrightarrow 5/4 < x < 11/4 \quad (4) \end{aligned}$$

Entonces: $S_2 = (3) \cap (4) = <5/4, 11/4>$

$$\therefore C.S = U \cap (S_1 \cup S_2) = <1/3, 2/3> \cup <2/3, 1> \cup <5/4, 3/2> \cup <5/2, 11/4>$$

EJEMPLO 9. Resolver: $\text{Log}_{|x|/4}(|x-1|-2) > 1/2$

Solución. Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \text{a) Base positiva y diferente de 1: } &(|x|/4 > 0) \wedge (|x|/4 \neq 1) \\ &+ (x \in \mathbb{R} - \{0\}) \wedge (x \neq 4 \text{ o } x \neq -4) \quad + \quad A = \mathbb{R} - \{-4, 0, 4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Argumento positivo: } &|x-1|-2 > 0 \quad + \quad |x-1| > 2 \leftrightarrow (x-1 > 2) \vee (x-1 < -2) \\ &\leftrightarrow (x > 3) \vee (x < -1) \quad + \quad B = <-\infty, -1> \cup <3, +\infty> \end{aligned}$$

Universo de la variable: $U = A \cap B = <-\infty, -4> \cup <-4, -1> \cup <3, 4> \cup <4, +\infty>$

Caso 1. $0 < |x|/4 < 1$ y $\text{Log}_{|x|/4}(|x-1|-2) > \frac{1}{2}$

$$(1) \quad 0 < |x| < 4 \leftrightarrow (x \neq 0) \wedge (-4 < x < 4) \quad + \quad S_1 = <-4, 4> - \{0\}$$

$$(2) \quad \text{Log}_{|x|/4}(|x-1|-2) > 1/2 \leftrightarrow 0 < |x-1|-2 < \left(\frac{|x|}{4}\right)^{1/2}$$

$$\text{Como por condición inicial: } |x-1|-2 > 0 \rightarrow |x-1|-2 < \frac{\sqrt{|x|}}{2}$$

$$\text{Elevando al cuadrado obtenemos: } 4(x-1)^2 - 16|x-1| + 16 < |x|$$

Por el método de los valores críticos se determina que:

$$S_2 = <-\frac{1}{8}(9+\sqrt{17}), \frac{1}{8}(-9+\sqrt{17})> \cup <\frac{9}{4}, 4> \quad (\text{Verificar})$$

$$\text{Luego, } C = S_1 \cap S_2 = S_2$$

Caso 2. Si $|x|/4 > 1$ y $\text{Log}_{|x|/4}(|x-1|-2) > 1/2$

$$(3) \quad \text{Si } |x| > 4 \leftrightarrow x < -4 \text{ o } x > 4 \quad + \quad S_3 = <-\infty, -4> \cup <4, +\infty> \quad (\text{Compl. de } S_1)$$

$$(4) \quad \text{Log}_{|x|/4}(|x-1|-2) > \frac{1}{2} \quad + \quad |x-1|-2 > \left(\frac{|x|}{4}\right)^{1/2} \quad + \quad |x-1|-2 > \sqrt{|x|}/2$$

$$\text{Elevando al cuadrado se tiene: } 4(x-1)^2 - 16|x-1| + 16 > |x|$$

cuya solución es el complemento de S_2 .

$$+ S_4 = <-\infty, -\frac{1}{8}(9+\sqrt{17})> \cup <\frac{1}{8}(-9+\sqrt{17}), \frac{9}{4}> \cup <4, +\infty>$$

$$\text{Entonces: } D = S_3 \cap S_4 = S_3 = <-\infty, -4> \cup <4, +\infty>$$

$$\therefore C.S = U \cap (C \cup D) = <-\infty, -4> \cup <-\frac{1}{8}(9+\sqrt{17}), -1> \cup <3, 4> \cup <4, +\infty>$$

EJEMPLO 10. Resolver: $\text{Log}_{2x}[\text{Log}_x(2x+3)] > 0$

Solución. Condiciones iniciales:

$$\begin{array}{l|l} \text{a) Bases positivas y diferentes de 1: } 2x > 0 \rightarrow x > 0 & x > 0 \\ 2x \neq 1 \rightarrow x \neq 1/2 & x \neq 1 \end{array}$$

$$\text{Luego: } A = \langle 0, +\infty \rangle - \{1/2, 1\}$$

b) Argumentos positivos: $2x+3 > 0 \rightarrow x > -3/2$

$$\log_x(2x+3) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{i) Si } 0 < x < 1 &\rightarrow 0 < 2x+3 < x^0 \leftrightarrow -3/2 < x < -1 \\ &\quad + (0 < x < 1) \wedge (-3/2 < x < 1) = \emptyset \end{aligned}$$

$$\text{ii) Si } x > 1 \rightarrow 2x+3 > x^0 \rightarrow x > -1$$

$$\text{Luego: } (x > 1) \wedge (x > -1) = x > 1 \rightarrow B = \langle 1, +\infty \rangle$$

$$\text{Universo de la variable: } U = A \cap B = \langle 1, +\infty \rangle$$

Análisis de los casos: $0 < b < 1$ y $b > 1$

Dado que el universo de la variable es $x > 1$, debemos aplicar el Caso 2a, esto es, si $x > 1 \rightarrow 2x > 2$, luego, para que: $\log_{2x}[\log_x(2x+3)] > 0$, se debe cumplir que: $\log_x(2x+3) > 1 \leftrightarrow 2x+3 > x^1 \leftrightarrow x > -3$

$$\therefore C.S = U \cap (x > -3) = \langle 1, +\infty \rangle$$

EJEMPLO 11. Resolver: $\log_{\cos(\frac{\pi-4x}{8})}(\cos\frac{\pi}{4} + \cos x) < 1$

Solución. I) Condiciones iniciales:

a) Base positiva y diferente de 1:

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi-4x}{8}) > 0 &\leftrightarrow \cos(\frac{4x-\pi}{8}) > 0 \leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{4x-\pi}{8} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\leftrightarrow -\frac{3}{4}\pi + 4k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 4k\pi \end{aligned} \quad (1)$$

$$\cos(\frac{4x-\pi}{8}) \neq 1 \leftrightarrow \frac{4x-\pi}{8} \neq 2k\pi \leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + 4k\pi \quad (2)$$

b) Argumento positivo: $\cos\frac{\pi}{4} + \cos x > 0$

$$\rightarrow \cos x > -\sqrt{2}/2 \leftrightarrow -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad (3)$$

$$\text{Universo de la variable: } U = (1) \cap (2) \cap (3)$$

$$\rightarrow U = \langle -\frac{3}{4}\pi + 4k\pi, \frac{3}{4}\pi + 4k\pi \rangle - \{\frac{\pi}{4} + 4k\pi\}$$

II) Análisis de los casos: $0 < b < 1$ y $b > 1$

Como la base está entre 0 y 1, aplicaremos el Caso 1b:

$$\begin{aligned} 0 < \cos(\frac{\pi-4x}{8}) < 1 &\leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4} + \cos x > \cos(\frac{\pi-4x}{8}) \\ &\leftrightarrow 2\cos(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}) > \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

$$\text{de donde: } \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) > \frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\rightarrow S_1 = \left(-\frac{11}{12}\pi + 4k\pi, \frac{5\pi}{12} + 4k\pi\right)$$

$$\therefore C.S = U \cap S_1 = \left(-\frac{3}{4}\pi + 4k\pi, \frac{5\pi}{12} + 4k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{4} + 4k\pi\right\}$$

EJEMPLO 12. Resolver: $\log_{\text{Tgx}}(\text{Sen}x + 1/2) < 0$, $x \in [0, 4\pi]$

Solución. I) Condiciones Iniciales:

a) Base positiva y diferente de 1

$$\text{Tgx} > 0 \leftrightarrow (2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \quad (\pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), \quad k=0,1 \quad (1)$$

$$\text{Tgx} \neq 1 \leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k=0,1,2,3 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \quad (2)$$

b) Número o argumento positivo:

$$\text{Sen}x + \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \text{Sen}x > -\frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k=0,1 \quad (3)$$

$$U = (1) \cap (2) \cap (3) = (2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi) - \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right\}$$

$$k = 0,1$$

II) Análisis de los casos: $0 < b < 1$ y $b > 1$

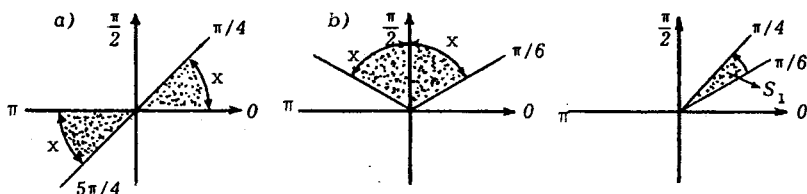
Caso 1b. Si $0 < \text{Tgx} < 1 \rightarrow \text{Sen}x + 1/2 > (\text{Tgx})^0 = 1$

$$a) 0 < \text{Tgx} < 1 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right\} \quad k = 0,1$$

$$b) \text{Sen}x + \frac{1}{2} > 1 \rightarrow \text{Sen}x > \frac{1}{2}$$

$$\leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0,1$$

$$S_1 = (a) \cap (b) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0,1$$

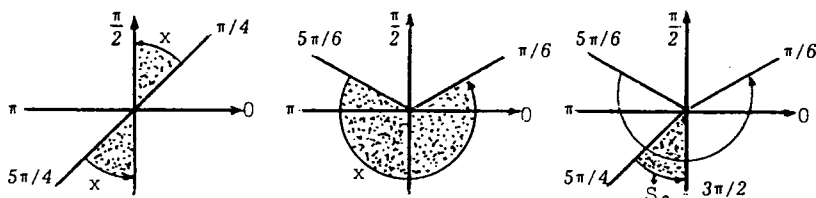


Caso 2b. Si $\text{Tan}x > 1 \rightarrow \text{Sen}x + \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{Sen}x < \frac{1}{2}$

$$a) \text{Tan}x > 1 \leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k=0,1$$

$$b) \text{Sen}x < 1/2 \leftrightarrow (2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi), \quad k=0,1$$

$$\rightarrow S_2 = (a) \cap (b) = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1$$



$$\therefore C.S = U \cap (S_1 \cup S_2) = S_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k=0, 1$$

EJEMPLO 13. Dado $a > 0$, $a \neq 1$, se define:

$$Lg_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid Lg_a(x) = \begin{cases} \log_a x & , \text{ si } \log_a x \geq 0 \\ \log_a (1/x) & , \text{ si } \log_a x < 0 \end{cases}$$

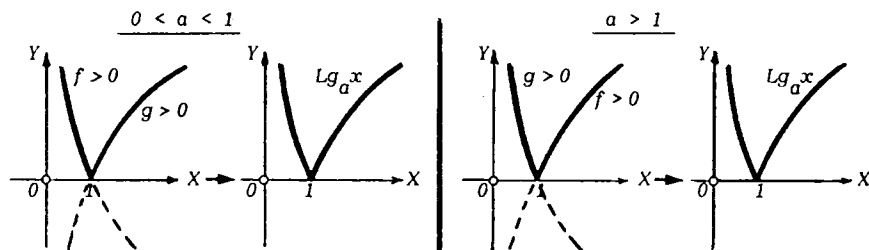
i) En base a la gráfica de logaritmos deducir la gráfica de $Lg_a(x)$.

ii) Resolver: $Lg_g(x^2 - 2x) < 1/2$

Solución. i) Sean: $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_a (1/x) = -\log_a x$

$$\text{Graf}[Lg_a(x)] = \text{Graf}[f(x)] \cup \text{Graf}[g(x)]$$

Tracemos las gráficas de f y g considerando los casos: $0 < a < 1$ y $a > 1$



La gráfica de $Lg_a x$ se deduce así:

Cuando el argumento es $x \in (0, 1)$, se utiliza la gráfica de $f(x) = \log_a x$

Si el argumento es $x \in (1, +\infty)$, se usa la gráfica de $g(x) = -\log_a x$.

En este caso, si el argumento es $x \in (0, 1)$ se utiliza la gráfica de $g(x) = -\log_a x$, y cuando $x \in (1, +\infty)$ se usa la gráfica de $f(x) = \log_a x$.

ii) $Lg_g(x^2 - 2x) < 1/2$. Dado que $a=9$ ($a > 1$), utilizaremos el segundo caso:

a) Si el argumento es: $0 < x^2 - 2x < 1$, y $-\log_9(x^2 - 2x) < 1/2$

$$\rightarrow (x^2 - 2x > 0) \wedge (x^2 - 2x < 1) \wedge [\log_9(x^2 - 2x) > -1/2]$$

$$\begin{aligned}
 &+ [(x-1)^2 > 1 \wedge (x-1)^2 < 2] \wedge (x^2-2x > 9^{-1/2}) \\
 &+ [(1-\sqrt{2} < x < 0) \vee (2 < x < 1+\sqrt{2})] \wedge (x < 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}) \\
 &\rightarrow S_1 = \langle 2, 1+\sqrt{2} \rangle
 \end{aligned}$$

b) Argumento: $x^2-2x > 1$ y $\text{Log}_9(x^2-2x) > 1/2$

$$\begin{aligned}
 &+ [(x-1)^2 > 2] \wedge (x^2-2x < 9^{1/2}) \\
 &+ [(x < 1-\sqrt{2}) \vee (x > 1+\sqrt{2})] \wedge (-1 < x < 3) \rightarrow S_2 = \langle -1, 1-\sqrt{2} \rangle \cup \langle 1+\sqrt{2}, 3 \rangle \\
 &\therefore C.S = S_1 \cup S_2 = \langle -1, 1-\sqrt{2} \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle - \{1+\sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 14. Resolver: $\text{Log} \left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right]^{|x-2\pi|} \geq \frac{\text{Log}|x-1| \text{ Sen} x}{\text{Log}|x-1| \left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right]}$

Solución. Según la propiedad L.11 (Cambio de base), se tiene:

$$\text{Log} \left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right]^{|x-2\pi|} \geq \text{Log} \left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right]^{\text{Sen} x} \quad (1)$$

I) Condiciones Iniciales:

$$\text{a) Base positiva y diferente de 1: } \left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right] > 0 \leftrightarrow \frac{|x|}{2} + 1 \geq 0+1$$

$$\leftrightarrow |x| \geq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right] \neq 1 \leftrightarrow \left[\left[\frac{|x|}{2} \right] \right] + 1 \neq 1 \leftrightarrow \left[\left[\frac{|x|}{2} \right] \right] \neq 0$$

$$\leftrightarrow 0 \neq \frac{|x|}{2} \neq 1 \rightarrow \frac{|x|}{2} < 0 \text{ o } \frac{|x|}{2} \geq 1$$

$$\leftrightarrow (\emptyset) \text{ o } (|x| \geq 2) \leftrightarrow x \leq -2 \text{ o } x \geq 2 \quad (3)$$

$$|x-1| > 0 \rightarrow x \neq 1 \quad (4)$$

$$|x-1| \neq 1 \leftrightarrow x \neq 0 \text{ o } x \neq 2 \quad (5)$$

b) Argumentos positivos: $|x-2\pi| > 0 \leftrightarrow x \neq 2\pi$

$$\text{Sen} x > 0 \leftrightarrow 2k\pi < x < \pi+2k\pi \quad (6)$$

Entonces: $U = (2) \cap (3) \cap (4) \cap (5) \cap (6)$

$$U = \langle -2, \pi \rangle \cup \langle 2k\pi, \pi+2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

II) Análisis de los casos: $0 < b < 1$ y $b > 1$

$$\text{Sabemos que } |x| \geq 2 \rightarrow \frac{|x|}{2} + 1 \geq 2 \rightarrow \left[\left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] \right] \geq 2 \quad (b>1)$$

Luego, en (1): $|x-2\pi| \geq \text{Sen} x \leftrightarrow x-2\pi \geq \text{Sen} x \text{ o } x-2\pi \leq -\text{Sen} x$

Sean las funciones: $f(x)=x-2\pi$, $g(x)=\text{Sen} x$, $h(x)=-\text{Sen} x$

Tracemos las gráficas de cada una de estas funciones en un mismo plano:

En la figura podemos observar que: $f \geq g$ para $x \in [2\pi, +\infty)$

$$+ x-2\pi \geq \text{Sen} x \leftrightarrow x \geq 2\pi \quad (7)$$

$$f < h, \text{ para } x \in (-\infty, 2\pi]$$

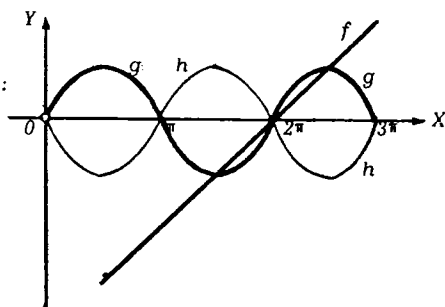
$$+ x - 2\pi < -\text{Sen}x \leftrightarrow x < 2\pi \quad (8)$$

Luego, de (7) y (8) se determina que:

$$|x - 2\pi| > \text{Sen}x, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow S_1 = \mathbb{R}$$

$$\text{Entonces: } C.S = U \cap S_1 = U$$

$$\therefore C.S = \langle 2, \pi \rangle \cup \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$



EJEMPLO 15. Graficar el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$R = \{(x, y) \mid \text{Log}_{x^2 - y^2}(x^2 + y^2) \geq 0\}.$$

Solución. I) Condiciones iniciales: (Gráfica del universo)

a) Base positiva y diferente de 1:

$$x^2 - y^2 > 0 \rightarrow x^2 > y^2$$

$$\leftrightarrow x > y \text{ o } x < -y \leftrightarrow y < x \text{ o } y < -x$$

Es el conjunto de puntos en el semiplano inferior de las rectas $y = x$, $y = -x$

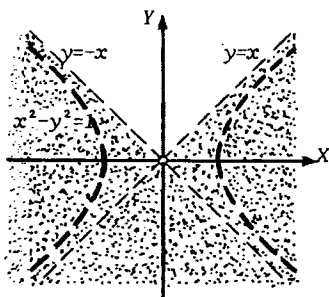
$$x^2 - y^2 \neq 1 \leftrightarrow x^2 - y^2 < 1 \text{ o } x^2 - y^2 > 1$$

Es el conjunto: $\mathbb{R}^2 - \{x^2 - y^2 = 1\}$.

b) Argumento positivo: $x^2 + y^2 > 0$

Es el conjunto $\mathbb{R}^2$, la gráfica es simétrica respecto de los ejes X e Y .

$$\therefore U = (y < x \text{ o } y < -x) \cap (\mathbb{R}^2 - \{x^2 - y^2 = 1\})$$



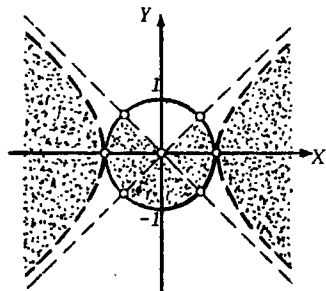
II) Análisis de los casos: $0 < b < 1$ y $b > 1$, para $\text{Log}_{x^2 - y^2}(x^2 + y^2) \geq 0$

$$a) 0 < x^2 - y^2 < 1 \rightarrow 0 < x^2 + y^2 \leq (x^2 + y^2)^0 = 1$$

$$+ (x^2 - y^2 > 0 \wedge x^2 + y^2 < 1) \wedge (x^2 + y^2 > 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1)$$

$$R_1 = (y < x \vee y < -x) \wedge (x^2 - y^2 < 1) \wedge (x^2 + y^2 \leq 1)$$

R_1 es el conjunto de puntos comprendido entre los semiplanos inferiores de las rectas $y = x$, $y = -x$, la parte exterior de las dos ramas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$



$$b) x^2 - y^2 > 1 \rightarrow x^2 + y^2 \geq (x^2 - y^2)^0 = 1$$

$$R_2 = (x^2 - y^2 > 1) \wedge (x^2 + y^2 \geq 1)$$

Luego, R_2 es el conjunto de puntos ubicados en el interior de las ramas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y en el exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

$$\therefore \text{Graf}(R) = \text{Graf}(U) \cap [\text{Graf}(R_1) \cup \text{Graf}(R_2)]$$

EJEMPLO 16. Graficar: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \log_{x^2+y} (x^2 - y^2) < 1\}$.

Solución. 1) Condiciones Iniciales (Gráfica del Universo)

a) Base positiva y diferente de 1:

$$x^2 + y > 0 \iff y > -x^2$$

Conjunto de puntos en el semiplano exterior de la parábola $y = -x^2$.

$$x^2 + y \neq 1 \rightarrow y \neq 1 - x^2$$

$$\rightarrow y < 1 - x^2 \text{ o } y > 1 - x^2$$

Conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$, excepto en $y = 1 - x^2$

b) Argumento positivo:

$$x^2 - y^2 > 0 \rightarrow x^2 > y^2$$

$$\rightarrow x > y \text{ o } x < -y \iff y < x \text{ o } y < -x$$

Conjunto de puntos en los semiplanos inferiores de las

rectas: $y = x$ o $y = -x$

$$\therefore U = (y > -x^2) \cap (y \neq 1 - x^2) \cap (y < x \text{ o } y < -x)$$

II) Análisis de los casos: $0 < b < 1$ y $b > 1$, y $\log_{x^2+y} (x^2 - y^2) < 1$

a) Si $0 < x^2 + y < 1$ y $x^2 - y^2 > (x^2 + y)^1$

$$\rightarrow (x^2 + y > 0 \wedge x^2 + y < 1) \wedge (x^2 - y^2 > x^2 + y)$$

$$\rightarrow (y > -x^2 \wedge y < 1 - x^2) \wedge (y^2 + y < 0)$$

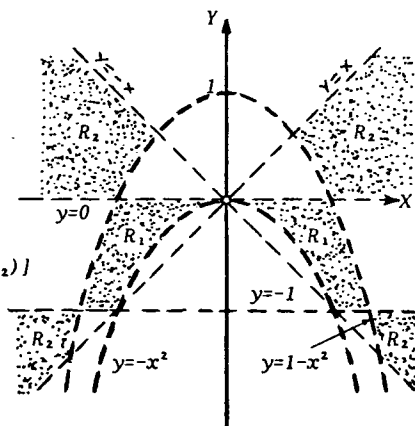
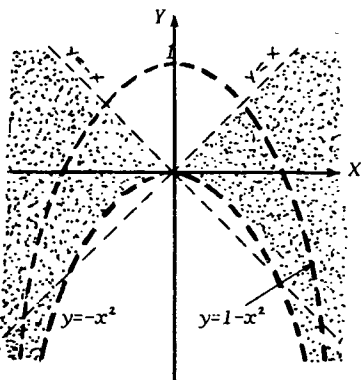
$$\rightarrow R_1 = (y > -x^2 \wedge y < 1 - x^2) \wedge (-1 < y < 0)$$

b) Si $x^2 + y > 1$ y $x^2 - y^2 < (x^2 + y)^1$

$$\rightarrow (y > 1 - x^2) \wedge (y^2 + y > 0)$$

$$R_2 = (y > 1 - x^2) \wedge (y > 0 \text{ o } y < -1)$$

$$\therefore \text{Graf}(R) = \text{Graf}(U) \cap [\text{Graf}(R_1) \cup \text{Graf}(R_2)]$$



EJERCICIOS: Grupo 47

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $\log_{1/3}(2x+6) < -2$

10. $\log_x \left(\frac{x+3}{x-1} \right) > 1$

2. $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

11. $\sqrt{\log_x \left(\frac{5-3x}{x+1} \right)} < 1$

3. $\log_3(3x+4) - \log_3(2x-1) > 1$

12. $\log_{\tan x}(x^2-x-5) > 0$

4. $\log_2|3-4x| > 3$

13. $\log_{1/3} \sqrt{\frac{x-4}{x-6}} < -1$

5. $\log_{1/3}|2x-3| > -1$

14. $\log_{1/3}(x^2-4x+3) \geq -1$

6. $\log_2(|x-2|-1) > 1$

15. $\log_{1/3}[\log_4(x^2-5)] > 0$

7. $\log_2\left(\left|\frac{x-2}{x-5}\right| + 7\right) > 3$

16. $\log_x \left(\frac{4x-5}{|x-2|} \right) \geq 1$

8. $\log_5(x - 3\sqrt{x+1} + 3) < 1$

17. $\log \sqrt{\frac{3-2x}{x+1}} \geq 0$

9. $\log_{0.5}(x^2-x-3/4) > 2 - \log_2 5$

18. $\log_{2x-9}(\lfloor x \rfloor - 2x - 6) \geq 1$

19. Dado los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge \lfloor \frac{x}{x} \rfloor = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq \frac{1}{x} \cup A\}$.

Si $x \in B - \{1\}$, resolver $\log_x(x+1/2) > 0$.

20. Resolver: $\sqrt{\log_a \left(\frac{3-2x}{1-x} \right)} < 1$, si $a > 1$

21. Resolver: $\log \left[\frac{|x|}{2} + 1 \right] |x-2\pi| \geq \frac{\log|x-1|(x^2-2\pi)}{\log|x-1| \left[\frac{|x|}{2} + 1 \right]}$

22. Considerando que $\cos(x/2) > 0$ y $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0$, graficar el lugar geométrico de los puntos tales que: $\log_{\frac{x+y}{\pi}}(1+\sin x + \cos x) < \log_{\frac{x+y}{\pi}}(2\sqrt{2})$

23. Graficar: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \log_{\tan x} \left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right) | \log_{\sin x}(y) | > 0\}$

Construir la gráfica de las siguientes relaciones:

24. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \log_{x^2-y}(|x|+2|y|) \geq 1\}$

26. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \log_{x^2-y^2}(x^2+2x-y) > 0\}$

25. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \log_{x-xy+1}(x+2y) > 1\}$

27. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \log_{x+y^2}(2x-y) < 1\}$

28. Si $f(x) = 4x^2 - 9y^2 - 36$ y $g(x) = \frac{1}{16}(x^2 + y^2 - 9)$, graficar: $\log_{f(x)}g(x) \geq 0$

CAPITULO 7

INDUCCION MATEMATICA

7.1 INTRODUCCION

Uno de los métodos de demostración de más importancia en Matemática es el llamado de *inducción completa o matemática*, que se utiliza generalmente para demostrar por recurrencia la validez de proposiciones abiertas cuantificadas universalmente y con dominio, de la variable n , en el conjunto de los números naturales (N) o el conjunto de los números enteros positivos (Z^+). A continuación enunciaremos los principios en los que se basa fundamentalmente el método de inducción matemática.

7.2 PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN

Todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo

Esto es, si $A \subset N$ y $A \neq \emptyset \rightarrow \exists! a \in A \mid \forall x \in A, a \leq x$

Ejemplos: (1) Si $A = \{x \in N \mid x \text{ es par}\}$. Entonces, el elemento mínimo o primer elemento es $a=2$, porque $\forall x \in A, 2 \leq x$.

(2) Si $B = \{4, 9, 16, \dots\} \rightarrow a=4$ es el elemento mínimo porque $\forall x \in B, 4 \leq x$.

TEOREMA 7.1. Si S es un subconjunto de N que satisface:

i) $1 \in S$

ii) Si $h \in S \rightarrow (h+1) \in S$

Entonces S es el conjunto de los números naturales ($S=N$).

Es decir: "Todo subconjunto de N que incluye al 1, y al siguiente de h , siempre que incluya al h , es igual al N ".

Demostración. (Prueba del absurdo)

Hipótesis: $S \subset N$, i) $1 \in S$

ii) $h \in S \rightarrow (h+1) \in S$

Tesis: $S = N$

En efecto:

- (1) Supongamos que la tesis no es verdadera, es decir, $S \neq N$
- (2) Entonces: $\exists T \subset N | T = N - S$ y $T \neq \emptyset$
- (3) Por el principio del buen orden T contiene un elemento mínimo m , tal que $m \neq 1$ ($1 \in S$ por hipótesis).
- (4) Siendo m natural, se tiene: $m > 1 \rightarrow m-1 > 0$
- (5) Como $m-1 < m$, por ser m el mínimo de $T \rightarrow (m-1) \in S$
- (6) Según la hipótesis ii): $(m-1) \in S \rightarrow [(m-1)+1] \in S \rightarrow m \in S$
- (7) Entonces: $m \notin T$
- (8) Por (3) $m \in T$ y por (7), $m \notin T$ lo cual es una contradicción.
- (9) Luego, $T = \emptyset$ y $N \subset S$, y como por hipótesis $S \subset N$, resulta que $S = N$
(La que habíamos supuesto falsa es correcta).

7.3 PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

TEOREMA 7.2 Sea $P(n)$ una función proposicional que contiene a la variable $n \in N$ y que tiene la propiedad de que $P(n)$ es cierta o falsa, pero no ambas, para cada $n \in N$. Si $P(n)$ satisface las dos condiciones:

i) $P(1)$ es verdadera

ii) Si de la verdad de $P(h)$ se deduce la verdad de $P(h+1)$

entonces, $P(n)$ es verdadera $\forall n \in N$.

Demostración. En efecto, el subconjunto S de números naturales para los cuales $P(n)$ es verdadera, contiene al 1, y al siguiente de h siempre que contenga a h . Luego, por el Teorema 7.1, $S = N$. Esto es, $P(n)$ es verdadera $\forall n \in N$.

Observación. Una demostración por inducción completa consiste de las 3 partes siguientes:

Parte 1. Verificación de la variable proposicional para el menor valor de n para el cual el teorema es válido.

Parte 2. Demostración de la propiedad inductiva. Si la función proposicional vale para $n=h$, donde h designa un valor cualquiera de n , entonces vale para $n=h+1$.

Parte 3. Conclusión: La función proposicional vale para todo valor de n

igual o mayor que aquel para el cual se verificó en la parte 1.

EJEMPLO 1. Demostrar que n^3+2n es divisible por 3, es decir, 3 es un factor de n^3+2n .

Demostración. Sea $P(n)=n^3+2n$.

(1) Si $n=1 \rightarrow P(1)=(1)^3+2(1)=3$, es divisible por 3.

Luego, $P(1)$ es verdadera.

(2) Para $n=h \in \mathbb{N}$, supongamos que: $P(h)=h^3+2h$ es divisible por 3, o sea, $P(h)$ es verdadera. (Hipótesis inductiva)

Debemos probar que para $n=h+1$, la función proposicional:

$P(h+1)=(h+1)^3+2(h+1)$ es divisible por 3.

En efecto:

$$P(h+1) = h^3+3h^2+3h+1+2h+2 = (h^3+2h) + 3(h^2+h+1)$$

Aquí los dos sumandos entre paréntesis son divisibles por 3, el primero por hipótesis inductiva y el segundo por contener como factor el 3. Esto es:

$$P(h+1) = (3m)+3(h^2+h+1) = 3(m+h^2+h+1)$$

Luego, $P(h+1)$ es divisible por 3, o sea $P(h+1)$ es verdadera.

(3) Conclusión. Se ha demostrado que:

$$P(1) \text{ es } V \wedge P(h) \text{ es } V \rightarrow P(h+1) \text{ es } V$$

EJEMPLO 2. Demostrar que: $10^n+3(4^{n+2})+5$ es divisible por 9.

Demostración. Sea $P(n) = \{n \in \mathbb{N} | 10^n+3(4^{n+2})+5 \text{ es divisible por } 9\}$

(1) Si $n=1 \rightarrow P(1)=10+3(4^3)+5=207$, es divisible por 9

Luego $P(1)$ es verdadera.

(2) Para $n=h \in \mathbb{N}$, supongamos que $P(h)=10^h+3(4^{h+2})+5$ es divisible por 9, es decir, $P(h)$ es verdadera (Hipótesis inductiva)

Debemos probar que para $n=h+1$, la proposición:

$$P(h+1) = 10^{h+1}+3(4^{h+3})+5 \text{ es divisible por } 9$$

En efecto: $P(h+1) = 10 \cdot 10^h+3(4 \cdot 4^{h+2})+5 = 10 \cdot 10^h+12(4^{h+2})+5$

$$+ P(h+1) = (9 \cdot 10^h+10^h) + (9 \cdot 4^{h+2}+3 \cdot 4^{h+2}) + 5$$

$$= 9(10^h+4^{h+2}) + (10^h+3 \cdot 4^{h+2}+5)$$

Las sumas entre paréntesis son divisibles por 9, la primera por tener a 9 como factor y la segunda por hipótesis inductiva.

$$+ P(h+1) = 9(10^h+4^{h+2}) + (m9) = 9(10^h+4^{h+2}+m)$$

Luego, $P(h+1)$ es divisible por 9, o sea $P(h+1)$ es verdadera.

(3) Conclusión. Se ha demostrado que: $P(1)$ es $V \wedge P(h)$ es $V \rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 3. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}: 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ tiene como factor al número 7.

Demostración. Sea $P(n) = \{n \in \mathbb{N} | 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7\}$ (7 significa múltiplo de 7)

(1) Si $n=1 \rightarrow P(1) = 3^4 - 2^2 = 77 = 7$, es verdadera

(2) Para $n=h$, supongamos que $P(h) = 3^{2h+2} - 2^{h+1} = 7$, es verdadera.

Probaremos que para $n=h+1$, $P(h+1) = 3^{2h+4} - 2^{h+2} = 7$

En efecto, $P(h+1) = 3^{2h+2} \cdot 3^2 - 2^{h+1} \cdot 2$

Sumando y restando $2^{h+1} \cdot 3^2$ a $P(h+1)$, se tiene:

$$\begin{aligned} P(h+1) &= 3^{2h+2} \cdot 3^2 - 2^{h+1} \cdot 3^2 + 2^{h+1} \cdot 3^2 - 2^{h+1} \cdot 2 = 9(3^{2h+2} - 2^{h+1}) + 2^{h+1}(9-2) \\ &= 9\left(\frac{0}{7}\right) + 7 \cdot 2^{h+1} \quad (\text{Hipótesis inductiva}) \\ &= 9(m7) + 7 \cdot 2^{h+1} = 7(9m + 2^{h+1}) \end{aligned}$$

Luego, $P(h+1)$ tiene como factor 7, es decir, $P(h+1)$ es verdadera.

(3) Conclusión: Se ha probado que $P(1)$ es $V \wedge P(h)$ es $V \rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 4. Demostrar que: $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x+y$.

Demostración. Sea $P(n) = \{n \in \mathbb{N} | x^{2n-1} + y^{2n-1} \text{ es divisible por } x+y\}$

(1) Si $n=1 \rightarrow P(1) = x+y$, luego $P(1)$ es verdadera.

(2) Para $n=h$, supongamos que: $P(h) = x^{2h-1} + y^{2h-1}$ es divisible por $x+y$

Probaremos que para $n=h+1$, $P(h+1) = x^{2(h+1)-1} + y^{2(h+1)-1}$ es divisible por $x+y$.

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } P(h+1) &= x^{2h+1} + y^{2h+1} = x^{2h-1} \cdot x^2 + y^{2h-1} \cdot y^2 \\ &= x^{2h-1} \cdot x^2 - x^{2h-1} \cdot y^2 + x^{2h-1} \cdot y^2 + y^{2h-1} \cdot y^2 \\ &= x^{2h+1} (x^2 - y^2) + y^2 (x^{2h-1} + y^{2h-1}) \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis inductiva: $x^{2h-1} + y^{2h-1} = m(x+y)$

$$\text{Entonces: } P(h+1) = x^{2h+1} (x+y)(x-y) + y^2 [m(x+y)] = (x+y) [x^{2h+1} (x-y) + my^2]$$

Luego, $P(h+1)$ es divisible por $x+y \rightarrow P(h+1)$ es verdadera

(3) Conclusión: Se ha probado que $P(1)$ es $V \wedge P(h)$ es $V \rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 5. Demostrar por inducción que la proposición dada es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Demostración. Sea $P(n) = \{n \in \mathbb{N} \mid 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)\}$

(1) Si $n=1 \rightarrow P(1): (2-1)^3 = (1)^2(2-1) \rightarrow 1=1 \rightarrow P(1)$ es V

(2) Para $n=h \in \mathbb{N}$, supongamos que la proposición:

$P(h): 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2h-1)^3 = h^2(2h^2-1)$ es verdadera. (Hip. Ind.)

Debemos probar que para $n=h+1$, la proposición:

$P(h+1): 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2h-1)^3 + (2h+1)^3 = (h+1)^2[2(h+1)^2-1]$ es cierta

En efecto, sumando el término $h+1$ a cada lado de $P(h)$ se tiene:

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2h-1)^3 + (2h+1)^3 &= h^2(2h^2-1) + (2h+1)^3 \\ &= (h+1)^2(2h^2+4h+1) = (h+1)^2[2(h+1)^2-1] \end{aligned}$$

que es precisamente la proposición $P(n)$ para $n=h+1$; luego, queda demostrado la parte (2).

(3) Conclusión: Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 6. Demostrar por inducción que:

$$3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+ \dots + n \times 3^n = \frac{1}{4}[(2n-1)3^{n+1}+3], \quad \forall n \geq 1 \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea $P(n) = \{n \in \mathbb{N} \mid 3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+ \dots + n \times 3^n = \frac{1}{4}[(2n-1)3^{n+1}+3]\}$

(1) Si $n=1 \rightarrow P(1): (1) \times 3^1 = \frac{1}{4}[(2-1)3^2+3] \rightarrow 3=3 \rightarrow P(1)$ es V

(2) Para $n=h \in \mathbb{N}$, supongamos que:

$P(h): 3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+ \dots + h \times 3^h = \frac{1}{4}[(2h-1)3^{h+1}+3]$ es V. (Hip. ind.)

Debemos probar que para $n=h+1$, la proposición:

$P(h): 3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+ \dots + h \times 3^h + (h+1) \times 3^{h+1} = \frac{1}{4}[(2h+1)3^{h+2}+3]$ es verdadera.

En efecto, sumando el término $h+1$ a cada lado de $P(h)$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3+2 \times 3^2+3 \times 3^3+ \dots + h \times 3^h + (h+1) \times 3^{h+1} &= \frac{1}{4}[(2h-1)3^{h+1}+3] + (h+1)3^{h+1} \\ &= \frac{1}{4}[(2h-1)3^{h+1}+3+4(h+1)3^{h+1}] \\ &= \frac{1}{4}[3^{h+1}(6h+3)+3] = \frac{1}{4}[(2h+1)3^{h+2}+3] \end{aligned}$$

Luego, $P(h+1)$ es verdadera.

(3) Conclusión: Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 7. Demostrar por inducción que:

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Demostración. Sea $P(n)$ la proposición dada:

(1) Para $n=1 \rightarrow P(1): \frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = P(1)$ es V

(2) Para $n=h$, supongamos que la proposición:

$$P(h): \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2h-1)(2h+1)} = \frac{h}{2h+1}, \text{ es V. (Hip. Ind.)}$$

Debemos probar que para $n=h+1$, la proposición:

$$P(h+1): \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2h-1)(2h+1)} + \frac{1}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{h+1}{2h+3}$$

es verdadera.

En efecto, sumando el término $h+1$ a cada extremo de $P(h)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2h-1)(2h+1)} + \frac{1}{(2h+1)(2h+3)} &= \frac{1}{2h+1} + \frac{1}{(2h+1)(2h+3)} \\ &= \frac{h(2h+3)+1}{(2h+1)(2h+3)} \\ &= \frac{h+1}{2h+3} \end{aligned}$$

Luego, se ha demostrado que $P(h+1)$ es verdadera.

(3) Conclusión: Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\rightarrow$ $P(h+1)$ es V.

7.4 DEFINICIONES RECURSIVAS (Definiciones por Inducción)

Se dice que tenemos una definición recursiva de $f(n)$ para una función $f = \{(n, y) | y = f(n), n \in \mathbb{N}\}$, si:

- $f(1)$ está dada
- Para $n > 1$, $f(n)$ está expresada en términos de uno o más de los valores $f(i)$ con $i < n$ en tal forma que, dado cualquier $h \in \mathbb{N}$, $f(h)$ esté unívocamente definida.

EJEMPLO 8. Determinar una fórmula para $f(n)$ en términos de n , haciendo uso del principio de inducción matemática, para la proposición definida recursivamente por:

$$i) f(1) = 1$$

$$ii) f(n) = n f(n-1), n \in \mathbb{N} \text{ y } n > 1$$

Solución. Por definición: $f(2) = 2f(1) = 2.1 = 2$

$$f(3) = 3f(2) = 3.2.1 = 6$$

$$f(4) = 4f(3) = 4.3.2.1 = 24$$

$$\vdots$$

$$\rightarrow f(n) = n f(n-1) = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

Número que se conoce con el nombre de "factorial de n ".

Demostración por inducción:

(1) Para $n=1 \rightarrow f(1) = 1! = 1$, es verdadera.

(2) Para $n=h$, supongamos que $f(h)=h!$ es verdadera. (Hip. Ind.)

Debemos probar que para $n=h+1 \rightarrow f(h+1) = (h+1)!$

En efecto, por definición: $f(n+1)=(h+1)f(h) \rightarrow f(h+1)=(h+1)h!$ (Hip. Ind.)
 $\rightarrow f(h+1)=(h+1)!$

(3) Conclusión. Se ha probado que: $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h,1)$ es V.

EJEMPLO 9. Demostrar la ley de los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (respecto a n), haciendo uso de la definición recursiva: $a^1=a$

$$a^n = a \cdot a^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ y } n > 1$$

Demostración. Sea $P(n): a^m \cdot a^n = a^{m+n} \rightarrow P(1): a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$

$$\rightarrow P(h): a^m \cdot a^h = a^{m+h}$$

$$\rightarrow P(h+1): a^m \cdot a^{h+1} = a^{m+h+1}$$

(1) $P(1)$ es cierta porque según la definición: $a^{m+1} = a \cdot a^{m+1-1} = a \cdot a^m$

(2) Si $P(h)$ es cierta (Hip. Ind.), probaremos que $P(h+1)$ es cierta.

En efecto: $a^m \cdot a^{h+1} = a^m(a \cdot a^{h+1-1}) = a^m(a \cdot a^h)$ (Def. Recursiva)

$$= a^m \cdot a^h(a) = a^{m+h} \cdot a \quad (\text{Hip. Ind.})$$

$$= a^{(m+h)+1} = a^{m+(h+1)}$$

(3) Se ha probado que: $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 10. Dada la definición: i) $f(1)=25$

$$\text{ii) } f(n)=f(n-1)+4, \quad n > 1$$

Determinar una fórmula para $f(n)$ y luego demostrarla por el principio de inducción matemática.

Solución. Por definición: $f(2) = f(1) + 4 = 25 + 4$

$$f(3) = f(2)+4 = (25+4)+4 = 25+2(4)$$

$$f(4) = f(3)+4 = [25+2(4)]+4 = 25+3(4)$$

$\vdots$

$$\rightarrow f(n) = 25+(n-1)(4) = 4n+21$$

Demostración por inducción: (1) $f(1) = 4(1)+21 = 25$, es cierta.

(2) Supongamos que $f(h)=4h+21$ es verdadera (Hip. Ind.)

Demostraremos que $f(h+1)=4(h+1)+21$

En efecto, por definición: $f(h+1)=f(h+1-1)+4=f(h)+4=(4h+21)+4$ (Hip. Ind.)
 $= 4(h+1)+21$, es verdadera

(3) Conclusión. Se ha probado que $f(1)$ es V $\wedge f(h)$ es V $\rightarrow f(h+1)$ es V.

EJEMPLO 11. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que: i) $f(4) = 15$
 ii) $f(n+1) = 2f(n)+1$

Hallar el valor de $f(10)$.

Solución. Por definición: $f(4) = 15 = 2^4 - 1$

$$\rightarrow f(4+1) = f(5) = 2f(4) + 1 = 2(2^4 - 1) + 1 = 2^5 - 1$$

$$\rightarrow f(5+1) = f(6) = 2f(5) + 1 = 2(2^5 - 1) + 1 = 2^6 - 1$$

$$\vdots$$

$$f(n) = 2f(n-1)+1 = 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n - 1$$

$$\therefore f(10) = 2^{10} - 1 = 1023$$

EJEMPLO 12. Definimos por inducción $f: \mathbb{N} \cap [5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ en la siguiente forma:

$$i) f(5) = 15$$

$$ii) f(n+1) = af(n)+5, n \geq 5$$

Hallar $f(10)$ si $f(8)=155$.

Solución. Por definición: $f(5+1) = f(6) = af(5)+5 = 15a+5$

$$f(6+1) = f(7) = af(6)+5 = a(15a+5)+5 = 5(3a^2+a+1)$$

$$f(7+1) = f(8) = af(7)+5 = 5a(3a^2+a+1)+5$$

$$\text{Entonces: } 5a(3a^2+a+1)=155 \rightarrow (a-2)(3a^2+7a+15) = 0$$

$$\text{Única solución real: } a=2 \rightarrow f(9)=af(8)+5=2(155)+5 = 315$$

$$\rightarrow f(10) = af(9)+5 = 2(315)+5 = 635$$

EJERCICIOS: Grupo 48

En cada uno de los ejercicios siguientes, usar el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición o fórmula dada es verdadera para cualquier número natural n .

1. $n(n+1)(n+5)$ es divisible por 6, $\forall n \geq 1$
2. $4^n - 1$ es divisible por 3, $\forall n \geq 1$
3. 2^{4n} es divisible por 15, $\forall n \geq 1$
4. $2^{2n} + 5$ es divisible por 8, $\forall n \geq 1$
5. $3^{2n} + 7$ es divisible por 8, $\forall n \geq 1$
6. $n^7 - n$ es divisible por 7, $\forall n \geq 1$
7. $3n^2 + 15n + 6$ es divisible por 6, $\forall n \geq 1$

8. $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ tiene como factor el número 7, $\forall n \geq 1$

9. $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ tiene como factor el número 11, $\forall n \geq 1$

$$10. 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$$

$$11. 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$

$$12. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

$$13. 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

$$14. 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$15. 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$$

$$16. 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$$

$$17. 2 \times 5 + 3 \times 6 + 4 \times 7 + \dots + (n+1)(n+4) = \frac{n}{3}(n+4)(n+5)$$

$$18. \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$19. \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$20. 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$$

$$21. 1 \times 1^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 5^2 + \dots + n(2n-1)^2 = \frac{n}{6}(n+1)(6n^2-2n-1)$$

$$22. 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \dots + (2n-1) \times 3^n = (n-1) \times 3^{n+1} + 3$$

$$23. \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n-2)} = \frac{n-1}{4n}, \quad \forall n \geq 2$$

24. Demostrar por inducción que: $x^n + y^n \geq \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
[Sug. Use $(x^k - y^k)(x-y) \geq 0$]

25. Haciendo uso de la definición: i) $a^1 = a$

ii) $a^n = a \cdot a^{n-1}, n \in \mathbb{N} \text{ y } n > 1$

demostrar por inducción, respecto a n , las leyes de los exponentes para enteros positivos:

$$(1) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(2) (ab)^n = a^n b^n$$

26. De las siguientes afirmaciones, cuáles son verdaderas?

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 17$ es un número primo.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n}{2}(n+1)$

(3) Si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(1)=1$ y $f(n+1)=f(n)+8n \rightarrow f(n)=(2n-1)^2$.

27. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida inductivamente por: $f(1)=1$ y $f(n+1)=\frac{2}{3}f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Según esto, determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones: (1) $f(n) = 15(\frac{2}{5})^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (2) $f(5)-f(6) = \frac{80}{81}$
 (3) $f(3)[f(3) - \frac{4}{9}x] = f(5) \rightarrow x=14$
28. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida inductivamente por $f(5)=17$ y $f(n+1)=2f(n)-1$. Hallar el valor de $3f(1)+2f(3)$
29. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función definida inductivamente por: $f(0)=-1$, $f(1)=2$ y $f(n+1)+f(n-1)=f(n)$, $n \geq 1$. De las siguientes afirmaciones, cuáles son verdaderas? (1) $f(8)+f(6) = f(1)$ (2) $f(74)+f(97) = 5$
 (3) Si r es el residuo de dividir n entre 6 $\rightarrow f(n)=f(r)$
30. Sea $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(1)=4$, $f(2)=4$, $f(n+2)=4+f(n)$. De las afirmaciones siguientes, cuáles son verdaderas? (1) $f(8)=16$ (2) $f(35)=68$
 (3) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $f(n)$ es múltiplo de 4 (4) $f(95)-f(75) = f(20)$
31. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida inductivamente por: $f(1)=2$, $f(2)=3$ y $f(n+1)+f(n-1)=f(n)$, para $n \geq 1$. Hallar $f(87)-f(124)$.
32. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida inductivamente por: $f(0)=1$ y $f(n) = \frac{2f(n-1)-1}{2f(n-1)+5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considerar también: $g(n) = \frac{2f(n)+1}{f(n)+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Hallar $\frac{g(n)}{g(n-1)}$
33. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por: $f(1)=1$, $f(n+1)=f(n)+8n$, hallar: $f(n+1)+f(n)+2$.
34. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida inductivamente por $f(1)=a$, $f(2)=b$ y $f(n+1)=f(n)-f(n-1)$. Hallar el valor de $f(65)+f(75)$.
35. Se define: $f(1)=1$ y $\forall n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$: $f(n+1)=f(n)+(n+1)$. Hallar $f(n+2)$.
36. Se define $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por inducción: i) $f(1)=c+d$ ii) $f(n+1)=c+f(n)$
 Hallar $f(31)$.
37. Demostrar por inducción que:
- $$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\text{Sen}[(x/2)(2n+1)]}{2\text{Sen}(x/2)}$$
- [Sugerencia: Usar la identidad: $2\cos x \cos y = \text{Sen}(x+y) - \text{Sen}(x-y)$]



7.5 SUMATORIAS

En matemáticas es muy frecuente tratar con sumas de muchos términos, tales como:

$$1 + 2 + \dots + n$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1)$$

$$1^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Para facilitar la escritura de estas sumas introducimos una notación llamada sigma (Σ). Así tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

En general, si m y n son enteros tales que $m < n$ y $F(m)$, $F(m+1)$, ..., $F(n)$ son números reales, entonces:

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \dots + F(n)$$

En esta fórmula, el segundo miembro es la suma de $(n-m+1)$ términos, el primero de los cuales se obtiene reemplazando i por m en $F(i)$, el segundo reemplazando i por $m+1$ en $F(i)$ y así sucesivamente, hasta que se obtiene el último término reemplazando i por n en $F(i)$. Los números m y n se llaman límite inferior y superior de la suma, respectivamente. El símbolo arbitrario i se llama índice de la suma.

Por ejemplo:

$$\sum_{i=3}^7 F(i) = F(3) + F(4) + F(5) + F(6) + F(7)$$

$$\sum_{i=3}^7 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$$

Otra forma de definir una sumatoria y que es de mucha utilidad para demostraciones por inducción matemática, es la siguiente definición recursiva:

$$\sum_{i=1}^n F(i) = \begin{cases} F(1) & , \text{ si } n = 1 \\ F(n) + \sum_{i=1}^{n-1} F(i) & , \text{ si } n > 1 \end{cases} \quad (1)$$

EJEMPLO 1. Demostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Demostración. Sea la proposición: $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2\}$

$$(1) \text{ Para } n=1 \rightarrow P(1): \sum_{i=1}^1 (2i-1) = (1)^2 \rightarrow 2(1)-1 = 1^2 \rightarrow 1 = 1$$

Luego, $P(1)$ es verdadera, es decir: $1 \in P$

$$(2) \text{ Para } n=h, \text{ supongamos que } P(h): \sum_{i=1}^h (2i-1) = h^2 \quad (\text{Hip. Ind.})$$

Debemos probar que para $n=h+1$, la proposición:

$$P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} (2i-1) = (h+1)^2 \text{ es verdadera}$$

$$\text{En efecto: } P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} (2i-1) = 2(h+1)-1 + \sum_{i=1}^h (2i-1) \quad (\text{Def. I})$$

$$= 2h+1 + h^2 = (h+1)^2 \quad (\text{Hip. Ind.})$$

Luego, $P(h+1)$ es verdadera, es decir, $(h+1) \in P$

(3) Conclusión. Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 2. Demostrar que: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Demostración. Sea la proposición: $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}\}$

$$(1) \text{ Para } n=1 \rightarrow P(1): \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1} \rightarrow \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, $P(1)$ es verdadera.

$$(2) \text{ Supongamos que para } n=h, P(h): \sum_{i=1}^h \frac{1}{i(i+1)} = \frac{h}{h+1}, \text{ es V.} \quad (\text{Hip. Ind.})$$

Probaremos que para $n=h+1$, $P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{h+1}{h+2}$, es verdadera.

$$\text{En efecto: } \sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{(h+1)(h+2)} + \sum_{i=1}^h \frac{1}{i(i+1)} \quad (\text{Def. I})$$

$$= \frac{1}{(h+1)(h+2)} + \frac{h}{h+1} \quad (\text{Hip. Ind.})$$

$$= \frac{h(h+2)+1}{(h+1)(h+2)} = \frac{h+1}{h+2} \rightarrow P(h+1) \text{ es verdadera.}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 3. Demostrar que: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^i}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Demostración. Sea la proposición: $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^i}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}\}$

(1) Para $n=1 \rightarrow P(1): \sum_{i=1}^1 \left(\frac{i}{2^i}\right) = 2 - \frac{1+2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Luego, $P(1)$ es V.

(2) Supongamos que para $n=h \in \mathbb{N}$, la proposición:

$$P(h): \sum_{i=1}^h \left(\frac{i}{2^i}\right) = 2 - \frac{h+2}{2^h}, \text{ es verdadera.} \quad (\text{Hip. Ind.})$$

Probaremos que para $n=h+1$, $P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} \left(\frac{i}{2^i}\right) = 2 - \frac{h+3}{2^{h+1}}$, es verdadera

$$\begin{aligned} \text{En efecto, (por la Def. I): } \sum_{i=1}^{h+1} \left(\frac{i}{2^i}\right) &= \frac{h+1}{2^{h+1}} + \sum_{i=1}^h \left(\frac{i}{2^i}\right) = \frac{h+1}{2^{h+1}} + \left(2 - \frac{h+2}{2^h}\right) \\ &= 2 - \frac{h+3}{2^{h+1}} \rightarrow P(h+1) \text{ es verdadera.} \end{aligned}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que: $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 4. Demostrar que: $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Demostración. Sea la proposición: $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\}$

(1) Para $n=1 \rightarrow P(1): \sum_{i=1}^1 \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, $P(1)$ es V

(2) Supongamos que para $n=h \in \mathbb{N}$, la proposición:

$$P(h): \sum_{i=1}^h \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{h+1}\right), \text{ es verdadera} \quad (\text{Hip. Ind.})$$

Probaremos que para $n=h+1$, $P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{h+2}\right)$, es verdadera.

$$\text{En efecto: } \sum_{i=1}^{h+1} \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) = \ln\left(\frac{h+1}{h+2}\right) + \sum_{i=1}^h \ln\left(\frac{i}{i+1}\right) \quad (\text{Def. I})$$

$$= \ln\left(\frac{h+1}{h+2}\right) + \ln\left(\frac{1}{h+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{h+2}\right) \rightarrow P(h+1) \text{ es V.}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que: $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 5. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{i=1}^n \cos(2i-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$

Demostración. Sea la proposición: $P = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \sum_{i=1}^n \cos(2i-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}\}$

(1) Para $n=1 \rightarrow P(1): \sum_{i=1}^1 \cos(2i-1)x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} \rightarrow \cos x = \cos x$

Luego, $P(1)$ es verdadera.

(2) Supongamos que para $n=h \in \mathbb{Z}^+$, $P(h): \sum_{i=1}^h \cos(2i-1)x = \frac{\text{Sen}2hx}{2\text{Sen}x}$, es verdadera

Probaremos que para $n=h+1$, $P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} \cos(2i-1)x = \frac{\text{Sen}2(h+1)x}{2\text{Sen}x}$, es V.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} \cos(2i-1)x &= \cos[2(h+1)-1]x + \sum_{i=1}^h \cos(2i-1)x \quad (\text{Def. I}) \\ &= \cos(2hx+x) + \frac{\text{Sen}2hx}{2\text{Sen}x} \quad (\text{Hip. Ind.}) \\ &= \frac{2\text{Sen}x(\cos 2hx \cos x - \text{Sen}2hx \text{Sen}x) + \text{Sen}2hx}{2\text{Sen}x} \\ &= \frac{\text{Sen}2x \cos 2x + \text{Sen}2hx(1-2\text{Sen}^2x)}{2\text{Sen}x} \\ &= \frac{\text{Sen}2x \cos 2x + \text{Sen}2hx \cos 2x}{2\text{Sen}x} = \frac{\text{Sen}(2hx+2x)}{2\text{Sen}x} \\ &= \frac{\text{Sen}2(h+1)x}{2\text{Sen}x} + P(h+1) \text{ es verdadera} \end{aligned}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJERCICIOS: Grupo 49

Demostrar por inducción matemática cada una de las siguientes fórmulas:

1. $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{1}{2}(3n^2+n)$

2. $\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

3. $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

4. $1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \dots + (2n-1) \times 3^n = (n-1) \times 3^{n+1} + 3$

5. $\sum_{k=1}^n [a+(k-1)d] = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ 9. $\sum_{i=1}^n \frac{3}{(3i-2)(3i-1)} = \frac{3n}{2(3n+2)}$

6. $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$ 10. $\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$

7. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{2^{i-1}}\right) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ 11. $\sum_{i=1}^n i \cdot x^{i-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

8. $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{i+1}{i+3}\right) = \ln \frac{6}{(n+2)(n+3)}$ 12. $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

$$13. \sum_{i=1}^n \operatorname{Sen}(2i-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\operatorname{Sen} x}$$

$$16. \sum_{i=1}^n a(r^{i-1}) = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right), \quad r \neq 1$$

$$14. \sum_{i=1}^n (ix)i! = x[(n+1)! - 1]$$

$$17. \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i (2i+1) = 2n$$

$$15. \sum_{i=1}^n i \cdot 3^{i-1} = \frac{1+(2n-1) \cdot 3^n}{4}$$

$$18. \sum_{i=1}^n \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3}i\right) = 2\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)\operatorname{Sen}\left(\frac{n+1}{6}\pi\right)$$



7.6 PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

S.1: $\sum_{i=1}^n c = cn$, donde c es una constante.

En efecto, $\sum_{i=1}^n c = c + c + c + c + \dots + c = nc$

S.2: $\sum_{i=1}^n cF(i) = c \sum_{i=1}^n F(i)$

En efecto, $\sum_{i=1}^n cF(i) = cF(1) + cF(2) + cF(3) + \dots + cF(n)$
 $= c[F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(n)] = c \sum_{i=1}^n F(i)$

S.3: $\sum_{i=1}^n [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i)$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [F(i)+G(i)] &= [F(1)+G(1)] + [F(2)+G(2)] + \dots + [F(n)+G(n)] \\ &= [F(1)+F(2)+\dots+F(n)] + [G(1)+G(2)+\dots+G(n)] \\ &= \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i) \end{aligned}$$

S.4: $\sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [F(i)-F(i-1)] &= [F(1)-F(0)] + [F(2)-F(1)] + [F(3)-F(2)] + \dots \\ &\quad + [F(n-1)-F(n-2)] + [F(n)-F(n-1)] \end{aligned}$$

Efectuando las simplificaciones correspondientes obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$$

$$S.5: \sum_{i=1}^n [F(i+1) - F(i-1)] = F(n+1) + F(n) - F(1) - F(0)$$

(Nota. A las propiedades S.4 y S.5 se les denomina **propiedades telescopicas** de la sumatoria)

$$S.6: \sum_{i=1}^{n+1} F(i) = F(n+1) + \sum_{i=1}^n F(i)$$

$$S.7: \text{Si } n > m > 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1}^m F(i) + \sum_{i=m+1}^n F(i)$$

$$S.8: \text{Si } n > m > 1 \rightarrow \sum_{i=m}^n F(i) = \sum_{i=1}^{n-m+1} F(i+m-1)$$

S.9: Cambio de subíndice:

$$a) \sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1+h}^{n+h} F(i-h) \qquad b) \sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1-h}^{n-h} F(i+h)$$

El valor de una sumatoria no se altera si al argumento $F(i)$ se le resta, (a), o se le suma, (b), un entero h ; si simultáneamente se le suma o se le resta dicho entero, respectivamente, a los subíndices superior e inferior de la sumatoria.

7.7 FORMULAS IMPORTANTES DE LA SUMATORIA

$$F.1: \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. Aplicando sumatorias a la identidad: $i^2 - (i-1)^2 = 2i-1$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^n [i^2 - (i-1)^2] = \sum_{i=1}^n (2i-1) \rightarrow n^2 - (0)^2 = \sum_{i=1}^n (2i) - \sum_{i=1}^n (1) \quad (S.4, S.3)$$

$$\rightarrow n^2 = 2 \sum_{i=1}^n i - n \leftrightarrow \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$F.2: \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostración. De la identidad: $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n [i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1)$$

Según S.4: $n^3 - (0)^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (1)$

$$\rightarrow n^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{3}{2}n(n+1) + n \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

F.3: $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$

Demostración. De la identidad: $i^3 - (i-1)^3 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n [i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 4i - 1)$$

$$\rightarrow n^3 - (0)^3 = 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n (1)$$

$$\rightarrow n^3 = 4 \sum_{i=1}^n i^3 - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n \rightarrow \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

F.4: $\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n}{30}(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$

La demostración se deja como ejercicio.

(Sug. Partir de: $i^4 - (i-1)^4 = 5i^4 - 10i^3 + 10i^2 - 5i + 1$)

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Hallar la fórmula para: $\sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1)$

Solución. $\sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (1)$ (S.3 y S.2)

$$= 3 \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{n}{2}(n+1) + n \quad (\text{F.2, F.1 y S.1})$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)[(2n+1) - 3] + n = n^3$$

EJERCICIO 2. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \frac{5x^2 - 1000}{\sqrt{x+9}}$

Si $A = \sum_{i=1}^{40} f(i)$ y $B = \sum_{i=1}^{40} f(i-1)$, hallar el valor de $A-B$.

Solución. $A-B = \sum_{i=1}^{40} [f(i) - f(i-1)]$. Por S.4: $A-B = f(40) - f(0)$

$$\text{Luego, } A-B = \frac{7000}{7} + \frac{1000}{3} = \frac{4000}{3}$$

EJERCICIO 3. Determinar a y b si: $\sum_{k=0}^4 (ak+b)=10$ y $\sum_{i=1}^4 (ai+b)=14$.

$$\text{Solución. } \sum_{k=0}^4 (ak+b) = a(0)+b + \sum_{k=1}^4 (ak+b) = b + a \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 b$$

$$\text{Según F.1 y S.1, para } n=4: b+a[\frac{4}{2}(4+1)]+4b = 10, \text{ de donde: } 2a+b=2 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^4 (ai+b)=14 \rightarrow a \sum_{i=1}^4 i + \sum_{i=1}^4 b = 14 \rightarrow a[\frac{4}{2}(4+1)]+4b=14 \rightarrow 5a+2b=7 \quad (2)$$

Luego, de (1) y (2) obtenemos: $a=3$ y $b=-4$

Nota. En la lista de fórmulas importantes de la sumatoria se omitió la fórmula de la serie geométrica, cuya demostración queda como ejercicio.

$$\text{F.5: } \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right), \quad r \neq 1$$

EJERCICIO 4. Calcular: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{2^i}\right)$

$$\text{Solución. Según S.4: } \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{2^i} - \frac{i-1}{2^{i-1}}\right] = \frac{n}{2^n} - \frac{0}{2} = \frac{n}{2^n}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{2^i} - \frac{i}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}}\right] = \frac{n}{2^n} \rightarrow \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{2^i} - \frac{2i}{2^i} + \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right] = \frac{n}{2^n}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n \left(-\frac{i}{2^i}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{2^n} \rightarrow -\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{2^i}\right) + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} = \frac{n}{2^n} \quad (\text{F.5})$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{2^i}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

EJERCICIO 5. Calcular: $\sum_{i=1}^n \frac{3}{(3i+2)(3i-1)}$

$$\text{Solución. Por fracciones parciales: } \frac{3}{(3i+2)(3i-1)} = \frac{A}{3i+2} + \frac{B}{3i-1}$$

$$\text{de donde: } 3=A(3i-1)+B(3i+2) \rightarrow 3 = (2B-A) + (3A+3B)i$$

$$\text{Identificando coeficientes: } (2B-A=3) \wedge (3A+3B=0) \leftrightarrow A=-1, B=1$$

$$\text{Entonces: } \sum_{i=1}^n \frac{3}{(3i+2)(3i-1)} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{3i+2} + \frac{1}{3i-1}\right] = -\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3i+2} - \frac{1}{3i-1}\right]$$

$$\text{Vemos que si: } F(i) = 1/(3i+2) \rightarrow F(i-1) = 1/(3i-1)$$

Luego, por la propiedad telescópica S.4, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \frac{3}{(3i+2)(3i-1)} = - \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{0+2} \right) = \frac{3n}{2(3n+2)}$$

EJERCICIO 6. Hallar el valor de $S = \sum_{i=3}^{12} \left[\sum_{k=1}^{40} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \right] (2i-5)$

Solución. En el corchete: $F(k) = \sqrt{2k+1} \rightarrow F(k-1) = \sqrt{2k-1}$

$$\text{Luego, por S.4: } S = \sum_{i=3}^{12} [\sqrt{2(40)+1} - \sqrt{2(0)+1}] (2i-5) = \sum_{i=3}^{12} 8(2i-5)$$

Dado que el límite inferior es $i=3 > 1$, debemos aplicar la propiedad S.8 para la cual tenemos: $n-m+1 = 12-3+1 = 10$ (límite superior)

$$i+m-1 = i+3-1 = i+2 \quad (\text{argumento})$$

$$+ S = 8 \sum_{i=3}^{12} (2i-5) = 8 \sum_{i=1}^{10} [2(i+2)-5] = 8 \sum_{i=1}^{10} (2i-1) = 8 \left[2 \cdot \frac{10}{2} (10+1) - 10 \right] = 800$$

EJERCICIO 7. Hallar una fórmula para: $\sum_{i=1}^n \text{Sen}(2i-1)x$

Solución. Partimos de la identidad: $\text{Cos}A - \text{Cos}B = -2\text{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$ (1)

Como el argumento de la sumatoria es $(2i-1)x$, hacemos:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{A+B}{2}\right) &= (2i-1)x \\ \left(\frac{A-B}{2}\right) &= 2x \end{aligned} \right\} \text{ de donde: } A=(2i+1)x \text{ y } B=(2i-3)x$$

Luego, en (1): $\text{Cos}(2i+1)x - \text{Cos}(2i-3)x = -2\text{Sen}(2i-1)x \cdot \text{Sen}2x$

$$\sum_{i=1}^n [\text{Cos}(2i+1)x - \text{Cos}(2i-3)x] = -2\text{Sen}x \cdot \sum_{i=1}^n \text{Sen}(2i-1)x$$

Ahora bien, si: $F(i) = \text{Cos}(2i-1)x \rightarrow F(i+1) = \text{Cos}(2i+1)x$ y $F(i-1) = \text{Cos}(2i-3)x$
Entonces, según la propiedad telescópica S.5, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Cos}[2(n+1)+1]x - \text{Cos}(2n-1)x - \text{Cos}(2-1)x - \text{Cos}(-x) &= -2\text{Sen}2x \cdot \sum_{i=1}^n \text{Sen}(2i-1)x \\ + \text{Cos}(2n+1)x - \text{Cos}(2n-1)x - \text{Cos}x - \text{Cos}x &= -2\text{Sen}2x \sum_{i=1}^n \text{Sen}(2i-1)x \end{aligned}$$

Transformando a producto los dos primeros términos se tiene:

$$2\text{Cos}2nx\text{Cos}x - 2\text{Cos}x = -2\text{Sen}2x \sum_{i=1}^n \text{Sen}(2i-1)x \rightarrow \sum_{i=1}^n \text{Sen}(2i-1)x = \frac{1 - \text{Cos}2nx}{2\text{Sen}x}$$

EJERCICIO 8. Sean A y B números enteros y positivos tales que si:

$$\sum_{i=1}^A (i^2 - \frac{A}{3} - \frac{i}{3}) = 1944 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^B (2i-1) = 1024; \text{ hallar } A+B.$$

Solución.
$$\sum_{i=1}^A (i^2 - \frac{A}{3} - \frac{i}{3}) = \frac{A}{6}(A+1)(2A+1) - (\frac{A}{3})A - \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{2}(A+1)$$

$$\rightarrow \frac{A}{6}(A+1)[(2A+1)-1] - \frac{1}{3}A^2 = 1944, \text{ de donde: } A=18$$

$$\sum_{i=1}^B (2i-1) = 1024 \rightarrow 2 \cdot \frac{B}{2}(B+1) - B = 1024 \rightarrow B^2=1024 \rightarrow B=32$$

$$\therefore A + B = 50$$

EJERCICIO 9. Dados $n \in \mathbb{Z}^+$, $x=b^{2^{-k}}$, $y=a^{2^k}$; hallar C y D tales que:

$$\sum_{k=0}^n (\log_x a - \log_y b)^2 = \frac{1}{3}(4^{n+1}-1)C-2D.$$

Solución. Por la propiedad L.6: $S = \sum_{k=0}^n (2^k \log_b a - 2^{-k} \log_a b)^2$

$$\rightarrow S = \sum_{k=0}^n (4^k \log_b^2 a - 2 + 4^{-k} \log_a^2 b) = (\sum_{k=0}^n 4^k) \log_b^2 a - 2 \sum_{k=0}^n (1) + (\sum_{k=0}^n 4^{-k}) \log_a^2 b$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S &= \left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4} \right) \log_b^2 a - 2(n+1) + \left(\frac{1-(1/4)^{n+1}}{1-1/4} \right) \log_a^2 b \\ &= \frac{1}{3}(4^{n+1}-1) \log_b^2 a - 2(n+1) + \frac{1}{3}(4^{-n}-1) \log_a^2 b \\ &= \frac{1}{3}(4^{n+1}-1)(\log_b^2 a + 4^{-n} \log_a^2 b) - 2(n+1) \end{aligned}$$

Comparando con la relación dada, se deduce que: $C = \log_b^2 a + \log_a^2 b$ y $D = n+1$

7.3

NOTACION DE PRODUCTO DE LOS TERMINOS DE UNA SUCESION

Dada una sucesión de números reales: $F(1), F(2), F(3), \dots, F(n)$; el producto de todos estos números se denota por:

$$\prod_{i=1}^n F(i) = F(1) \cdot F(2) \cdot F(3) \cdot \dots \cdot F(n)$$

y se lee: "producto de los números $F(i)$, desde $i=1$ hasta $i=n$ ".

Ejemplos:

$$\begin{aligned} (1) \quad \prod_{i=1}^4 (3i-2) &= [3(1)-2][3(2)-2][3(3)-2][3(4)-2] \\ &= 1 \times 4 \times 7 \times 10 = 210 \end{aligned}$$

$$(2) \prod_{i=1}^n (i) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n! \quad (\text{Definición de factorial})$$

$$(3) \prod_{i=1}^n (-i) = (-1)(-2)(-3) \dots (-n) = (-1)^n n!$$

7.9 PROPIEDADES DE $\prod_{i=1}^n F(i)$

Las propiedades del producto de los términos de una sucesión son muy similares a las propiedades de las sumatorias, por lo que enunciaremos cada una de ellas y su demostración se deja como ejercicio para el lector.

$$P.1: \prod_{i=1}^n c = c^n$$

$$P.5: \prod_{i=1}^n [F(i)]^m = \left[\prod_{i=1}^n F(i) \right]^m$$

$$P.2: \prod_{i=1}^n c F(i) = c^n \prod_{i=1}^n F(i)$$

$$P.6: \prod_{i=1}^{n+1} F(i) = F(n+1) \left[\prod_{i=1}^n F(i) \right]$$

$$P.3: \prod_{i=1}^n F(i) \cdot G(i) = \prod_{i=1}^n F(i) \cdot \prod_{i=1}^n G(i)$$

$$P.7: \prod_{i=1}^{n-1} F(i) = \prod_{i=1}^n F(i-1)$$

$$P.4: \prod_{i=1}^n \frac{F(i)}{F(i-1)} = \frac{F(n)}{F(0)}$$

$$P.8: \sum_{i=1}^n \log_b F(i) = \log_b \left[\prod_{i=1}^n F(i) \right]$$

EJEMPLO 1. Determinar una fórmula para: a) $\prod_{i=1}^n (-i)$ b) $\prod_{i=1}^n (i^2 + 2i)$

Solución. a) $\prod_{i=1}^n (-i) = \prod_{i=1}^n (-1)i = \prod_{i=1}^n (-1) \cdot \prod_{i=1}^n i$ (P.3)

$$= (-1)^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n) \quad (P.1)$$

$$\equiv (-1)^n n! \quad (\text{Def. de factorial})$$

b) $\prod_{i=1}^n i(i+2) = \prod_{i=1}^n i \cdot \prod_{i=1}^n (i+2)$ (P.3)

$$= n!(n+2)! \quad (\text{Def. de factorial})$$

EJEMPLO 2. Demostrar que: $\prod_{k=2}^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Sea la proposición: $P = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid \prod_{k=2}^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n+1}\}$

(1) Para $n=1 \rightarrow P(1): \prod_{k=2}^3 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1+1}{2+1} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Luego, $P(1)$ es verdadera.

(2) Supongamos que para $n=h \in \mathbb{Z}^+$, se cumple la proposición:

$$P(h): \prod_{k=2}^{2h+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{h+1}{2h+1} \quad (\text{Hipótesis Inductiva})$$

Probemos que para $n=h+1$ se cumple, $P(h+1)$: $\prod_{k=2}^{2h+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{h+2}{2h+3}$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \prod_{k=2}^{2h+3} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left[1 - \frac{1}{(2h+3)^2}\right] \left[1 - \frac{1}{(2h+2)^2}\right] \prod_{k=2}^{2h+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad (P.6) \\ &= \left[\frac{(2h+3)^2 - 1}{(2h+3)^2}\right] \left[\frac{(2h+2)^2 - 1}{(2h+2)^2}\right] \left(\frac{h+1}{2h+1}\right) \quad (\text{Hip. Ind.}) \\ &= \left[\frac{4(h+2)(h+1)}{(2h+3)^2}\right] \left[\frac{(2h+3)(2h+1)}{4(h+1)^2}\right] \left(\frac{h+1}{2h+1}\right) \\ &= \frac{h+2}{2h+3} \quad \rightarrow \quad P(h+1) \text{ es verdadera.} \end{aligned}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que: $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\rightarrow$ $P(h+1)$ es V

EJEMPLO 3. Siendo $x = \frac{2\pi}{1+2^{n+1}}$ y $A = \sum_{k=0}^n \log |\sec(2^k x) + 1|$, probar que $A=0$

Demostración. $A = \sum_{k=0}^n \log |\sec(2^k x) + 1| = \log \prod_{k=0}^n |\sec(2^k x) + 1| \quad (1) \quad (P.8)$

$$\text{Pero: } \sec(2^k x) + 1 = \frac{1}{\cos(2^k x)} + 1 = \frac{1 + \cos(2^k x)}{\cos(2^k x)} = \frac{2\cos^2(2^{k-1} x)}{\cos(2^k x)}$$

Luego, desarrollando: $P = \prod_{k=0}^n \left| \frac{2\cos^2(2^{k-1} x)}{\cos(2^k x)} \right|$, se tiene:

$$\begin{aligned} P &= \left| \left[\frac{2\cos^2(x/2)}{\cos x} \right] \left[\frac{2\cos^2 x}{\cos(2x)} \right] \left[\frac{2\cos^2(2x)}{\cos(2^2 x)} \right] \cdots \left[\frac{2\cos^2(2^{n-1} x)}{\cos(2^n x)} \right] \right| \\ &= 2^{n+1} \left| \cos^2(x/2) \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cdots \cdot \frac{\cos(2^{n-1} x)}{\cos(2^n x)} \right| \\ &= 2^{n+1} \left| \frac{\cos(x/2)}{\cos(2^n x)} \right| |\cos(x/2) \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cdots \cdot \cos(2^{n-1} x)| \\ &= 2^n \left| \frac{\cos(x/2)}{\cos(2^n x) \sin(x/2)} \right| |2\sin(x/2) \cos(x/2) \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cdots \cdot \cos(2^{n-1} x)| \\ &= \left| \frac{2^n}{\cos(2^n x) \tan(x/2)} \right| |\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cdots \cdot \cos(2^{n-1} x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \left| \frac{2^{n-1}}{\cos(2^n x) \cdot \tan(x/2)} \right| |2 \operatorname{Sen} x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos(2^{n-1} x)| \\
 &= \left| \frac{1}{\cos(2^n x) \cdot \tan(x/2)} \right| |\operatorname{Sen} 2(2^{n-1} x)| = \left| \frac{1}{\cos(2^n x) \cdot \tan(x/2)} \right| |\operatorname{Sen}(2^n x)| \\
 P &= \left| \frac{\tan(2^n x)}{\tan(x/2)} \right| . \text{ Pero: } x + x \cdot 2^{n+1} = 2\pi \rightarrow \frac{x}{2} + 2^n x = \pi \rightarrow 2^n x = \pi - \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

Luego, por ser suplementarios: $\tan(2^n x) = \tan(\pi - \frac{x}{2}) = -\tan(x/2)$

Entonces: $P = |-1| = 1$. Por tanto, en (1): $A = \log(P) = \log(1) = 0$

EJERCICIOS: Grupo 50

En los ejercicios del 1 al 12, calcular o hallar una fórmula para las sumas indicadas.

- $\sum_{i=1}^{41} ({}^3\sqrt{3i-1} - {}^3\sqrt{3i+2})$
- $\sum_{i=1}^n (10^{i+1} - 10^i)$
- $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i(i+1)}$
- $\sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1)$
- $\sum_{k=1}^n (n-k+1)^2$
- $3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n+1)^2$
- $\sum_{i=1}^n (i \cdot 2^i)$
- $\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x$
- $\sum_{k=1}^n \cos^2(kx)$
- $\sum_{k=1}^n \cos^{2i}(2x)$
- $\sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{(k+2)}{k^2 + 7k + 12} \right]$
- $\sum_{k=1}^n (kx)k!$
- Mostrar que: $\sum_{i=1}^n (n-i+1)^3 = \sum_{i=1}^n i^3$
- Si $\sum_{i=-1}^5 (ai+b)=7$ y $\sum_{i=1}^5 (ai+b)=20$, hallar $a-b$.
- Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = \frac{2x^2-200}{\sqrt{3x+15}}$
Si $A = \sum_{i=1}^{60} f(i)$ y $B = \sum_{i=1}^{60} f(i-1)$; hallar $A-B$.

16. Hallar el valor de n , si $\sum_{k=0}^n 2^k = 255$.

En los ejercicios del 17 al 20, hallar el valor de la sumatoria dada.

17. $\sum_{k=3}^{15} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+3}$

19. $\sum_{i=2}^4 \left(\sum_{k=0}^i k^2 \right)$

18. $\sum_{k=1}^5 \left[\sum_{i=1}^k (-1)^{k+1} (k-i+2) \right]$

20. $\sum_{i=8}^{10} \left(\sum_{k=0}^i k^2 \right)$

21. Si $\sum_{k=0}^{10} (Ak-B) = 22$ y $\sum_{k=3}^{12} (Ak - \frac{11}{10}B) = 62$, hallar $A+B$.

22. Si se cumple que: $\sum_{i=2}^4 (a^2 i - a_i) = \sum_{k=3}^5 (ak+6)$, hallar: $E = 3a^2 - 7a - 10$.

23. Se define por inducción: i) $a_n = h$. Hallar $E = \sum_{i=1}^{20} a_i$

ii) $\sum_{i=0}^{n+1} a_i = h + \sum_{i=0}^n a_i$

24. Si $\sum_{i=1}^n \left(i^2 - \frac{n}{3} - \frac{i}{3} \right) = 72$, hallar el valor de n .

25. Si $\sum_{k=1}^{20} kx - \sum_{k=5}^{25} (2x-3) - \sum_{k=2}^{20} [(k-3)^2 - (k-4)^2] = 0$, hallar x .

26. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Si $\sum_{i=0}^n [f(i+1) - f(i)] = 143$, calcular el valor de $E = 2n^2 - n$.

27. Determinar a, b y c tales que la igualdad dada sea cierta:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = an^2 + bn + c.$$

28. Hallar el número de términos necesarios para que la suma:

$$2 + 6 + 10 + \dots, \text{ sea } 12,800.$$

29. Si $S_k = \sum_{i=1}^k i$, entonces hallar: $\sum_{k=1}^n S_k$.

30. Probar que: $\prod_{i=2}^n \left(1 + \frac{1}{i-1} \right)^{i-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$, $\forall n > 2$

31. Demostrar por inducción matemática: $\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{k} \right) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^{r+1}}{r}$, $\forall n \geq 1$



7.10 EL BINOMIO DE NEWTON

Antes de enunciar y demostrar el teorema del binomio es necesario introducir algunas notaciones que son muy frecuentes en el enunciado del teorema.

Definición 7.1 El factorial de un número entero y positivo n , que se denota por $n!$, se define como:

$$n! = 1.2.3. \dots n, \text{ si } n > 1$$

$$0! = 1, \text{ si } n = 0$$

Como el factorial de n es el producto de una sucesión de números enteros del 1 hasta n , por analogía con la notación de sumas, podemos usar la notación para representar productos, esto es:

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1.2.3. \dots (n-1)n$$

Por ejemplo: $5! = \prod_{i=1}^5 i = 1.2.3.4.5 = 120$

o bien: $5! = 5.4.3.2.1 = 5.4! = 5.4.3! = 120$

En general:

$$n! = n(n-1)!$$

Es decir, el factorial de un número es igual al producto de dicho número por el factorial del anterior.

Definición 7.2 Sean n y r números enteros positivos tales que $r \leq n$.

Se denomina **coeficiente binomial** o **número combinato** rio de " n sobre r ", al símbolo $\binom{n}{r}$ definido por:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Por ejemplo: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{2!.3!} = \frac{5.4}{2.1} = 10$

Casos Especiales. C.E.1: $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!.0!} = 1$

C.E.2: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.n!} = 1$

$$\text{C.E.3: } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

$$\text{C.E.4: } \binom{n}{1} = \frac{n!}{1! (n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\text{C.E.5: } \binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1$$

Nota. Se dice que dos números combinatorios son de **orden complementarios** cuando tienen igual numerador y la suma de sus denominadores es igual a aquel.

Por ejemplo: $\binom{9}{2}$ y $\binom{9}{7}$

7.10.1 PROPIEDADES DEL COEFICIENTE BINOMINAL

B.1: Dos números combinatorios de orden complementarios son iguales:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \binom{n}{n-r}$$

B.2: Para dos coeficientes binomiales que tienen igual numerador y denominadores consecutivos, vale la fórmula:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \frac{n!}{r! (n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)! (n-r-1)!} \\ &= \frac{n!}{r! (n-r) (n-r-1)!} + \frac{n!}{(r+1) r! (n-r-1)!} \\ &= \frac{n!}{r! (n-r-1)!} \left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r+1} \right] = \frac{n!}{r! (n-r)!} \left[\frac{n+1}{(n-r)(r+1)} \right] \\ &= \frac{(n+1)n!}{(r+1) r! (n-r) (n-r-1)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)! (n-r)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(r+1)! [(n+1)-(r+1)]!} = \binom{n+1}{r+1} \end{aligned}$$

$$\text{B.3: } \binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}$$

$$\text{En efecto: } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n! (r+1)}{r! (r+1) (n-r) (n-r-1)!}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{n!}{r! (n-r)!} &= \left[\frac{n!}{(r+1)! (n-r-1)!} \right] \left(\frac{r+1}{n-r} \right) \rightarrow \frac{n!}{(r+1)! (n-r-1)!} = \binom{n-r}{r+1} \binom{n}{r} \\ &\rightarrow \binom{n}{r+1} = \binom{n-r}{r+1} \binom{n}{r} \end{aligned}$$

$$B.4: r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } r \binom{n}{r} &= \frac{rn!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} = n \binom{n-1}{r-1} \end{aligned}$$

7.10.2 EL TEOREMA DEL BINOMIO

Sí a y b son números reales diferentes de cero y n un número entero positivo, entonces:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Demostración. Por inducción completa:

$$\text{En efecto, sea } P = \{n \in \mathbb{N} \mid (a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r\}$$

$$(1) \text{ Para } n=1 \rightarrow P(1): (a+b)^1 = \sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} a^{1-r} b^r \rightarrow a+b = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1$$

$$+ a+b = (1)a(1) + (1)a^0 b^1 = a+b \rightarrow P(1) \text{ es verdadera}$$

(2) Para $n=h \in \mathbb{Z}^+$, supongamos que se cumple la proposición:

$$P(h): (a+b)^h = \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} a^{h-r} b^r \quad (\text{Hip. Ind.})$$

Entonces debemos probar que, $P(h+1): (a+b)^{h+1} = \sum_{r=0}^{h+1} \binom{h+1}{r} a^{h+1-r} b^r$, es V.

$$\text{En efecto: } (a+b)^{h+1} = (a+b)(a+b)^h = (a+b) \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} a^{h-r} b^r \quad (\text{Hip. Ind.})$$

$$= a \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} a^{h-r} b^r + b \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} a^{h-r} b^r$$

$$= \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} a^{h-r+1} b^r + \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} a^{h-r} b^{r+1}$$

$$+ (a+b)^{h+1} = \binom{h}{0} a^{h+1} b^0 + \sum_{r=1}^h \binom{h}{r} a^{h-r+1} b^r + \sum_{r=0}^{h-1} \binom{h}{r} a^{h-r} b^{r+1} + \binom{h}{h} a^0 b^{h+1}$$

$$= \binom{h}{0} a^{h+1} b^0 + \sum_{r=1}^h \binom{h}{r} a^{h-r+1} b^r + \sum_{r=1}^h \binom{h}{r-1} a^{h-r+1} b^r + \binom{h}{h} a^0 b^{h+1}$$

$$\rightarrow (a+b)^{h+1} = \binom{h}{0} a^{h+1} b^0 + \sum_{r=1}^h [\binom{h}{r} + \binom{h}{r-1}] a^{h-r+1} b^r + \binom{h}{h} a^0 b^{h+1}$$

Pero: $\binom{h}{h} = \binom{h+1}{h+1}$ y $\binom{h}{r} + \binom{h}{r-1} = \binom{h+1}{r}$ (B.2)

$$\rightarrow (a+b)^{h+1} = \binom{h+1}{0} a^{h+1} b^0 + \sum_{r=1}^h \binom{h+1}{r} a^{h-r+1} b^r + \binom{h+1}{h+1} a^0 b^{h+1}$$

$$\rightarrow (a+b)^{h+1} = \sum_{r=0}^{h+1} \binom{h+1}{r} a^{h+1-r} b^r \rightarrow P(h+1) \text{ es verdadera.}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V.

$$\therefore (a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Si designamos por T_1 el primer término del desarrollo; T_2 el segundo, T_3 el tercero y así sucesivamente, entonces:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^n$$

$$T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} b$$

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2$$

$$\vdots$$

$$T_r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

Así, el término general del desarrollo es:

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Observaciones:

- (1) El desarrollo de la potencia n -ésima de un binomio tiene $n+1$ términos, según lo indica la variación de r , desde 0 hasta n .
- (2) El coeficiente binomial de cada término del desarrollo tiene como numerador el exponente del binomio, y el denominador es variable de 0 hasta n .
- (3) El exponente de a es la diferencia entre el numerador y denominador, y el de b es igual al denominador del coeficiente binomial. Es decir, la suma de ambos exponentes es igual a n , para todos los términos.
- (4) Los términos equidistantes de los extremos tienen igual coeficiente, por ser números combinatorios de órdenes complementarios.

(5) Si en la fórmula del binomio: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ (I)

hacemos $b=-b$, entonces: $(a-b)^n = (-1)^r \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ (II)

(6) Si $a=b=1$, la fórmula (I) se convierte en la suma de los coeficientes binomiales, esto es:

$$(1+1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} + \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

o bien: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ (1)

Si en (II): $a=b=1 \rightarrow 0 = (-1)^r \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$

Entonces: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

$$+ [\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots] - [\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots] = 0$$
 (2)

Sumando (1)+(2) se tiene: $2[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots] = 2^n$

$$+ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$
 (3)

y restando (1)-(3) obtenemos: $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$ (4)

En resumen: T.B.1: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$, si $a=b=1$

T.B.2: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r = 0$, si $a=1, b=-1$

T.B.3: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^{n-1}$, si r par, $r=2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

T.B.4: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^{n-1}$, si r impar, $r=2k+1$, $k \in \mathbb{Z}^+$

EJEMPLO 1. Hallar la expansión del binomio: $(x^2y + \frac{2}{x})^5$

Solución. Por la fórmula (I): $(x^2y + \frac{2}{x})^5 = \sum_{r=0}^5 \binom{5}{r} (x^2y)^{5-r} (\frac{2}{x})^r$

$$+ (x^2y + \frac{2}{x})^5 = \binom{5}{0} (x^2y)^5 + \binom{5}{1} (x^2y)^4 (\frac{2}{x}) + \binom{5}{2} (x^2y)^3 (\frac{2}{x})^2 + \binom{5}{3} (x^2y)^2 (\frac{2}{x})^3 + \binom{5}{4} (x^2y) (\frac{2}{x})^4 + \binom{5}{5} (\frac{2}{x})^5$$

$$\begin{aligned}
 (x^2y + \frac{2}{x})^5 &= x^1y^5 + 5(x^3y^4)(\frac{2}{x}) + 10(x^5y^3)(4x^{-2}) + 10(x^7y^2)(8x^{-3}) + \\
 &\quad + 5(x^9y)(16x^{-4}) + 1(32x^{-5}) \\
 &= x^1y^5 + 10x^2y^4 + 40x^3y^3 + 80x^4y^2 + 32x^5y
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $2(n!) - (n-1)(n-1)! = n! + (n-1)!$, $n \in \mathbb{Z}^+$

b) $\binom{n}{r} = \binom{n-2}{r} + 2\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}$

Demostración. a) $2n! - (n-1)(n-1)! = 2n(n-1)! - (n-1)(n-1)! = (n-1)![2n - (n-1)]$
 $= (n-1)!(n+1) = n(n-1)! + (n-1)!$
 $= n! + (n-1)!$

b) $\binom{n}{r} = \overbrace{\binom{n-2}{r} + \binom{n-2}{r-1}} + \overbrace{\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ (B.2)

y nuevamente por B.2: $\binom{n}{r} = \binom{n}{r}$

EJEMPLO 3. Simplificar cada una de las sumas indicadas:

a) $S = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-2} + \binom{n-3}{r-3} + \binom{n-4}{r-4} + \binom{n-5}{r-5}$

b) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$

Solución. a) Aplicando sucesivamente la propiedad B.2 en cada dos últimos términos, se tiene:

$$\begin{aligned}
 S &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-2} + \overbrace{\binom{n-3}{r-3} + \binom{n-3}{r-4}} = \binom{n-1}{r-1} + \overbrace{\binom{n-2}{r-2} + \binom{n-2}{r-3}} \\
 &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r-2} = \binom{n}{r-1}
 \end{aligned}$$

b) Apoyándonos en la propiedad B.4: $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 S &= n\binom{n-1}{1-1} + n\binom{n-2}{2-1} + n\binom{n-3}{3-1} + \dots + n\binom{n-1}{n-1} \\
 &= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1}\right] = n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Pero si: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$ $\quad \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = 2^{n-1}$ (T.B.1)

Por lo tanto, en (1): $S = n(2^{n-1})$

EJEMPLO 4. Hallar los valores de x , tales que: $\binom{35}{x^2} = \binom{35}{2x}$

Solución. Por ser números combinatorios iguales: $x^2 = 2x \rightarrow x=0$ o $x=2$

y por ser complementarios, según la propiedad B.1: $x^2 + 2x = 35 \leftrightarrow x = 5$ o $x = -7$
 Pero $-7 \notin \mathbb{N} \rightarrow C.S = \{0, 2, 5\}$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Hallar el valor de n para que: $\sum_{r=0}^n (2r+1) \binom{n}{r} = 2^{n+4}$

Solución. $\sum_{r=0}^n (2r+1) \binom{n}{r} = 2 \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} + \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2 \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} + 2^n$ (1)

$$+ \sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = 0 \binom{n}{0} + \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = n \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r} = n \cdot 2^{n-1} \quad (\text{B.4})$$

y por la propiedad S.9b: $\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = n \cdot 2^{n-1}$ (T.B.1)

Entonces, en (1): $\sum_{r=0}^n (2r+1) \binom{n}{r} = 2n \cdot 2^{n-1} + 2^n = 2^n (n+1)$

Luego, si: $2^n (n+1) = 2^{n+4} \rightarrow 2^n (n+1) = 2^4 \cdot 2^n \rightarrow n+1 = 2^4 = 16 \rightarrow n = 15$

EJERCICIO 2. Simplificar: $S = (r+2)! \left[\sum_{r=0}^1 \binom{n}{r+k} + \sum_{k=2}^3 \binom{n+k-1}{r+k} \right]$

Solución. $S = (r+2)! \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} + \binom{n+1}{r+2} + \binom{n+2}{r+3} \right]$

y por B.2: $S = (r+2)! \left[\binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r+2} + \binom{n+2}{r+3} \right] = (r+2)! \left[\binom{n+2}{r+2} + \binom{n+2}{r+3} \right]$

$$+ S = (r+2)! \binom{n+3}{r+3} = (r+2)! \frac{(n+3)!}{(r+3)!(n-r)!} = \frac{(n+3)!}{(r+3)(n-r)!}$$

EJERCICIO 3. Demostrar que: $\sum_{r=1}^n r(r!) = (n+1)! - 1$

Solución. Según S.4: $\sum_{r=1}^n [r(r!) - (r-1)(r-1)!] = n \cdot n! - 0(0)!$

$$+ \sum_{r=1}^n [r(r!) - r(r-1)! + (r-1)!] = n \cdot n!$$

$$+ \sum_{r=1}^n [r(r!) - r! + (r-1)!] = n \cdot n!$$

$$+ \sum_{r=1}^n r(r!) - \sum_{r=1}^n [r! - (r-1)!] = n \cdot n! \rightarrow \sum_{r=1}^n r(r!) - (n! - 0!) = n \cdot n!$$

$$+ \sum_{r=1}^n r(r!) = n.n! + n! - 1 = (n+1)n! - 1 = (n+1)! - 1$$

EJERCICIO 4. Demostrar que: $\sum_{k=1}^{100} \text{Log}(2k+1) = \text{Log} \frac{201!}{100!(2^{100})}$

Demostración. En efecto: $\sum_{k=1}^{100} \text{Log}(2k+1) = \text{Log} \prod_{k=1}^{100} (2k+1) = \text{Log}(3.5.7 \dots 201)$
 $= \text{Log}(1.3.5.7 \dots 201) \quad (1)$

Sea: $x = 1.3.5.7 \dots 201 \quad + \quad x = \frac{1.2.3.4.5 \dots 201}{2.4.6 \dots 200}$

$$+ \quad x = \frac{201!}{(1.2)(2.2)(2.3) \dots (2.100)} = \frac{201!}{2^{100}(1.2.3 \dots 100)} = \frac{201!}{2^{100}(100!)}$$

Luego, en (1): $\sum_{k=1}^{100} \text{Log}(2k+1) = \text{Log} \frac{201!}{100!(2^{100})}$

EJERCICIO 5. Sean n y k números naturales tales que $n > k$. Demostrar que:

$$S = \sum_{k=1}^n \exp_1 \left[\sum_{i=1}^n \text{Log} i - \sum_{i=1}^k \text{Log} i - \sum_{i=1}^{n-k} \text{Log} i + (n-k) \text{Log} x + k \text{Log} y \right]$$

es equivalente a: $(x+y)^n - x^n$.

Demostración. En efecto: $\sum_{i=1}^n \text{Log} i = \text{Log} \prod_{i=1}^n i = \text{Log} n! \quad (\text{Def. de factorial})$

$$+ S = \sum_{k=1}^n \exp_1 \left[\text{Log} n! - \text{Log} k! - \text{Log} (n-k)! + \text{Log} x^{n-k} + \text{Log} y^k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \exp_1 \left[\text{Log} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x)^{n-k} (y)^k \right] = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$+ S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k - \binom{n}{0} x^{n-0} y^0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k - x^n$$

$$\therefore S \equiv (x+y)^n - x^n$$

EJERCICIO 6. Hallar el coeficiente de x^{14} en el desarrollo de:

$$(x^3 - 2x^{-2})^{13}.$$

Solución. Si $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad + \quad T_{r+1} = \binom{13}{r} (x^3)^{13-r} (-2x^{-2})^r$

$$+ \quad T_{r+1} = \binom{13}{r} (-2)^r (x)^{39-5r} \quad . \quad \text{Si } x^{39-5r} = x^{14} \leftrightarrow 39-5r=14 \leftrightarrow r=5$$

Luego, el coeficiente del término buscado es: $C_5 = \binom{13}{5} (-2)^5 = -41,184$

EJERCICIO 7. El coeficiente del tercer término del desarrollo de

$(x\sqrt{x}+x^{-4})^n$ es mayor que el coeficiente del segundo término en 44. Hallar el término que no contiene a x .

Solución. Si $C_3 = C_2 + 44 \rightarrow \binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 44 \rightarrow \frac{n}{2}(n+1) = n + 44$

$$\text{de donde: } n^2 - 3n - 88 = 0 \rightarrow n = 11 \text{ o } n = -8 \notin \mathbb{N}$$

Término general del desarrollo: $T_{r+1} = \binom{11}{r} (x\sqrt{x})^{11-r} (x^{-4})^r$

Entonces, si $(x^{3/2})^{11-r} (x^{-4})^r = x^0 \rightarrow \frac{3}{2}(11-r) - 4r = 0 \rightarrow r = 3$

Luego, el término buscado es: $T_4 = \binom{11}{3} = 165$

EJERCICIO 8. Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si un término del desarrollo de $(\frac{a}{2}xy - 2y^2)^n$ es

$$33a^8x^7y^{17}, \text{ hallar: } \sum_{k=0}^{n+a} \binom{n+a}{k}.$$

Solución. Si $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{r} (\frac{a}{2}xy)^{n-r} (-2y^2)^r = 33a^8x^7y^{17}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{de donde: } x^{n-r} = x^7 \rightarrow n-r = 7 \\ y^{n+r} = y^{17} \rightarrow n+r = 17 \end{array} \right\} \rightarrow n=12 \text{ y } r=5$$

Cálculo de a : $\binom{12}{5} (\frac{a}{2})^7 (-2)^5 = 33a^8 \rightarrow a = -\frac{1}{4 \cdot 3^3} (\frac{12}{5}) = -6$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n+a} \binom{n+a}{k} = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6 = 64$$

EJERCICIO 9. Hallar la menor potencia a la que hay que elevar $a+b$ de tal manera que el desarrollo contenga el coeficiente 84. En qué lugar?

Solución. Dado que: $\binom{n}{r} = 84 = 2^3 \times 3 \times 7$; busquemos la menor potencia de n dando valores a r , esto es:

$$\text{Para } r=1 \rightarrow \binom{n}{1} = 84 \rightarrow n = 84$$

$$r=2 \rightarrow \binom{n}{2} = 84 \rightarrow \frac{n}{2}(n-1) = 84 \rightarrow n(n-1) = 2^3 \times 3 \times 7$$

Como $(n-1)n$ es el producto de dos números enteros consecutivos, no existe $n \in \mathbb{N}$ que satisfaga la ecuación para $r=2$.

$$\text{Para } r=3 \rightarrow \binom{n}{3} = 84 \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2^3 \times 3 \times 7 \rightarrow n(n-1)(n-2) = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 9 \times 8 \times 7$$

Como el segundo miembro es el producto de tres números enteros consecutivos entonces, la menor potencia a la que hay que elevar $(a+b)$ es $n=9$. Obviamente, existe dos términos equidistantes de los extremos que tienen como coeficiente 84. Conocido un término para $r=3$ y $n=9$, el otro término se determina aplicando la propiedad B.1: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Esto es, $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84$. Por tanto, los términos son: T_3 y T_7 .

EJERCICIO 10. Si el coeficiente binomial de x^{45} en el desarrollo de $(x+x^{-2})^{78}$ es $\binom{78}{a}$ siendo $a < 20$, hallar el coefic. de x^{4a-8} .

Solución. Término general: $T_{r+1} = \binom{78}{r}(x)^{78-r}(x^{-1})^r = \binom{78}{r}x^{78-3r}$

$$\text{Si } \binom{78}{r}x^{78-3r} = \binom{78}{a}x^{45} \leftrightarrow \begin{cases} 78-3r = 45 & \rightarrow r=11 \\ r+a = 78 & \rightarrow a=67 > 20 \\ r = a & \rightarrow a=11 < 20 \end{cases}$$

Luego, el coeficiente que contiene a x^{4a-8} lo obtenemos de: $x^{4a-8} = x^{78-3r}$, si $a=11 \rightarrow x^{36} = x^{78-3r} \rightarrow 36=78-3r \rightarrow r=14$.

Por tanto, el coeficiente buscado es: $C_{14} = \binom{78}{14}$.

EJERCICIO 11. Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de: $(1+3x^2-2x^3)^6$.

Solución. En este caso se trata de un trinomio al cual se le puede dar la forma de un binomio agrupando sus términos convenientemente: $[1+(3x^2-2x^3)]^6$.

$$+ [1+(3x^2-2x^3)]^6 = \sum_{r=0}^6 \binom{6}{r}(1)^{6-r}(3x^2-2x^3)^r = \sum_{r=0}^6 \binom{6}{r}(3x^2-2x^3)^r \quad (1)$$

$$(3x^2-2x^3)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}(3x^2)^{r-k}(-2x^3)^k = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}(3)^{r-k}(-2)^k x^{2r+2k}$$

$$\text{En (1): } (1+3x^2-2x^3)^6 = \sum_{r=0}^6 \sum_{k=0}^r \binom{6}{r} \binom{r}{k} (3)^{r-k} (-2)^k x^{2r+2k}$$

Para los enteros r y k se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$0 \leq k \leq r \leq 6$$

$$\text{Para } x^4: \quad 2r+2k = 8 \rightarrow r+k=4$$

Dando valores a k ($k \leq r$) encontraremos los valores de r correspondientes, esto es, para: $k=0 \rightarrow r=4$, $k=1 \rightarrow r=3$, $k=2 \rightarrow r=2$

Entonces en el desarrollo de la potencia dada, hay tres sumandos con x^8 , cuya suma total es el coeficiente buscado:

$$+ C = \binom{6}{4}\binom{4}{0}(3)^4(-2)^0 + \binom{6}{3}\binom{3}{1}(3)^3(-2)^1 + \binom{6}{2}\binom{2}{2}(3)^2(-2)^2 = 1215 - 1080 + 60$$

$$\therefore C = 195$$

EJERCICIO 12. Hallar la fórmula para: $S = \sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r}$

Solución. Expresando: $r^2 = r(r-1) + r$, se tiene:

$$S = \sum_{r=1}^n [r(r-1) + r] \binom{n}{r} = \sum_{r=1}^n r(r-1) \binom{n}{r} + \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r}$$

Para $r=1$, el primer sumando es cero $\rightarrow S = \sum_{r=2}^n r(r-1) \binom{n}{r} + \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} \quad (1)$

$$\begin{aligned} r(r-1) \binom{n}{r} &= \frac{r(r-1)n!}{r!(n-r)!} = \frac{r(r-1)n!}{r(r-1)(r-2)!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-2)!(n-r)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(r-2)![(n-2)-(r-2)]!} = n(n-1) \binom{n-2}{r-2} \end{aligned}$$

En (1): $S = n(n-1) \sum_{r=2}^n \binom{n-2}{r-2} + \sum_{r=1}^n n \binom{n-1}{r-1} \quad (B.4)$

$$= n(n-1) \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r} + n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = n(n-1) 2^{n-2} + n 2^{n-1} \quad (S.9b \text{ y } T.B.1)$$

$$= n \cdot 2^{n-2} (n-1 + 2) = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

EJERCICIO 13. Hallar el valor de: $S = \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{k=1}^4 \left[\binom{5}{i} + 2ki \right] \right)$

Solución. $S = \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{k=1}^4 \binom{5}{i} + 2i \sum_{k=1}^4 k \right) = \sum_{i=1}^5 [4 \binom{5}{i} + 2i \cdot \frac{4(4+1)}{2}] \quad (S.1 \text{ y } F.1)$

$$= 4 \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} + 20 \sum_{i=1}^5 i = 4 \left[\sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} - \binom{5}{0} \right] + 20 \cdot \frac{5(5+1)}{2}$$

$$= 4(2^5 - 1) + 300 = 424$$

EJERCICIOS: Grupo 51

En los ejercicios del 1 al 4, desarrollar usando el Teorema del Binomio.

1. $(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2x})^6$

3. $(\frac{2x}{y} + \frac{3y}{x})^5$

2. $(\frac{x^3}{a} - \frac{a^2}{x})^4$

4. $(\frac{2c}{x^2} + \frac{x}{2c^2})^4$

5. Demostrar que: $\frac{n!}{(n-3)!} + \frac{3n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = n^3$

6. Demostrar que: $(n+1)[n \cdot n! + (2n-1)(n-1)! + (n-1)(n-2)!] = (n+2)!$

7. Resolver: $\frac{(n+2)!}{(n-2)!} - \frac{72n!}{(n-2)!} = 0$

8. Hallar el valor de $E = \sum_{k=1}^n [\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}]$

9. Si $\binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} = 256$, hallar el valor de n .

10. Simplificar: $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$

11. Simplificar: $S = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-5}$

12. Si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \dots + (2n+1)\binom{n}{n}}{\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}} = \frac{23}{11}, \text{ hallar el valor de } n.$$

13. Si $\binom{n+1}{m+1} : \binom{n+1}{m} = 1$ y $\binom{n+1}{m} : \binom{n+1}{m-1} = \frac{5}{3}$, hallar m, n

14. Si $\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1}$ y $4\binom{n}{m} = 5\binom{n}{m-1}$, hallar $m+n$.

15. Simplificar: $\binom{n-2}{k-5} + \sum_{i=0}^4 \binom{n-2+i}{k-4+i}$

16. Si $\binom{22}{2n} : \binom{21}{2n-1} = \frac{11}{7}$ y $\binom{m+3}{3} - \binom{m+2}{2} = m+2$, hallar el valor de m^2+n^2 .

17. Si $\binom{n}{5} = 8\binom{n}{4}$ y $\binom{18}{4} - \binom{18}{m+2} = 0$, para $m=2$, hallar el valor de $m+n$.

18. Si $n \in \mathbb{N}$ y $\binom{80}{3n^2-4} = \binom{80}{2n-1}$, hallar el valor de $E=n^3-5$

19. Si $\frac{(m+1)!}{m!} + \frac{m!}{(m-2)!} + \frac{(m-1)!}{(m-2)!} = 6$ y $n=2m^2+1$, hallar el valor de $\binom{n}{m}$
20. Si $\binom{50}{x^2-20} = \binom{50}{118-14x}$, hallar el producto de todos los posibles valores enteros de x .
21. Sea $x \in \mathbb{N} | \binom{40}{x^2+15x-10} = \binom{40}{5x+6}$, entonces hallar el valor de $A = \binom{x^3}{3}$.
22. Si $\binom{32}{x} = \binom{32}{x+18}$, hallar el valor de $S = \binom{x}{4} + \binom{x}{5}$
23. Hallar el valor de n tal que: $\sum_{k=0}^n (2k+1)\binom{n}{k} = 80$
24. Al desarrollar $(2x-y^2)^7$ se tiene los términos Mx^ky^n , Nx^3y^n . Hallar $M-N$
25. El sexto término de $(\frac{xy}{2} - 2y^2)^n$ es $33ax^7y^{17}$, hallar $(a+n)^n$.
26. Si S_1 y S_2 son las sumas de todos los coeficientes de los desarrollos de $(1+x)^n$ y $(1+x)^m$, respectivamente, y si: $S_1=8S_2$ y $S_1S_2=512$, determinar el valor de mn .
27. Al desarrollar $(x+ay)^n$, en orden decreciente con respecto a las potencias de x , se tiene el cuarto término igual a $672x^6y^3$. Hallar $n-a$.
28. Sea A el término central en el desarrollo de $(\frac{a}{x} + \frac{x}{a})^{10}$ y B el término independiente de x en el desarrollo de $(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x})^8$, hallar $A+18B$.
29. Si ax^by es un término del desarrollo de $(x^2-2\sqrt[3]{y})^8$, hallar: $a \cdot b$
30. El término que contiene a $x^{1/3}$ en el desarrollo de:
 $(\frac{8}{5}x^{2/3}y^{1/3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^{-1/2}y^{-2/3})^{10}$ también contiene a y . Hallar su exponente.
31. Qué término del desarrollo de $(\frac{ax^6}{y^2} - \frac{by}{x^3})^{10}$ tiene a x e y con el mismo exponente.
32. Qué término del desarrollo de $(\frac{3x^2}{y} - \frac{y^2}{3x^3})^{10}$ está formado por potencias iguales de x e y .
33. Dado el binomio $(\frac{2}{x^3} - 3x^2)^n$, si en su desarrollo el mayor exponente de x es 24, hallar el coeficiente del término que contiene a x^0 .
34. En el desarrollo de $(x^{-3}-x^{-2})^{10}$ los términos que ocupan los lugares: $7m+2$ y $2m$ tienen coeficientes iguales. Hallar dichos términos.

35. Sea T_k el k -ésimo término del desarrollo de $(x+y)^N$ y T'_{n-k} el $(n-k)$ -ésimo término del desarrollo de $(x+y)^M$. Hallar en su forma más simple:

$$\sum_{n=2}^{M+N+2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} T_k \cdot T'_{n-k} \right). \quad \text{Nota: } \sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$$

36. Hallar el valor de: $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1/2)^k$ (Sug. Hacer cambio de variables)
37. Calcular el valor de: $A = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r-1} \right]$
38. Sean $A = \binom{2n-1}{n-2} + \binom{2n-1}{n-1}$ y $B = \binom{2n-3}{n-1} + \binom{2n-3}{n}$ tal que: $\frac{A}{B} = \frac{132}{35}$, hallar n .
39. El r -ésimo término de $(2kx+y^2)^{18}$ es $8,064x^ky^{18}$. Hallar: $2k+r$
40. Si el quinto término del desarrollo $(2x^2 - \frac{1}{2}xy^3)^n$ es $2640x^{13}y^{12}$, determinar el coeficiente del término que contiene a x^{18} .
41. En el desarrollo del binomio $(9x^2 - \frac{xy}{3})^{18}$, hallar el coeficiente del término que contiene a x^{12} .

42. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \dots + (2n+1)\binom{n}{n} = (n+1)2^n$$

[Sugerencia. Expresar $\binom{n}{r}$ en función de $\binom{n-1}{r-1}$]

43. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) $\sum_{i=1}^n ir^{i-1} = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}, r \neq 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

b) No existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que: $\sum_{k=2}^n (k-1)\binom{n-1}{k-1} = 64(n-1)$

44. Determinar el coeficiente de x^{18} en el desarrollo de $(3x+2x^2-x^{-1})^8$. Hallar también el término independiente.
45. Hallar el coeficiente del término que contiene a x^5y^3 en el desarrollo de $(px^2+qxy+ry^2)^3$; p, q, r constantes.
46. Dado $n \in \mathbb{N}$, resolver el sistema:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{n! \log_b(x^{x-1}) \cdot \text{Exp}_y^n}{k! \cdot y^k n! (n-k)!} \right], \quad x-y=1; \quad x>0, \quad y>0; \quad b = \sqrt{x^{1/n!}}$$



CAPITULO

8

SUCESIONES

8.1 INTRODUCCION

Es una experiencia común el encontrarse con un conjunto de números dispuestos en algún orden. El orden y disposición puede conocerse de antemano, o posiblemente habrá que descubrir una ley para ellos a partir de algunos datos. Por ejemplo, sea el conjunto:

$$\begin{array}{ccccccc} 16 & , & 8 & , & 4 & , & 2 & , & 1 & , & 1/2 & , & \dots ? \\ + & & + & & + & & + & & + & & + & & + \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_n \end{array}$$

Vemos que a cada número natural le corresponde un número a_n , entonces podemos expresar dicho conjunto por la fórmula:

$$a_n = a(n) = 16(2)^{1-n}, n \in \mathbb{N}$$

Esto define una función f cuyos elementos son los pares ordenados $\{(n, a_n)\}$.

Esto es:

$$f = \{(1, 16), (2, 8), (3, 4), (4, 2), \dots\}$$

El dominio de f es $\mathbb{N}$ y el rango es:

$$\{16, 8, 4, 2, \dots\} = \{a(n) | n \in \mathbb{N}, a(n) = 16(2)^{1-n}\}$$

Una función tal se llama sucesión numérica infinita.

DEFINICION 8.1 Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o subconjunto estandar de él. Si el dominio es $\mathbb{N}$, se llama sucesión infinita; si en cambio es un subconjunto estandar de $\mathbb{N}$, se llama sucesión finita. Los números del rango de la sucesión, llamados elementos de la sucesión, están restringidos a los números reales.

Ya que el dominio de toda sucesión es siempre $\mathbf{N}$ o $\mathbf{Z}^+$, podemos usar la notación $\{f(n)\}$ o $\{a_n\}$ para denotar una sucesión.

Ejemplos:

(1) $a = \{(1, -1), (2, 1), (3, 3), (4, 5), \dots\}$ es una sucesión infinita, en donde el n -ésimo término de la sucesión es $a_n = 2n - 3$, de modo que podemos escribir: $\{a_n\} = \{2n - 3\} = -1, 1, 3, 5, \dots, 2n - 3$

(2) $b = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$ es una sucesión finita, en donde, $b_n = 2n$, $n \in \mathbf{N}$, $1 \leq n \leq 5$, de modo que: $\{b_n\} = \{2n | n < 6\} = 2, 4, 6, 8, 10$

(3) La sucesión para la cual: $f(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n \text{ es impar} \\ \frac{2}{n+2} & , \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$

tiene como elementos: $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$

entonces: $f = \{(1, 1), (2, 1/2), (3, 1), (4, 1/3), (5, 1), \dots\}$

es una sucesión infinita.

Nota. Otro método para definir una sucesión es dar el primer término y una fórmula para el término $n+1$ en función del n -ésimo término. Tal tipo de fórmulas se llaman **fórmulas de recurrencia**.

EJEMPLO 1. Escribir los términos de la sucesión $\{a_n\}$ en la que: $a_1 = 16$ y $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)a_n$

Solución. Si $a_1 = 16 \rightarrow a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(16) = 8$, $a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)a_2 = 4$, $a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)a_3 = 2$

y así sucesivamente. Luego: $\{a_n\} = 16, 8, 4, 2, 1, \dots$

EJEMPLO 2. Escribir cuatro términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y en la que: $a_{n+1} = \frac{(a_n)^2}{(a_n - 1)(a_n + 1)}$

Solución. Se sustituye $a_1 = 2$ en la fórmula de recurrencia para obtener a_2 , luego éste para obtener a_3 , y así sucesivamente.

$$\rightarrow a_2 = \frac{(2)^2}{(2-1)(2+1)} = \frac{4}{3}; \quad a_3 = \frac{(4/3)^2}{(\frac{4}{3}-1)(\frac{4}{3}+1)} = \frac{16}{7}$$

$$\rightarrow a_4 = \frac{(16/7)^2}{(\frac{16}{7}-1)(\frac{16}{7}+1)} = \frac{256}{207}$$

Luego: $\{a_n\} = 2, \frac{4}{3}, \frac{16}{7}, \frac{256}{207}, \dots$

8.2 SUCESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS



Hay dos tipos de sucesiones que son importantes en la matemática elemental como para garantizar un estudio especial. La sucesión $\{a_n\}$, en donde $d = a_n - a_{n-1}$, $\forall n > 1$, se llama **sucesión aritmética** o **progresión aritmética**, d se llama **diferencia común**.

La sucesión $\{a_n\}$, en la que $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $\forall n > 1$, se llama **sucesión geométrica** o **progresión geométrica**, r se llama **razón común**.

a) Sea la sucesión aritmética: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Por definición: } d &= a_2 - a_1 \rightarrow a_2 = a_1 + d \\ d &= a_3 - a_2 = a_3 - a_1 - d \rightarrow a_3 = a_1 + 2d \\ d &= a_4 - a_3 = a_4 - a_1 - 2d \rightarrow a_4 = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ d &= a_n - a_{n-1} \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Luego, en (1): $\{a_n\} = a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \dots, a_1 + (n-1)d$

de donde: $a_n = a_1 + (n-1)d$

b) Sea la sucesión geométrica: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (2)

$$\begin{aligned} \text{Por definición: } a_2 &= r \cdot a_1 \\ a_3 &= r \cdot a_2 = r(r \cdot a_1) = a_1 r^2 \\ a_4 &= r \cdot a_3 = r(a_1 r^2) = a_1 r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= r \cdot a_{n-1} = r(a_1 r^{n-2}) = a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

Luego, en (2): $\{a_n\} = a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots, a_1 r^{n-1}$

de donde: $a_n = a_1 r^{n-1}$

Por tanto, tenemos fórmulas que comprenden el primer término, el n -ésimo término, n , d o r . Podemos usarlas para encontrar cualquiera de las variables cuando se conocen las otras tres.

EJEMPLO 1. Qué término de la sucesión aritmética:

$\{a_n\} = -15, -13, -11, \dots$, es 89?

Solución. De la sucesión dada: $a_1 = -15$, $a_n = 89$ y $d = -13 - (-15) = 2$

$$\text{Si } a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 89 = -15 + (n-1)2, \text{ de donde: } n = 53$$

Luego, $a_{53} = 89$

EJEMPLO 2. El cuarto término de una progresión aritmética es 16 y el décimo término es 28. Hallar el término 50.

$$\text{Solución. Se tiene: } a_4 = 16 \rightarrow a_1 + 3d = 16 \quad (1)$$

$$a_{10} = 28 \rightarrow a_1 + 9d = 28 \quad (2)$$

Ahora de (1) y (2) obtenemos: $a_1 = 10$ y $d = 2$

$$\text{Luego: } a_{50} = a_1 + 49d = 10 + 49(2) = 108 \quad -$$

EJEMPLO 3. Si a, b, c son tres números en progresión aritmética, y si aumentamos en 1, 4 y 9 respectivamente, son directamente proporcionales a los números 3, 9 y 18; hallar el valor de $E = a + b + c$.

$$\text{Solución. Sea } k \text{ el factor de proporcionalidad, si: } a+1 = 3k \rightarrow a = 3k-1$$

$$b+4 = 9k \rightarrow b = 9k-4$$

$$c+9 = 18k \rightarrow c = 18k-9$$

Dado que a, b, c es sucesión aritmética $\rightarrow d = b - a = c - b$

$$\rightarrow 9k-4 - (3k-1) = 18k-9 - (9k-4), \text{ de donde: } k = 2/3$$

$$\text{Luego: } a = 3(2/3) - 1 = 1, \quad b = 9(2/3) - 4 = 2, \quad c = 18(2/3) - 9 = 3 \rightarrow E = a + b + c = 6$$

EJEMPLO 4. La suma de tres números en progresión aritmética es 12 y la suma de sus cuadrados es 66. Hallar la sucesión.

$$\text{Solución. Sea la sucesión: } \{a_n\} = a - d, a, a + d \quad (1)$$

$$\rightarrow (a-d) + a + (a+d) = 12, \text{ de donde: } a = 4$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 66 \rightarrow 3a^2 + 2d^2 = 66$$

$$\rightarrow 3(4)^2 + 2d^2 = 66 \rightarrow d^2 = 9 \leftrightarrow d = 3 \text{ o } d = -3$$

$$\text{Luego, en (1): } \{a_n\} = 1, 4, 7 \text{ o } \{a_n\} = 7, 4, 1$$

EJEMPLO 5. Si los términos de lugares p, q, r de una progresión aritmética son a, b y c , respectivamente, hallar el valor de:

$$E = (q-r)a + (r-p)b + (p-q)c.$$

$$\text{Solución. Si: } a_p = a \rightarrow a + (p-1)d = a \quad (1)$$

$$b_q = b \rightarrow a + (q-1)d = b \quad (2)$$

$$c_r = c \rightarrow a + (r-1)d = c \quad (3)$$

Restando: (1)-(2) , (2)-(3) , (1)-(3) , obtenemos respectivamente:

$$a-b = (p-q)d \quad , \quad b-c = (q-r)d \quad , \quad c-a = (r-p)d$$

$$\text{Luego: } E = \left(\frac{b-c}{d}\right)a + \left(\frac{c-a}{d}\right)b + \left(\frac{a-b}{d}\right)c = \frac{(ab-ac) + (bc-ab) + (ac-bc)}{d}$$

de donde:

$$E = 0$$

EJEMPLO 6. Los números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$ son positivos y están en progresión aritmética de razón común d .

$$\text{Si } T_n = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}}$$

obtener una expresión simplificada de T_n en términos de a_1 , a_n y n .

Solución. Racionalizando el denominador de cada sumando se tiene:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{a_4 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d} \end{aligned}$$

Simplificando queda: $T_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}$; pero: $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$

$$\text{Luego: } T_n = \frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}$$

EJEMPLO 7. Demostrar que si a, b y c están en progresión geométrica, se cumple: $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$.

Demostración. En efecto, como a, b, c están en progresión geométrica, entonces:

$$\frac{b}{a} = r \quad \text{y} \quad \frac{c}{b} = r \rightarrow a = \frac{b}{r} \quad \text{y} \quad c = br$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } (a+b+c)(a-b+c) &= \left(\frac{b}{r} + b + br\right)\left(\frac{b}{r} - b + br\right) = b^2\left[\left(\frac{1}{r} + r\right) + 1\right]\left[\left(\frac{1}{r} + r\right) - 1\right] \\ &= b^2\left[\left(\frac{1}{r} + r\right)^2 - 1\right] = b^2\left(\frac{1}{r^2} + 1 + r^2\right) \\ &= \left(\frac{b}{r}\right)^2 + b^2 + (br)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. La suma de tres números en P.G. es 70, si se multiplican los dos extremos por 4 y el intermedio por 5, los productos están en P.A. Hallar la sucesión geométrica.

Solución. Sea la sucesión geométrica: $\{a_n\} = \frac{a}{r} : a : ar$

$$+ \frac{a}{r} + a + ar = 70 \rightarrow a\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = 70 \quad (1)$$

Sea la sucesión aritmética: $\{b_n\} = 4\left(\frac{a}{r}\right)$, $5a$, $4ar$

$$+ 5a - 4\left(\frac{a}{r}\right) = 4ar - 5a, \text{ de donde: } 2r^2 - 5r + 2 = 0 \leftrightarrow r = 2 \text{ o } r = 1/2$$

Sustituyendo ambos valores en (1) se obtiene: $a = 20$

$$\therefore \{a_n\} = 10 : 20 : 40 \text{ o } \{a_n\} = 40 : 20 : 10$$

EJEMPLO 9. Tres números diferentes cuya suma es igual a 93 forman una P.

G. También se pueden considerar como el primero, el segundo y el séptimo términos de una P.A. respectivamente. Hallar el producto de tales números.

Solución. Sean los números en P.G.: $a : a+d : a+6d$

$$\text{Entonces: } a + (a+d) + (a+6d) = 93 \leftrightarrow 3a+7d = 93 \quad (1)$$

$$\text{Además: } \frac{a+d}{a} = \frac{a+6d}{a+d} \rightarrow (a+d)^2 = a(a+6d) \rightarrow d=4a \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $a=3$ y $d=12 \rightarrow \{a_n\} = 3 : 15 : 75$

$$\therefore P = (3)(15)(75) = 3,375$$

EJEMPLO 10. En una P.G. se tiene: $a_1=2$, $a_{n-3}=-486$ y $a_n=13,122$. Hallar la razón y el número de términos.

$$\text{Solución. Si } a_{n-3} = -486 \rightarrow a_1 r^{n-4} = -486 \quad (1)$$

$$a_n = 13,122 \rightarrow a_1 r^{n-1} = 13,122 \quad (2)$$

$$\text{Dividiendo (2) entre (1) se tiene: } \frac{r^{n-1}}{r^{n-4}} = \frac{13,122}{-486} \rightarrow r^3 = -27 \rightarrow r = -3$$

$$\text{Luego en (1): } 2(-3)^{n-4} = -486 \rightarrow (-3)^{n-4} = (-3)^5 \leftrightarrow n-4=5 \rightarrow n=9$$

EJEMPLO 11. Dividir 45 en cuatro partes que están en P.G. y tales que el producto de la primera por la tercera es al producto de la segunda por la cuarta como 1 es a 4.

$$\text{Solución. Sean las partes de 45: } \frac{a}{r} : a : ar : ar^2 \quad (1)$$

$$+ \frac{a}{r} + a + ar + ar^2 = 45 \rightarrow a\left(\frac{1+r+r^2+r^3}{r}\right) = 45 \quad (2)$$

$$\text{Además: } \frac{(a/r)(ar)}{a(ar^2)} = \frac{1}{4}, \text{ de donde: } r^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

Sustituyendo en (2): $a=6$. Luego, en (1) se tiene: $3 : 6 : 12 : 24$

EJERCICIOS: Grupo 52

En los ejercicios del 1 al 5, expresar los primeros cinco términos de las sucesiones dadas.

1. $\{2n^2+1\}$

4. $a_1=100, a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 2)$

2. $\{(-1)^{n+1}(2n-1)\}$

5. $a_1=3, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}-a_n, \forall n \in \mathbb{R}$

3. $a_1=1, a_{n+1} = a_n^2 + 3$

En los ejercicios del 6 al 11, hallar una fórmula para el término n -ésimo de las sucesiones cuyos primeros 4 términos se dan.

6. 4, 8, 12, 16, ...

9. 2, 6, 10, 14, ...

7. -2, 7, 22, 43, ...

10. $(1 \times 2), -(3 \times 4), (5 \times 6), -(7 \times 8), ...$

8. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, ...$

11. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{18}, ...$

12. La suma del segundo y quinto términos de una P.A. es igual a 14, la suma del tercero y séptimo términos es igual a 8. Hallar el término cincuenta.

13. La suma del tercer y sexto términos de una P.A. es igual a 3, y la suma de sus cuadrados es igual a 45, hallar la sucesión.

14. Determinar el valor de k de modo que la sucesión: $\{8k+4, 6k-2, 2k-7\}$ sea aritmética.

15. La suma de tres términos en P.A. es 27 y su producto 504. Hallar la sucesión.

16. Dividir 20 en cuatro partes que están en P.A. y tales que el producto de la primera por la cuarta sea al producto de la segunda por la tercera como 2 es a 3.

17. Las cifras de un número entero positivo que tiene tres dígitos están en P.A. y su suma es 21. Si los dígitos se invierten, el nuevo número es 396 unidades mayor que el número original. Hallar el número original.

18. Si los números positivos a_1, a_2 y a_3 están en P.A. y los números positivos b_1, b_2 y b_3 están en P.G., y se sabe que $a_1=b_1=3$, $a_2-b_2=6$ y $a_3=b_3$, ha

llar el valor de: $\sum_{i=1}^3 (a_i + b_i)$.

19. Hallar el número de términos de la progresión: $324; -108; 36; \dots; \frac{4}{729}$
20. Dadas las sucesiones: $\{a_n\} = 1/3, 1, 5/3, 7/3, \dots, a_n$ y $\{b_n\} = 1/5, 4/5, 7/5, \dots, b_n$; hallar: a) $b_7 + b_{11}$, b) $15(a_n + b_n)$
21. En una P.G.: $a_1 = 1/27$ y $a_8 = 1/243$; hallar los tres primeros términos de la progresión.
22. El producto de tres números en P.G. es 216 y la suma de los productos que resultan tomados dos a dos es 156. Hallar los números.
23. Una P.A. y otra P.G. tienen por primer término 3, sus terceros términos iguales y la diferencia entre el segundo término de la P.A. menos el segundo término de la P.G. es 6. Hallar el segundo término de la P.G.
24. La suma de tres números en P.A. es 15. Si estos números se aumentan en 2, 1 y 3 respectivamente, las sumas quedan en P.G.. Calcular los números
25. En una P.G.: $a_1 = 3$, $a_{n+3} = -384$ y $a_n = 3072$. Hallar la razón y el número de términos.
26. Hallar cuatro números positivos que conforman una P.G., tales que:
 $a_1 + a_2 = 15$, $a_2 + a_4 = 60$.
27. Tres madres impacientes esperan consulta con niños de 1, 37 y 289 días de nacido. El médico para entretenerlas, les pide que averigüen dentro cuantos días las edades de sus niños estarán en P.G.
28. Demostrar que si tres números m, n, p consecutivos pertenecen a la vez a una P.A. y a una P.G. y ocupan en ellas el mismo lugar, entonces se cumple: $m^{n-p} \cdot n^{p-m} \cdot p^{m-n} = 1$
29. Sea la sucesión $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $a_n = 1/\sqrt{n}$. Usando propiedades de números reales probar que para cualquier n , se tiene:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$
30. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales cumple: $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$, $\forall n \geq 2$
 a) Deducir una expresión de a_n en términos de a_1 , a_2 y n
 b) Demostrar por inducción, que la expresión hallada en a) es válida para toda $n \geq 2$.



8.3 SUCESIONES MONOTONAS

DEFINICIÓN 8.2 Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es:

- a) **Creciente** si y sólo si: $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- b) **Estrictamente creciente** si y sólo si: $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- c) **Decreciente** si y sólo si: $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- d) **Estrictamente Decreciente** si y sólo si: $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Si se cumple cualquiera de estas cuatro propiedades, se dice que la sucesión es **monótona**.

EJEMPLO 1. Averiguar si la sucesión $\left\{\frac{n}{2n+3}\right\}$ es creciente, decreciente o monótona.

Solución. Supongamos que $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3}$ (1)

Como $n > 0$, multiplicamos cada extremo de (1) por $(2n+1)(2n+3)$

$$+ n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1) \Leftrightarrow 2n^2+3n \leq 2n^2+3n+1 \quad (2)$$

La igualdad (2) es válida $\forall n \in \mathbb{N}$ ya que el extremo derecho es igual al extremo izquierdo más uno.

Por tanto, la desigualdad (1) es válida y así la sucesión es creciente.

EJEMPLO 2. Determinar si la sucesión $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución. La sucesión puede escribirse:

$$\{a_n\} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

de donde: $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$, $a_3 = 1/3$

Vemos que $a_1 > a_2$, pero $a_2 < a_3$, entonces consideremos tres elementos consecutivos:

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$$

Si n es impar $\Rightarrow a_n > a_{n+1}$ y $a_{n+1} < a_{n+2}$

Si n es par $\Rightarrow a_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} > a_{n+2}$

Luego, la sucesión no es creciente ni decreciente y por lo tanto no es monótona.

EJEMPLO 3. Determinar si la sucesión $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ es creciente, decreciente o no monótona.

Solución. Los elementos de la sucesión se pueden escribir:

$$\{a_n\} = 2, 1, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \dots, \frac{n+1}{2n-1}, \frac{n+2}{2n+1}$$

Vemos que: $a_1=2$ y $a_2=1$, y así: $a_1 > a_2$

$$\text{En general: } a_n > a_{n+1} \rightarrow \frac{n+1}{2n-1} > \frac{n+2}{2n+1} \quad (1)$$

$$+ (n+1)(2n+1) > (n+2)(2n-1) \leftrightarrow 2n^2+3n+2 > 2n^2+3n-2 \quad (2)$$

La igualdad (2) obviamente es válida $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la desigualdad (1) es válida y así la sucesión dada es decreciente.

DEFINICION 8.3 El número C se llama cota inferior de la sucesión $\{a_n\}$ si $C \leq a_n$, para todo entero positivo n , y el número S se llama cota superior de la sucesión $\{a_n\}$ si $S \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo en la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}$$

El número 0 es una cota inferior, lo mismo $1/3$, y cualquier otro número que sea menor o igual a $1/3$ es una cota inferior de esta sucesión.

Para la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cuyos elementos son:

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

El número 1 es una cota superior, 5 también lo es. Cualquier número que sea mayor o igual a 1 es una cota superior de esta sucesión y cualquier número negativo servirá como una cota inferior.

Vemos entonces que una sucesión puede tener muchas cotas superiores o inferiores.

DEFINICION 8.4 Si m es una cota inferior de una sucesión $\{a_n\}$ y si $C < m$, entonces m se llama **máxima cota inferior** de la sucesión. Análogamente, si M es una cota superior de una sucesión $\{a_n\}$ y si $M < S$, entonces M se llama la **mínima cota superior** de la sucesión.

La máxima cota inferior de $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ es $1/3$ ya que toda cota inferior de la sucesión es menor o igual que $1/3$. La mínima cota superior de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es 1 ya que toda cota superior de la sucesión es mayor o igual que 1 .

DEFINICION 8.5 Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está acotada si y sólo si tiene una cota superior y una inferior.

Ya que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene una cota superior 1 y una cota inferior 0 , esto es: $0 < \frac{1}{n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces se dice que está acotada. Esta sucesión es también una sucesión decreciente y por tanto es una sucesión monótona acotada.

La sucesión $\{2^n\}$ está acotada inferiormente por 2 , pues $2 \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. No existe cota superior, porque no hay un número fijo S que satisfaga: $2^n \leq S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIOS: Grupo 53

DISCUTIR LAS COTAS Y MONOTONÍA DE LAS SUCESIONES SIGUIENTES.

1. $\left\{\frac{3n-1}{4n+1}\right\}$
2. $\left\{\frac{1}{n+\sin n^2}\right\}$
3. $\left\{\frac{2^n}{1+2^n}\right\}$
4. $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}$
5. $\left\{\frac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$
6. $\left\{\frac{n^3-1}{n}\right\}$
7. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$
8. $\{n^2 + (-1)^n n\}$
9. $\left\{\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right\}$
10. $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}\right\}$
11. $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$
12. $\left\{\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}\right\}$
13. $\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}$
14. $\{(-1)^n \cdot \sqrt{n}\}$
15. $\left\{\log\left(\frac{2n}{n+1}\right)\right\}$
16. $\left\{\frac{(n+1)^2}{n^2}\right\}$
17. $\left\{\frac{2^n-1}{2^n}\right\}$
18. $\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\}$
19. $\left\{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$
20. $\left\{(-1)^n \frac{n^2}{5^n}\right\}$
21. $\{\cos n\pi\}$
22. Demostrar que la sucesión: $a_n = (c^n + d^n)^{1/n}$, con $0 < c < d$, es acotada y monótona.

8.4 LIMITE DE UNA SUCESION

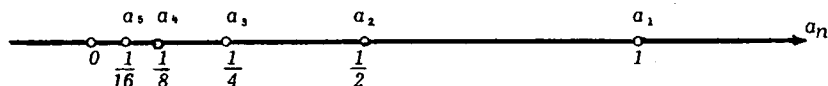
Recordando la definición 8.1, convendrá marcar los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sobre una recta numérica. Para evitar confusión marcaremos los puntos asociados con los números de la sucesión mediante símbolos que les representa en la sucesión.



De esta manera podemos establecer una correspondencia entre los términos de una sucesión de números y un conjunto de puntos sobre la recta numérica.

Para estudiar el comportamiento de una sucesión de números y de los puntos correspondientes a ellos, consideremos los siguientes ejemplos:

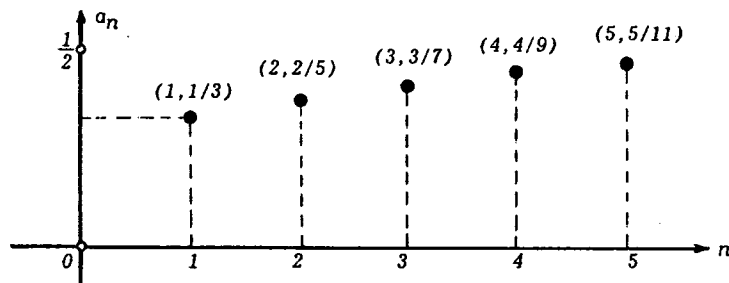
a) $\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$



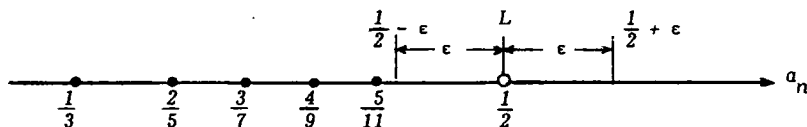
Los puntos que corresponden a términos sucesivos de la sucesión se aproximan cada vez más al punto 0 a medida que n crece, es decir, a_n tiende a cero ($a_n \rightarrow 0$) a medida que n crece.

b) $\{a_n\} = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}$

Un trazo de algunas parejas ordenadas en esta sucesión se muestra en la figura siguiente.



Ahora tracemos en un eje horizontal los puntos correspondientes a los elementos sucesivos de la sucesión.



Vemos que los elementos sucesivos de la sucesión se aproximan cada vez más a $1/2$ cuando n crece. Se observa también que fijada la distancia $\epsilon > 0$ alrededor de $1/2$, los números $a_n = \frac{n}{2n+1}$ se encontrarán dentro del intervalo:

$\langle \frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon \rangle$ para los índices $n \geq 6 > 5 = k$. Obviamente si se varía la distancia ϵ alrededor de $1/2$, los números a_n se encontrarán en el mismo intervalo pero con otro índice $n \neq 6$.

Expresando esto de otra manera, podemos hacer $|a_n - 1/2|$ menor que cualquier ϵ dada tomando n bastante grande. Es decir, para $\epsilon > 0$ existe un número $k > 0$ (que depende de ϵ) tal que $|a_n - 1/2| < \epsilon$ siempre que $n > k$.

En general, si existe un número L tal que $|a_n - L|$ es arbitrariamente pequeño para n suficientemente grande, decimos que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L .

DEFINICION 8.6 Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que tiene límite L , si para $\epsilon > 0$ existe un número $k > 0$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo entero $n > k$, y escribimos:

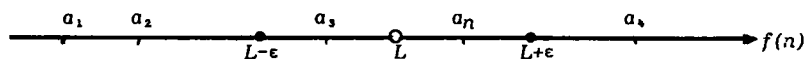
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

o equivalentemente:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid \text{si } n > k \rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

Llamaremos **entorno** del número L al conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad:

$$|a_n - L| < \epsilon \leftrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$



Por ejemplo, para $L=3$ y $\epsilon=0.1$, el entorno del número 3 es el intervalo: $\langle 2.9, 3.1 \rangle$.

Geométricamente, el entorno del número L representa el intervalo $\langle L - \epsilon, L + \epsilon \rangle$. Si los términos de la sucesión se representan por puntos del eje real, cualquier entorno del número L que tomemos, comenzando de un número determinado, todos los términos de la sucesión caen en este entorno y no salen de él, continuando acumulándose alrededor del punto L , que representa el límite de la

sucesión numérica.

EJEMPLO 1. Dada la sucesión: $a_n = 1/n$, demostrar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Demostración. Apoyándonos en el principio de Arquímedes que dice: "Si r es un número real positivo entonces existe un número natural n tal que $1 < nr$, esto es: $0 < \frac{1}{n} < r$ "

Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe un número natural $k > 0$ tal que: $0 < \frac{1}{k} < \epsilon$

De modo que si consideramos $n \geq k$, tenemos: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$

Esto es: $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \epsilon, \forall n \geq k$. Luego, por la definición 8.6: $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

Lo que demuestra que: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

EJEMPLO 2. Usar la definición 8.6 para demostrar que la sucesión $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$ tiene límite $1/2$.

Demostración. En efecto:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid \text{si } n > k \rightarrow \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

$$(2) \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{4n+2} \right| = \frac{1}{4n+2}$$

(3) Debemos encontrar un número $k > 0$, tal que si:

$$k > 0 \rightarrow \frac{1}{4n+2} < \epsilon, \text{ de donde: } n > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$$

(4) Por tanto, si $n > k \rightarrow k = \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$. La definición 8.6 es válida.

Por ejemplo, para $\epsilon = 1/8$, obtenemos: $k = 3/2 \rightarrow \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{8}, \forall n > 3/2$

En efecto, si tomamos $n=2 \rightarrow \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{10} \right| = \frac{1}{10} < \frac{1}{8}$

EJEMPLO 3. Si $a_n = \frac{2n+6}{3n+3}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, hallar el mínimo entero k tal que

$$\text{si } n > k, \text{ entonces: } \left| \frac{2n+6}{3n+3} - L \right| < 0.005$$

Solución. En el ejemplo 1 se demostró que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$. En general si c es

un número real finito, entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} (c/n) = 0$

(1) Aplicando esta propiedad evaluaremos L dividiendo numerador y denominador de a_n entre n .

$$\text{Entonces: } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 6/n}{3 + 3/n} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \left| \frac{2n+6}{3n+3} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n+6-2n-2}{3n+3} \right| = \frac{4}{3n+3}$$

$$(3) \text{ Luego, si } n > k + \frac{4}{3n+3} < \epsilon \rightarrow n > \frac{4-3\epsilon}{3\epsilon}$$

$$(4) \text{ Para } \epsilon = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}, \text{ obtenemos: } n > 265\frac{2}{3}$$

Dado que $n > k$, el mínimo entero es $k=265$.

EJEMPLO 4. Demostrar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{5-n}{2+3n} \right\} = -\frac{1}{3}$

Demostración. En efecto:

$$(1) \forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \mid \text{Si } n > k \rightarrow \left| \frac{5-n}{2+3n} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right| < \epsilon$$

$$(2) \left| \frac{5-n}{2+3n} + \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{15-3n+2+3n}{3(2+3n)} \right| = \frac{17}{6+9n}$$

$$(3) \text{ Luego, si } n > k + \frac{17}{6+9n} < \epsilon \rightarrow n > \frac{17-6\epsilon}{9\epsilon}$$

$$(4) \text{ Por tanto, necesitamos elegir } k = \frac{17-6\epsilon}{9\epsilon}, \text{ para probar que:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{5-n}{2+3n} \right\} = -\frac{1}{3}$$

8.5 TEOREMAS SOBRE LÍMITES

TEOREMA 8.1 (Teorema de Unicidad)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$, se verifica que: $L_1 = L_2$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Supongamos que } L_1 \neq L_2 \rightarrow |L_1 - L_2| > 0 \rightarrow \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$$

$$(2) \text{ Para } \epsilon_1 = \epsilon/2 \rightarrow \exists k_1 > 0 \mid \text{Si } n > k_1 \rightarrow |a_n - L_1| < \epsilon_1 = \epsilon/2$$

$$\rightarrow \exists k_1 > 0 \mid \text{Si } n > k_1 \rightarrow |a_n - L_1| < \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$$

$$(3) \text{ Para } \epsilon_2 = \epsilon/2 \rightarrow \exists k_2 > 0 \mid \text{Si } n > k_2 \rightarrow |a_n - L_2| < \epsilon_2 = \epsilon/2$$

$$\rightarrow \exists k_2 > 0 \mid \text{Si } n > k_2 \rightarrow |a_n - L_2| < \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$$

(4) De (2) y (3) para $n \geq \max\{k_1, k_2\}$, el mayor entre dos valores, tenemos:

$$|a_n - L_1| + |a_n - L_2| < |L_1 - L_2|$$

$$(5) \text{ Pero: } |a_n - L_1| + |a_n - L_2| = |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \geq |L_1 - L_2|$$

(Desigualdad Triangular)

(6) Combinando (4) y (5) obtenemos: $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$

(7) La hipótesis (1) conduce a un absurdo, por tanto: $L_1 = L_2$

TEOREMA 8.2 La sucesión constante $\{c\}$ tiende a c como su límite.

TEOREMA 8.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} c(a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

TEOREMA 8.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Demostración. En efecto:

Sean: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$

Dado un $\epsilon > 0$, usando la definición de límite para cada caso se tiene:

(2) Para $\epsilon_1 = \epsilon/2 \rightarrow \exists k_1 > 0$ si $n > k_1 \rightarrow |a_n - L_1| < \epsilon_1$

(3) Para $\epsilon_2 = \epsilon/2 \rightarrow \exists k_2 > 0$ si $n > k_2 \rightarrow |b_n - L_2| < \epsilon_2$

(4) Luego, si $n > \max\{k_1, k_2\} \rightarrow |(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$

(5) Pero: $|(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2|$

(6) Combinando (4) y (5) se deduce que:

$$|a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \epsilon, \forall n > k, \text{ donde } k = \max\{k_1, k_2\}.$$

(7) Por tanto, se concluye que: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

TEOREMA 8.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)(b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$

TEOREMA 8.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

DEFINICION 8.7 Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite L , se dice que la sucesión es **convergente**, y decimos que a_n converge a L (se denota $a_n \Rightarrow L$).

Si la sucesión no tiene el límite L se dice que es **divergente**.

EJEMPLO 4. Determinar si la sucesión $a_n = \frac{3n^2 - n}{5n^2 - 6}$ es convergente o divergente

Solución. Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{5n^2 - 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - (1/n)}{5 - (6/n^2)} = \frac{3-0}{5-0} = \frac{3}{5}$

Luego, la sucesión a_n es convergente, esto es: $\{a_n\} \rightarrow L = 3/5$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Se define la sucesión $b_n = 3n^2 - 2n$ y se tiene la sucesión

$a_n = 0, 2, 6, 12, 20, \dots$. Si ahora se define la sucesión

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}, \text{ hallar: } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Solución. Hallamos el término n -ésimo de a_n por el método de las diferencias sucesivas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \\ & & & 2 & 4 & 6 & 8 \\ & & & & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Como la diferencia constante se obtuvo en el segundo intento, la ley de formación del término n -ésimo de a_n está dada por la ecuación: $y = an^2 + bn + c$

Si $n=1 \rightarrow 0 = a+b+c$; $n=2 \rightarrow 2 = 4a+2b+c$; $n=3 \rightarrow 6 = 9a+3b+c$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos: $a=1$, $b=-1$, $c=0$

Entonces: $a_n = n^2 - n$

$$\text{Si } L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{3n^2 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/n}{3 - 2/n} = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 2. Hallar el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+5n}-4}{5n+7}$

Solución. En este caso debemos dividir los términos del denominador entre n y los del numerador entre: $n = \sqrt{n^2}$.

$$\rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + 5/n} - 4/n^2}{5 + 7/n} = \frac{\sqrt{9 + 0} - 0}{5 + 0} = \frac{3}{5}$$

EJERCICIO 3. Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1)$

$$\begin{aligned} \text{Solución. Sea } L &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(\sqrt{n+1}+1) - \sqrt{n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(\sqrt{n+1}+1) - \sqrt{n}][(\sqrt{n+1}+1) + \sqrt{n}]}{(\sqrt{n+1}+1) + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1}+1)^2 - (\sqrt{n})^2}{1 + \sqrt{n} + \sqrt{1+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 2\sqrt{n+1}}{1 + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Dividiendo el numerador y denominador entre $n^{\frac{1}{2}}$ se tiene:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{1+1/n}}{1/n^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1} + \sqrt{1+1/n}} = \frac{0 + 2\sqrt{1+0}}{0 + 1 + \sqrt{1+0}} = 1$$

EJERCICIO 4. Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3)$

Solución. La suma: $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2}{4} (n+1)^2 \rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{4} (n+1)^2$

$$+ L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 5. Hallar el límite de la sucesión: $\{\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\}$, $n \in \mathbb{N}$

Solución. Haciendo uso de la identidad: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^2-n^3} + n &= \frac{(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n)(\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2} - n \cdot \sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2)}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^3} - n \cdot \sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{n^2-n^3})^3 + n^3}{n \cdot \sqrt[3]{n+2n^2+n^3} - n \cdot \sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} = \frac{n}{\sqrt[3]{n+2n^2+n^3} - \sqrt[3]{n^2-n^3} + n} \\ + L &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2-n^3} + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n+2n^2+n^3} - \sqrt[3]{n^2-n^3} + n} \end{aligned}$$

Dividiendo cada término del numerador y del denominador entre n , se tiene:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1/n^3 + 2/n + 1} - \sqrt[3]{1/n - 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0 + 0 + 1} - \sqrt[3]{0 - 1 + 1}}$$

de donde: $L = 1/3$

EJERCICIO 6. Sea S_1 la suma de n términos de la sucesión:

$\{(2n-1), 2(2n-3), 3(2n-5), 4(2n-7), \dots\}$ y sea S_2 la suma de

n términos de la sucesión: $\left\{\frac{1-a^3}{a}, \frac{3-4a^3}{a}, \frac{5-9a^3}{a}, \frac{7-16a^3}{a}, \dots\right\}$, $a \neq 0$

Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 - n^2/a}{n^3}$

Solución. $S_1 = \sum_{k=1}^n k[2n-(2k-1)] = (2n+1) \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2$

$$= (2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}(n+1)(2n+1) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)-k^2 a^3}{a} = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^n k - \frac{n}{a} - a^3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{a}(n+1) - \frac{n}{a} - \frac{a^2 n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$+ S_1 = \frac{n^2}{a} - \frac{na^2}{6}(n+1)(2n+1) \rightarrow S_1 + S_2 - \frac{n^2}{a} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)(1-a^2)$$

$$\therefore L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 - n^2/a}{n^3} = \left(\frac{1-a^2}{6}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1-a^2}{3}$$

EJERCICIO 7. Sea S_1 la suma de los n primeros términos de la sucesión:

$\left\{\frac{1}{1 \times 2} \binom{n}{0}, \frac{1}{2 \times 3} \binom{n}{1}, \frac{1}{3 \times 4} \binom{n}{2}, \dots\right\}$ y S_2 la suma de los n

primeros términos de la sucesión: $\left\{ \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \dots \right\}$. Hallar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nS_1}{S_2} - \frac{2^{n+3}}{n+1} \right)$$

Solución. Tenemos: $S_1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}$ y $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$(1) \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+2)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)(k+2)![(n+2)-(k+2)]!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \binom{n+2}{k+2}$$

$$\rightarrow S_1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k} \quad (\text{Cambio de índice})$$

$$\rightarrow S_1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1} \right]$$

$$\text{Pero: } \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n \rightarrow \sum_{r=0}^{n+2} \binom{n+2}{r} = 2^{n+2} \quad (\text{T.B.1})$$

$$\rightarrow S_1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[2^{n+2} - 1 - (n+2) \right] = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$$

$$(2) \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \rightarrow S_2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) = -\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{0+2} \right) \quad (\text{S.4})$$

$$\rightarrow S_2 = \frac{n}{2(n+2)}$$

$$\text{Luego: } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nS_1}{S_2} - \frac{2^{n+3}}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2(2^{n+2} - n - 3)}{n+1} - \frac{2^{n+3}}{n+1} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} -2 \left(\frac{n+3}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3/n}{1+1/n} \right) (-2) = -2$$

EJERCICIO 8. Sean: $S_1 = \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)(n+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \binom{n}{k}$ y $S_2 = \sum_{k=2}^{n+4} \frac{2}{n+2} \binom{n+2}{k-2}$

Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 - S_2 + \frac{n+3}{2})$

Solución. (1) $\frac{(n+1)(n+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \binom{n}{k} = \frac{(n+1)(n+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{(n+3)!}{(n+2)(k+3)![(n+3)-(k+3)]!} = \frac{1}{n+2} \binom{n+3}{k+3}$$

$$\rightarrow S_1 = \left(\frac{1}{n+2} \right) \sum_{k=0}^n \binom{n+3}{k+3} = \left(\frac{1}{n+2} \right) \sum_{k=3}^{n+3} \binom{n+3}{k} = \frac{1}{n+2} \left[\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} - \binom{n+3}{0} - \binom{n+3}{1} - \binom{n+3}{2} \right]$$

$$\rightarrow S_1 = \frac{1}{n+2} \left[2^{n+3} - 1 - (n+3) - \frac{1}{2}(n+3)(n+2) \right] = \frac{2^{n+3}}{n+2} - \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{2}$$

$$S_2 = \frac{2}{n+2} \sum_{k=2}^{n+4} \binom{n+2}{k-2} = \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} = \frac{2}{n+2} (2^{n+2}) = \frac{2^{n+3}}{n+2}$$

$$\text{Luego: } L = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 - S_2 + \frac{n+3}{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{n+4}{n+2}) = -1$$

EJERCICIOS: Grupo 54

En los ejercicios siguientes, usar la definición de límite para probar que la sucesión dada tiene límite hallando k para ϵ dado.

1. $\left\{ \frac{3}{n-1} \right\}$, $L=0$

2. $\left\{ \frac{8n}{2n+3} \right\}$, $L=4$

3. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$, $L=0$

4. $\left\{ \frac{3n-1}{2n+1} \right\}$, $L=3/2$

5. $\left\{ \frac{2-n}{3+2n} \right\}$, $L=-1/2$

6. $\left\{ \frac{2n^2+1}{3n^2} \right\}$, $L=2/3$

En los ejercicios siguientes determinar si la sucesión dada es convergente o divergente. Si la sucesión converge, hallar su límite.

7. $\left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots \right\}$

12. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

8. $\left\{ \frac{3n^2+1}{2n^2+n} \right\}$

13. $\{\sqrt{n^2-5n+6} - n\}$

9. $\left\{ 3, 2, \frac{9}{5}, \frac{12}{7}, \dots \right\}$

14. $\left\{ \frac{4n}{\sqrt{n^2+1}} \right\}$

10. $\left\{ \frac{3n+1}{3/n+2n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}$

15. $\left\{ \frac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}} \right\}$

11. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} \right\}$

16. $\left\{ \log\left(\frac{2n}{n+1}\right) \right\}$

17. Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) = L$. Hallar el menor número natural k tal que:

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - L \right| < \epsilon, \forall n > k$$

18. Se tiene una P.A. no constante, cuyo primer término es $a_1=1$ y donde $a_1, a_2, \dots$ son términos consecutivos de una P.G. de razón r . Hallar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n + nr}{n} \right)$$

19. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por: $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, $a_1=1$. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

20. Hallar: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+3)^2(2-3n)}{(n-1)(2-n)^2} + \frac{(n-2)(2-n)}{(n+1)^3} \right]$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+10} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
21. Empleando la definición de límite de una sucesión, demostrar que:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + 4(10^{2n})}{6 + 7(10^{2n})} \right\} = \frac{4}{7}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3 \cdot 10^n - 5}{4 \cdot 10^n + 2} \right\} = \frac{3}{4}$
22. Sean: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + (-1)^n \left(\frac{1}{n+2} \right) \right]$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\frac{1}{n} + 2n}$ y $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-n}{2+3n} \right)$. Hallar: $A+B+C$.
23. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por: $a_0 = 4$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{2}{9^n}$, $n \geq 1$. Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
24. Se define la sucesión $b_n = 2n^2 - 5n$ y se tiene la sucesión $\{a_n\} = -2, 7, 22, 43, 70, \dots$. Si $c_n = (a_n) : (b_n)$, hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.
25. Sea la sucesión $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ definida por: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, $n \geq 3$
- a) Demostrar por inducción matemática que: $a_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-1}$, si $n \geq 2$.
- b) Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \frac{\sqrt{n(n+3)} - n}{n(\sqrt{n^2+5} + n)} \right]$
26. Dada la sucesión $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ definida por: $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$ y $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$, $n \geq 3$, demostrar que $|a_n - a_{n-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
27. Analizar la convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ definida de la siguiente manera: $a_1 = -6/5$, $a_n = \frac{3}{3 + \prod_{k=1}^n a_{n-1}}$, $n \geq 2$.
28. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$ demostrar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)(b_n) = AB$.
29. Empleando la definición de límite de una sucesión convergente, probar que: Si $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R} | -1 < t < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0$
30. Sea S_n la suma de n términos de la P.A. cuyos primeros términos son: $\frac{2a^2-1}{a}$, $\frac{4a^2-3}{a}$, $\frac{6a^2-5}{a}$. Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$
31. Sea S_n la suma de n términos de la sucesión: $\{(2n-1), 2(2n-3), 3(2n-5), 4(2n-7), \dots\}$; hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$

32. Sea S_n la suma de n términos de la sucesión:

$$\left\{ \frac{9}{1 \times 2}, \frac{9}{2 \times 3}, \frac{9}{3 \times 4}, \frac{9}{4 \times 5}, \dots \right\}, \text{ hallar: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

33. Si $S_1, S_2, \dots, S_p$ son las sumas respectivas de n términos de progresiones aritméticas cuyos primeros términos son $1, 2, 3, 4, \dots$, y cuyas diferencias son $1, 3, 5, 7, \dots$; hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \sum_{k=1}^p S_k$

34. Sean: S_1 la suma de n términos de la sucesión:

$$\left\{ \frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5}, \frac{1}{5 \times 7}, \frac{1}{7 \times 9}, \dots \right\} \text{ y } S_2 \text{ la suma de } n \text{ términos de la sucesión: } \left\{ 1 \binom{n}{0}, \frac{1}{2} \binom{n}{1}, \frac{1}{3} \binom{n}{2}, \frac{1}{4} \binom{n}{3}, \dots \right\}, \text{ hallar: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_1 + \frac{S_2}{2^n} \right)$$

35. Si S_n es la suma de los n primeros términos de la sucesión $\{a_n\} = \{n(\frac{2}{5})^{2n}\}$ calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + \frac{4}{2^n} a_n)$

36. Sea $\{a_k\}$ la sucesión de números reales, en la cual $a_k = \frac{-2}{(2k+1)(2k-1)}$

$$\text{Si } S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \text{ hallar: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

37. Dada la sucesión $\{a_k\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, donde $a_k = k^2 \binom{n}{k}$; calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{2^{n-1} \cdot n^2} \right)$ siendo: $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$. (Sug. Expresar: $k^2 = k(k-1) + k$)

38. Sea S_1 la suma de los n primeros términos de la sucesión:

$$\left\{ \frac{n+1}{2} \binom{n}{1}, \frac{n+1}{3} \binom{n}{2}, \frac{n+1}{4} \binom{n}{3}, \dots \right\} \text{ y } S_2 = \sum_{k=2}^{n+3} \binom{n+1}{k-2}$$

$$\text{Hallar: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{2n^2(S_2 - S_1)}$$

39. Dada la sucesión: $\left\{ \frac{-2}{3 \times 5}, \frac{-2}{5 \times 7}, \frac{-2}{7 \times 9}, \dots \right\}$

- a) Hallar S_n , la suma de los n primeros términos de la sucesión.
 b) Demostrar por inducción matemática, la fórmula S_n , hallada en a).
 c) Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.



8.6 SERIES INFINITAS

Sea $\{a_k\} = a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, una sucesión y

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$, una suma. Entonces, la serie infinita denotada por $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, es la sucesión: $\{a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots\}$, donde

el número a_k se denomina término k -ésimo de la serie, y el número s_n , suma parcial n -ésima.

De modo que si convenimos en asignar: $s_0 = a_0$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

la suma $\{s_n\}$ se denomina sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Observaciones:

(1) Decir que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge al número L es decir que la sucesión $\{s_n\}$ converge al número L . Esto es:

$$\text{Si } \sum_{k=0}^{\infty} a_k = L \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = L$$

(2) Decir que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, es decir que la suma $\{s_n\}$ diverge.

(3) Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge al número L , entonces L se llama suma de la serie y escribimos: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$ o $a_0 + a_1 + a_2 + \dots = L$

EJEMPLO 1. La serie: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^n$ es divergente

En efecto, observamos que la n -ésima suma parcial viene dada por:

$$s_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$$

Como la sucesión $\{s_n\}$ no es acotada (no tiene cota superior) no puede converger, por lo tanto, la serie dada es divergente.

EJEMPLO 2. La serie: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ es divergente

En efecto, aquí: $s_n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + n$, esto es:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{para } n \text{ impar: } 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{para } n \text{ par: } 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Luego, $\{s_n\}$ tiene dos límites diferentes, en consecuencia no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, es decir, $\{s_n\}$ no converge.

Una de las series que tiene muchas aplicaciones se presenta en el siguiente

EJEMPLO 3. LA SERIE GEOMETRICA

a) Si $|r| < 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

b) Si $|r| > 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k$ diverge

Demostración. En efecto, una suma parcial de la serie geométrica: $\sum_{k=0}^n r^k$, es el número: $S_n = \sum_{k=0}^n r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$ (1)

Multiplicando por r se tiene: $rS_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}$ (2)

Restamos ahora (1)-(2), obteniendo:

$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1} \rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1 \quad (3)$$

Si $|r| < 1$, entonces: $r^{n+1} \rightarrow 0$ y, por tanto, en (3): $S_n \rightarrow \frac{1}{1-r}$

Esto prueba la parte a), es decir: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

Para $r=1$, utilizando (1) vemos que: $S_n = 1 + (1 + 1 + 1 + \dots) = 1 + n$

Por tanto, la serie diverge.

Para $r > 1$, $r \neq 1$, utilizamos (2). Como en este caso $\{r^{n+1}\}$ diverge, entonces $\{S_n\}$ diverge.

Un caso especial de la serie geométrica es: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$

Dado que: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Comenzando la suma en $k=1$, en lugar de en $k=0$, obtenemos: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$

cuyas sumas parciales: $s_1 = \frac{1}{2}$

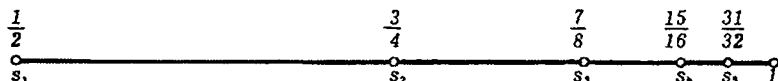
$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$s_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

se ilustran en la figura siguiente:



Podemos observar que cada nueva suma parcial se sitúa a medio camino entre la suma previa y el número 1.

En el sistema decimal, la serie geométrica desempeña un papel importante.

Para comprobarlo, tomemos la serie para $r=1/10$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1 - 1/10} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9}$$

La n -ésima suma parcial de esta última serie es:

$$s_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n}$$

Tomemos ahora la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{10^k} \right)$, con $a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ (4)

Las sumas parciales en este caso son:

$$t_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} \right) = 9s_n$$

Como $\{s_n\}$ converge, entonces $\{t_n\}$ es acotada. Esto implica que $\{t_n\}$ es acotada. Dado que $\{t_n\}$ es creciente, será convergente, esto es, la serie (4) converge. La suma de esta serie es lo que da sentido a la fracción decimal:

$$. 0.a_1a_2a_3\dots$$

EJEMPLO 4. Hallar la fracción generatriz de la fracción decimal $0.\overline{136}$...

Solución. Comenzamos por escribir la fracción decimal como una serie de sus sumas parciales, esto es:

$$\begin{aligned} 0.1363636\dots &= 0.1 + (0.036 + 0.00036 + \dots) \\ &= \frac{1}{10} + \left(\frac{36}{10^3} + \frac{36}{10^6} + \frac{36}{10^9} + \dots \right) \end{aligned}$$

La suma entre paréntesis es la serie geométrica infinita en la que:

$$a_1 = \frac{36}{1000} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{100}$$

$$\begin{aligned}
 0.1363636... &= \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{36}{100^k} \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} \left(\frac{36}{1 - 1/100} \right) \\
 &= \frac{1}{10} + \frac{36}{990} = \frac{3}{22}
 \end{aligned}$$

La serie geométrica aparece naturalmente en muchas otras cuestiones.

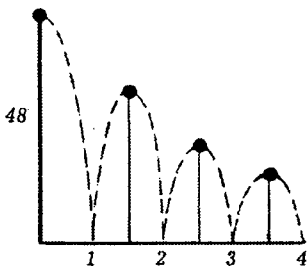
EJEMPLO 5. Una pelota cae de una altura de 48m y rebota $2/3$ de la distancia desde la cual cae. Si continua cayendo y rebotando en esta forma, qué distancia recorrerá antes de quedar en reposo.

Solución. La pelota antes del primer rebote recorre 48m, luego sube y baja una distancia igual a $2/3$ desde la cual cae. Si d es la distancia que recorre antes de quedar

en reposo, entonces: $d = 48 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \left(\frac{2}{3} \right)^k$

en donde: $a_1 = \frac{2}{3}(48) = 32$

Entonces: $d = 48 + 2 \left(\frac{32}{1 - 2/3} \right) = 48 + 192 = 240\text{m}$



EJEMPLO 6. Sea $a_n = a_{n-1} + 9\left(\frac{1}{10}\right)^n$, $\forall n \geq 1$ y $a_0 = 4$. Hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Solución. Hallemos una fórmula para el término a_n .

$$\text{Para } n=1 \rightarrow a_1 = a_0 + 9\left(\frac{1}{10}\right) = 4 + 9\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = a_1 + 9\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 4 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right)$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = a_2 + 9\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 4 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)$$

$$\therefore a_n = 4 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n}\right) = 4 + 9\left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k\right]$$

En la n -ésima suma parcial del paréntesis: $a_1 = 1/10$ y $r = 1/10$

$$\text{Entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 + 9\left[\frac{1/10}{1 - 1/10}\right] = 4 + 9\left(\frac{1}{9}\right) = 5$$

EJEMPLO 7. Los tres primeros términos de una P.G. son: $100+h$, $50+h$, $20+h$, donde h es una constante real. Si S_n es la suma de n términos de la progresión, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Solución. Si $(100+h):(50+h):(20+h)$ están en progresión geométrica, entonces:

$$\frac{50+h}{100+h} = \frac{20+h}{50+h}, \text{ de donde: } h=25 \rightarrow r = \frac{50+25}{100+25} = \frac{3}{5} < 1$$

Luego, los tres primeros términos de la progresión son: 125:75:45

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = 125 \left(\frac{1}{1 - 3/5}\right) = \frac{625}{2}$$

EJERCICIOS: Grupo 55

Cada una de las series siguientes converge. Hallar su suma.

1. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+3)(k+4)}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(2k+2)}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 4^k}{5^k}$
6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - 2^k}{3^k}$
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{25}{10^k} - \frac{6}{100^k} \right)$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+1}}$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+3}}$
10. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^k}$
11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1} + 2^k}{5^k}$
12. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}$

En los ejercicios que siguen, escribir cada fracción decimal como serie infinita y expresar la suma como cociente de los enteros.

13. 0.242424....
 14. 0.112112112....
 15. 0.62454545....
 16. 1.424242....
 17. 0.37251251251...
 18. 0.315315315....
19. Demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L \iff \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k = L - (a_0 + a_1 + \dots + a_i)$$

20. Utilizar la serie geométrica para demostrar lo siguiente:

- a) $\frac{1}{1+r} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^k$, para $|r| < 1$
- b) $\frac{1}{1+r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{2k}$, para $|r| < 1$

21. Cuánto dinero ha de depositar un hombre al 5% de interés (compuesto anualmente) si desea que sus descendientes puedan retirar a perpetuidad 100 dólares por año? Expresar la respuesta como serie geométrica.
22. Empleando propiedades sobre límites de una sucesión convergente, demostrar que si $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, donde $a_1, r \in \mathbb{R}$, $|r| < 1$, $n \in \mathbb{N} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$
23. Hallar n , si: $\sum_{k=1}^n 3^k = 120$
24. Hallar el número de términos que se deben sumar de la P.A: 9, 11, 13, ..., para que la suma sea igual a la de los 9 primeros términos de la progresión geométrica: 3: -6: 12: -24:
25. Una bola abandonada desde una altura de h metros rebota hasta una altura de σh metros, donde σ es una constante positiva menor que 1. Hallar la distancia total recorrida por la bola si se dejó caer inicialmente desde una altura de h_0 metros.
26. Si $S_n = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$, hallar a_1 y a_n . Qué serie es?



CAPITULO

9

NÚMEROS COMPLEJOS

9.1 INTRODUCCION

Dentro del campo de los números reales podemos hallar números x tales que $x^2=a$, si $a>0$. Pero que sucede cuando $a<0$. No existe ningún número real que satisfaga esta ecuación pues, el cuadrado de todo número real es siempre positivo o cero. Por tanto, para resolver la ecuación debemos ampliar el sistema numérico e incluir expresiones semejantes a $i=\sqrt{-1}$, tal que $i^2=-1$. Esta expresión es llamada **número imaginario** o **unidad imaginaria**. Podemos en entonces investigar el conjunto de números de la forma $a+bi$ (llamados **números complejos**), donde a y b se eligen del conjunto de números reales. Estos números son parejas de números reales (a,b) , donde el símbolo i sirve solamente para conservar separados dos números. Esto es, si designamos por C a dicho conjunto, entonces:

$$C = \{(a,b)=a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \wedge i^2=-1\}$$

La combinación de los números complejos con los números reales se llama **sistema de números complejos**. Entonces a semejanza con el estudio desarrollado en forma axiomática de los números reales comenzaremos por definir este sistema en función de los números reales.

9.2 EL SISTEMA DE NUMEROS COMPLEJOS

El sistema de números complejos es el conjunto C de todos los pares ordenados de números reales (a,b) , provisto de una **relación de equivalencia** y dos operaciones llamadas de **adición** y **multiplicación**, tales que, para dos elementos cualesquiera $(a,b) \in C$ y $(c,d) \in C$ se tiene:

- i) Igualdad: $(a,b) = (c,d) \iff a=c \wedge b=d$
- ii) Adición: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- iii) Multiplicación: $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Nota. Los elementos del conjunto C se denotan por las letras w, z , etc., de modo que si:

$$z \in C \leftrightarrow z = (a, b), \quad a, b \in R$$

$$w \in C \leftrightarrow w = (c, d), \quad c, d \in R$$

9.3 PROPIEDADES DE LA ADICION



Para los números complejos $z_1, z_2, z_3 \in C$, se cumple las siguientes propiedades:

$$A.1: \forall z_1, z_2 \in C \rightarrow (z_1 + z_2) \in C \quad (\text{Clausura})$$

$$A.2: \forall z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{Conmutatividad})$$

$$A.3: \forall z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (\text{Asociatividad})$$

$$A.4: \exists! z_0 \in C \mid \forall z \in C: z + z_0 = z$$

(Existencia y unicidad del elemento neutro aditivo $z_0 = (0, 0)$)

$$A.5: \text{Para cada } z \in C, \text{ existe un } \text{único } (-z) \in C \mid z + (-z) = z_0 = (0, 0)$$

(Existencia y unicidad del inverso aditivo)

$$\text{Demostración de A.2: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

En efecto, sean $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ dos números complejos.

$$+ \quad z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \quad (\text{Def. de suma})$$

$$= (c+a, d+b) \quad (\text{Conmutatividad en } R)$$

$$= (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1 \quad (\text{Def. de suma})$$

$\therefore$ La suma de complejos es conmutativa.

$$\text{Demostración de A.3: } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

En efecto, sean: $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ y $z_3 = (e, f) \mid a, b, c, d, e \in R$

$$+ \quad (z_1 + z_2) + z_3 = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$$

$$= (a+c, b+d) + (e, f) \quad (\text{Def. de suma})$$

$$= [(a+c) + e, (b+d) + f] \quad (\text{Def. de suma})$$

$$= [a + (c+e), b + (d+f)] \quad (\text{Asociatividad en } R)$$

$$= (a, b) + [(c+e), (d+f)] \quad (\text{Def. de suma})$$

$$= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \quad (\text{Def. de suma})$$

$$= z_1 + (z_2 + z_3)$$

$\therefore$ La suma de complejos es asociativa.

$$\text{Demostración de A.4: } \exists! z_0 \in C \mid \forall z \in C: z + z_0 = z$$

En efecto, sean: $z_0 = (x, y)$ y $z = (a, b)$

Averiguaremos que valores deben tomar x e y de modo que: $z + z_0 = z$

$$\begin{aligned}
 + & (a,b) + (x,y) = (a,b) \\
 + & (a+x, b+y) = (a,b) \\
 + & (a+x = a) \wedge (b+y = b) & (\text{Def. de Igualdad}) \\
 + & x = 0 \wedge y = 0
 \end{aligned}$$

Entonces el elemento neutro aditivo es $z_0 = (0,0)$. La unicidad de z_0 resulta de la unicidad de los valores de x e y .

$\therefore z_0 = (0,0)$ es el elemento neutro aditivo de C .

Demostración de A.5: $\forall z \in C, \exists ! (-z) \in C \mid z + (-z) = z_0$

En efecto, sean: $z = (a,b)$ y $-z = (x,y)$

Averiguaremos que valores deben tomar x e y , tal que: $z + (-z) = z_0$

$$+ (a,b) + (x,y) = (0,0)$$

$$+ (a+x, b+y) = (0,0) \leftrightarrow \begin{cases} a+x=0 & + & x=-a \\ b+y=0 & + & y=-b \end{cases}$$

Luego, si $z = (a,b) \rightarrow -z = (-a,-b)$

$\therefore -z = (-a,-b)$ es el inverso aditivo u opuesto de $z = (a,b)$

Según esta propiedad, se puede definir la resta: $z_1 - z_2$ por la siguiente relación:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Ejemplos:

(1) Si $z_1 = (-2,-3)$, $z_2 = (5,2)$; verificar que: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$$\begin{aligned}
 \text{En efecto: } z_1 + z_2 &= (-2,-3) + (5,2) = (-2+5, -3+2) = (3,-1) \\
 &= [5+(-2), 2+(-3)] = (3,-1)
 \end{aligned}$$

$$\therefore z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(2) Si $z_1 = (2,3)$, $z_2 = (-3,2)$ y $z_3 = (2,-4)$; verificar A.3

$$\begin{aligned}
 \text{En efecto: } z_1 + (z_2 + z_3) &= (2,3) + [(-3,2) + (2,-4)] = (2,3) + [-3+2, 2+(-4)] \\
 &= (2,3) + (-1,-2) = (1,1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (z_1 + z_2) + z_3 &= [(2,3) + (-3,2)] + (2,-4) = [2+(-3), 3+2] + (2,-4) \\
 &= (-1,5) + (2,-4) = (1,1)
 \end{aligned}$$

$$\therefore z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

(3) Si $z_1 = (2,3)$ y $z_0 = (0,0) \rightarrow z_1 + z_0 = (2,3) + (0,0) = (2+0, 3+0) = (2,3)$

$$\therefore z_1 + z_0 = z_1$$

(4) Si $z = (3,5)$ y $-z = (-3,-5) \rightarrow z + (-z) = (3-3, 5-5) = (0,0) = z_0$

(5) Si $z_1 = (7,5)$ y $z_2 = (-1,3)$

$$+ z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (7,5) + (1,-3) = (8,2)$$

9.4 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

Para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se cumplen las siguientes propiedades:

$$M.1: \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad (z_1 \cdot z_2) \in \mathbb{C} \quad (\text{Clausura})$$

$$M.2: \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (\text{Commutatividad})$$

$$M.3: \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad (\text{Asociatividad})$$

$$M.4: \exists! \omega \in \mathbb{C}, \omega \neq z_0 \mid \forall z \in \mathbb{C}: z \cdot \omega = z, \text{ donde } \omega = (1, 0) \\ (\text{Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo})$$

$$M.5: \forall z \in \mathbb{C}, z \neq z_0, \exists! z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z \cdot z^{-1} = \omega \\ (\text{Existencia y unicidad del elemento inverso multiplicativo})$$

$$M.6: \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \\ (\text{Propiedad Distributiva})$$

Demostración de M.2: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

En efecto, sean: $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$

$$(1) \quad + \quad z_1 \cdot z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (\text{Def. de Mult.})$$

$$(2) \quad + \quad z_2 \cdot z_1 = (c, d)(a, b) = (ca - db, cb + da) \quad (\text{Def. de Mult.})$$

$$(3) \quad = (ac - bd, ad + bc) \quad (\text{Commutatividad en } \mathbb{R})$$

$$(4) \text{ Luego, de (1) y (3): } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$\therefore$ El producto de números complejos es conmutativo

Demostración de M.3: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

En efecto, sean: $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ y $z_3 = (x, y)$

$$(1) \quad + \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (ac - bd, ad + bc) \cdot (x, y)$$

$$(2) \quad = [(ac - bd)x - (ad + bc)y, (ac - bd)y + (ad + bc)x]$$

$$(3) \quad = (acx - bdx - ady - bcy, acy - bdy + adx + bcx)$$

$$(4) \quad = (acx - ady - bdx - bcy, acy + adx - bdy + bcx)$$

$$(5) \quad = [a(cx - dy) - b(cy + dx), a(cy + dx) + b(cx - dy)]$$

$$(6) \quad = (a, b)(cx - dy, cy + dx)$$

$$(7) \quad = (a, b)[(c, d) \cdot (x, y)] = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$\therefore$ El producto de números complejos es asociativo

Demostración de M.4: $\exists! \omega \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C}: z \cdot \omega = z, \omega = (1, 0)$

En efecto, demostraremos que: $\omega = (1, 0)$. Sean: $z = (a, b)$ y $\omega = (x, y)$

$$(1) \text{ Si } z \cdot \omega = z \rightarrow (a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$$

$$(2) \quad \rightarrow (ax - by, ay + bx) = (a, b) \leftrightarrow \begin{cases} ax - by = a & (a) \\ bx + ay = b & (b) \end{cases}$$

- (3) Multiplicando (a) por a : $a^2x - aby = a^2$
 (4) " (8) " b : $b^2x + aby = b^2$
 (5) Sumando (3)+(4): $(a^2+b^2)x = a^2+b^2 \rightarrow x=1$
 (6) Sustituyendo en (8): $b+ay = b \rightarrow y=0$. Entonces: $w=(1,0)$

$\therefore w=(1,0)$ es el elemento neutro multiplicativo de G .

Nota. El elemento neutro multiplicativo definido en M.4 se llama también **unidad compleja o uno complejo** y se denota por 1. Esto es, $w=1=(1,0)$

Demostración de M.5: $\forall z \in G, z \neq z_0, \exists ! z^{-1} \in G | z \cdot z^{-1} = w$

En efecto, sean $z=(a,b)$ y $z^{-1}=(x,y)$

- (1) Si $z \cdot z^{-1}=w \rightarrow (a,b) \cdot (x,y) = (1,0)$
 (2) $\rightarrow (ax-by, ay+bx) = (1,0) \leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$
 (3) Resolviendo el sistema para x e y obtenemos:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

- (4) Luego, si $z=(a,b) \rightarrow z^{-1}=(x,y) = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

$\therefore z^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ es el inverso multiplicativo de $z=(a,b)$ y es único.

Nota. El elemento inverso multiplicativo de $z=(a,b)$ definido en M.5, se denomina también **recíproco de z** . Es costumbre representar a z^{-1} como $\frac{1}{z}$.

Según esta propiedad, se puede definir la división de z entre w por la siguiente relación:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \left(\frac{1}{w}\right) = z \cdot (w^{-1})$$

De esta definición se obtiene la regla para dividir dos números complejos: $z=(a,b)$ y $w=(c,d)$.

$$+ \frac{z}{w} = \frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \cdot (c,d)^{-1} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right)$$

o sea:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

EJEMPLO 1. Si $z=(5,3)$ y $w=(3,-1)$, hallar: z/w

Solución. Según la regla para la división:

$$\frac{z}{w} = \frac{(5,3)}{(3,-1)} = \left(\frac{15-3}{9+1}, \frac{9+5}{9+1} \right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5} \right)$$

EJEMPLO 2. Hallar el valor de z para: $(2,-1)z+(-4,3) = (1,1)(1,-2)(1,3)$

Solución. Debido a la propiedad M.3 no interesa el orden en que se empiecen a multiplicar los factores en el segundo extremo.

$$+ (2,-1)z + (-4,3) = (1+2, -2+1)(1,3) = (3,-1)(1,3) = (3+3, 9-1) = (6,8)$$

$$+ (2,-1)z = (6,8) - (-4,3) = (6,8) + (4,-3) = (10,5)$$

$$\therefore z = \frac{(10,5)}{(2,-1)} = \left(\frac{20-5}{4+1}, \frac{10+10}{4+1} \right) = (3,4)$$

9.5 R COMO SUBCONJUNTO DE C

Veremos enseguida la relación que existe entre los números complejos y los números reales.

Sea $A=\{(a,0) | a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\}$, el conjunto de los complejos de parte imaginaria nula. Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre A y los reales de la siguiente manera:

La función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f[(a,0)] = a$, asigna a cada complejo real su primera componente.

f es **inyectiva**, puesto que si: $z_1=(a_1,0)$ y $z_2=(a_2,0)$ y $z_1 \neq z_2$

$$+ (a_1,0) \neq (a_2,0) \iff a_1 \neq a_2$$

Además como: $f(z_1) = f[(a_1,0)] = a_1$ y $f(z_2) = f[(a_2,0)] = a_2$

tenemos que: $a_1 \neq a_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$

de donde se concluye que, si $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$

f es **sobreyectiva**, pues $\forall a \in \mathbb{R}$, existe $(a,0) \in A$ tal que $f[(a,0)] = a$.

Por tanto, f es una función biyectiva. Esto es, $\forall (a,0) \in A$ le corresponde el elemento a en los reales, lo cual se indica escribiendo:

$$(a,0) \iff a, \forall a \in \mathbb{R}$$

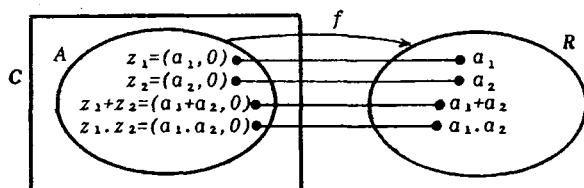
Veamos el comportamiento de las operaciones ii) y iii) de 9.2 en los conjuntos A y $\mathbb{R}$. Si $z_1=(a_1,0)$ y $z_2=(a_2,0)$, entonces:

$$z_1 + z_2 = (a_1,0) + (a_2,0) = (a_1+a_2,0) \iff a_1+a_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1,0)(a_2,0) = (a_1 \cdot a_2,0) \iff a_1 \cdot a_2$$

Aplicando f a cada una de estas operaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(z_1 + z_2) &= f[(a_1, 0) + (a_2, 0)] = f[(a_1 + a_2, 0)] \\
 &= a_1 + a_2 = f[(a_1, 0)] + f[(a_2, 0)] = f(z_1) + f(z_2) \\
 f(z_1 \cdot z_2) &= f[(a_1, 0) \cdot (a_2, 0)] = f[(a_1 \cdot a_2, 0)] \\
 &= a_1 \cdot a_2 = f[(a_1, 0)] \cdot f[(a_2, 0)] = f(z_1) \cdot f(z_2)
 \end{aligned}$$



Esta analogía permite identificar cada complejo real con el real correspondiente, es decir, es válida la igualdad:

$$(a, 0) = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

o sea, podemos afirmar entonces que $A = \mathbb{R}$ y como $A \subset \mathbb{C}$, tenemos que: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

De aquí se considera que el sistema de los números complejos es una ampliación del sistema de los números reales.

9.6 FORMA CARTESIANA DE UN NUMERO COMPLEJO

LA UNIDAD IMAGINARIA

El número complejo imaginario cuya segunda componente es la unidad se denomina *unidad imaginaria* y se denota por:

$$i = (0, 1)$$

Tiene la propiedad de que si:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 1) = (-1, 0)$$

y por la analogía de los complejos reales con los reales:

$$i^2 = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Podemos usar esta notación para obtener diversas potencias de i :

$i^0 = 1$	Análogamente:
$i^1 = i$	$i^3 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$	$i^7 = -i$
$i^4 = (i^2)(i^2) = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = 1$

Obsérvese que para cada 4 potencias sucesivas de i se repiten los mismos resultados. Luego, si el exponente de i es $n \in \mathbb{N}$, al efectuar la división entre

cuatro se obtiene $4k+r$, donde $0 \leq r < 4$, entonces:

$$i^n = i^{4k+r} = (i^{4k})i^r = (i^4)^k i^r = (1)^k i^r = i^r$$

En consecuencia, i^n se reduce a uno de los cuatro considerados en primer lugar, según el valor que tenga r .

Ejemplos: (1) $i^{128} = i^{4(32)+0} = i^0 = 1$ (3) $i^{54} = i^{4(13)+2} = i^2 = -1$

(2) $i^{25} = i^{4(6)+1} = i^1 = i$ (4) $i^{87} = i^{4(21)+3} = i^3 = -i$

Usando la convención de identificar los números complejos de la forma $(a,0)$ con el número real a , podemos escribir el número complejo $z=(a,b)$ en la forma:

$$\begin{aligned} z = (a,b) &= (a,0) + (0,b) \\ &= (a,0) + (b,0)(0,1) \\ &= (a,0) + b(0,1) = a + bi \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$z = a + bi$$

Notación que se conoce con el nombre de forma cartesiana, rectangular, canónica o binómica de un número complejo, donde a es su parte real y b su parte imaginaria, y se denotan, respectivamente:

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad , \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

de modo que podemos escribir:

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$$

Una ventaja de escribir los números complejos en forma cartesiana es que la suma y la multiplicación se pueden efectuar sin referirse a las definiciones en términos de pares ordenados.

Si usamos la notación $z_1=(a,b)=a+bi$, $z_2=(c,d)=c+di$ para efectuar la multiplicación $z_1 \cdot z_2$ donde consideramos los términos a,b,c,d,i , como si todos ellos obedecieran a las leyes de los números reales y reemplazando i^2 por -1 tendríamos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\ &= (ac-bd, ad+bc) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $z_1=(-2,3)$ y $z_2=(1,-2)$, entonces:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (-2+3i)(1-2i) = (-2)(1)+(-2)(-2i)+(3i)(1)+(3i)(-2i) \\ &= -2 + 4i + 3i - 6i^2 = -2+7i+6 = 4+7i = (4,7) \end{aligned}$$

En adelante adoptaremos la representación cartesiana para efectuar las operaciones de suma, diferencia, multiplicación y división de números complejos.

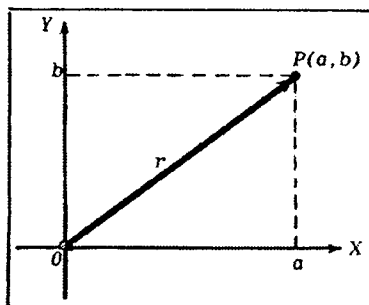
9.7 REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

La idea de representar geométricamente un número complejo es realmente muy simple. Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los números complejos y los puntos del plano cartesiano de acuerdo con el esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{Número Complejo} & & \text{Punto del plano} \\ (a,b) = a + bi & \longleftrightarrow & P(a,b) \end{array}$$

Así, cada número complejo $a+bi$ corresponde a un punto único del plano cuyas coordenadas son $x=a$, $y=b$. Recíprocamente, cada punto $P(a,b)$ del plano corresponde a un número único $a+bi$.

El punto $P(a,b)$ recibe el nombre de **punto afijo** o **gráfica** del número complejo $a+bi$. El plano donde suponemos representados los afijos de todos los números complejos, se llama **plano complejo**. El eje OX de este plano contiene todos los afijos de los complejos de la forma $(a,0)=a+0i$, es decir, los números reales. Por esta razón recibe el nombre de **eje real**.



El eje OY contiene los afijos de los números imaginarios puros $(0,b)$ y se llama **eje imaginario**. La línea OP que representa la magnitud del complejo $a+bi$ se llama **radio vector**.

9.7.1 REPRESENTACION GRAFICA DE LA SUMA Y DIFERENCIA

Si en un plano complejo representamos los complejos $z_1=(a_1,b_1)$ y $z_2=(a_2,b_2)$ por sus respectivos radios vectores r_1 y r_2 , entonces el vector suma z_1+z_2 es la diagonal del paralelogramo construido sobre los radios vectores representativos de los sumandos.

En efecto:

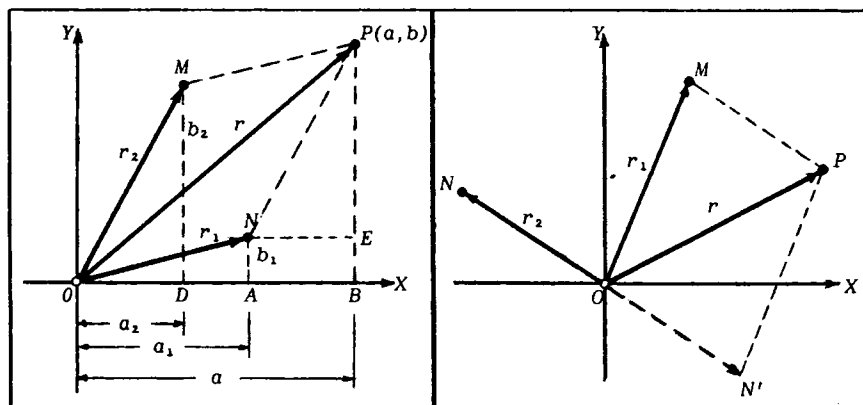
$$\triangle ODN \cong \triangle NEP, \text{ por tener: } \begin{cases} OD = NE \\ MD = PE \end{cases}$$

$$\text{Entonces: } a = OB = OA + AB = OA + NE = OA + OD = a_1 + a_2$$

$$b = PB = PE + EB = MD + NA = b_1 + b_2$$

$$\text{Por lo tanto: } z = a + bi = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i = z_1 + z_2$$

Para la diferencia: $z = z_1 - z_2$, construimos el inverso aditivo de z_2 : ON' de modo que: $OM - ON = OM + ON' = OP \rightarrow z = z_1 + (-z_2)$

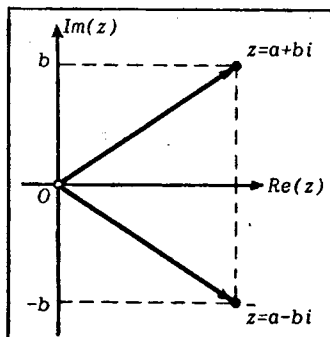


9.8 CONJUGADO DE UN NUMERO COMPLEJO

Si $z=(a,b)$ es un número complejo, entonces $\bar{z}=(a,-b)$ se denomina **conjugado complejo** o simplemente, **conjugado** de z .

Geométricamente dos complejos conjugados estarán representados por dos puntos simétricos respecto del eje real.

9.8.1 PROPIEDADES



CC.1: a) La suma de dos complejos conjugados es igual al doble de la parte real.

b) El producto de dos complejos conjugados es un número real no negativo.

Demostración. En efecto, sea $z=a+bi$, entonces:

$$a) \quad z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$b) \quad z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

Dado que $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene: $(z \cdot \bar{z}) \in \mathbb{R} \wedge (z \cdot \bar{z}) \geq 0$

CC.2: Un número complejo es real si y sólo si es igual a su conjugado.

Demostración. En efecto:

$$i) \quad z \in \mathbb{R} \rightarrow z = a + 0i \rightarrow (z=a) \wedge (\bar{z}=a) \rightarrow z = \bar{z}$$

$$ii) \quad \text{Si } z = \bar{z} \rightarrow a+bi = a-bi \rightarrow 2bi=0 \rightarrow b=0. \text{ Luego, } z=a, \text{ o sea: } z \in \mathbb{R}$$

CC.3: El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados.

$$\text{Si } z, w \in \mathbb{C} \rightarrow \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sean } z=(a,b) \text{ y } w=(c,d)$$

$$(2) \text{ Si } z + w = (a+c, b+d) \rightarrow \overline{z + w} = (a+c, -b-d)$$

$$(3) \text{ Igualmente, si: } \bar{z}=(a,-b) \text{ y } \bar{w}=(c,-d) \rightarrow \bar{z} + \bar{w} = (a+c, -b-d)$$

$$(4) \text{ Luego, de (2) y (3), se tiene: } \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

CC.4: El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados.

$$\text{Si } z, w \in \mathbb{C} \rightarrow \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sean } z=(a,b) \text{ y } w=(c,d)$$

$$(2) \text{ Si } z \cdot w = (ac-bd, ad+bc) \rightarrow \overline{z \cdot w} = (ac-bd, -ad-bc)$$

$$(3) \text{ Si } \bar{z}=(a,-b) \text{ y } \bar{w}=(c,-d) \rightarrow \bar{z} \cdot \bar{w} = (ac-bd, -ad-bc)$$

$$(4) \text{ Luego, de (2) y (3): } \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\text{CC.5: Si } z \in \mathbb{C} \rightarrow \overline{\bar{z}} = z$$

$$\text{CC.6: Si } z=a+bi \text{ y } \bar{z}=a-bi \rightarrow a = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad ; \quad b = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Nota. Una aplicación importante de la conjugación en $\mathbb{C}$ es el de la simplificación de la división de dos números complejos. En efecto, según la propiedad CC.1b, el producto de cualquier complejo y su conjugado es un número real positivo. Entonces consideremos el problema de encontrar el cociente de $z=a+bi$ y $w=c+di$ de la siguiente manera:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo. Si $z=2+5i$ y $w=3-i$, hallar: $\frac{z}{w}$

Solución. Si $w = 3-i \rightarrow \bar{w} = 3+i$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } \frac{z}{w} &= \frac{(2+5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{(6-5) + (2+15)i}{3^2 + 1^2} = \frac{1 + 17i}{10} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{17}{10}i \end{aligned}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Se sabe que: $(3,5)(x-1,4)=(y-2,5)+(3,-1)$ para ciertos números complejos. Hallar t y u , tales que:

$$(5x-4, u+t) = (3t+1, -5y-19).$$

Solución. $(3,5)(x-1,4)=(y-2,5)+(3,-1) \rightarrow (3x-3-20, 12+5x-5)=(y-2+3, 5-1)$
 $\rightarrow (3x-23, 5x+7) = (y+1, 4) \leftrightarrow \begin{cases} 3x-23=y+1 & \rightarrow 3x-y=24 \\ 5x+7=4 & \rightarrow x=-3/5 & \rightarrow y=-129/5 \end{cases}$

Si $(5x-4, u+t) = (3t+1, -5y-19) \rightarrow (-3-4, u+t) = (3t+1, 129-19)$

$$\rightarrow (-7, u+t) = (3t+1, 110) \leftrightarrow \begin{cases} -7 = 3t+1 & \rightarrow t = -8/3 \\ u+t = 110 & \rightarrow u = 338/3 \end{cases}$$

EJERCICIO 2. Determinar el complejo: $5z+2w^2+u$, sabiendo que:

$$z = \frac{(1+i)^4 + (1-i)^4}{2+i}, w = \frac{4i^{11}-i}{1+2i}, u = i^{73} + [(1-i)^{-2}i]^3$$

Solución. Para calcular potencias de $1+i$ y $1-i$, tener presente lo siguiente:

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$

$$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$$

Entonces: $(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$

$$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

Luego: $z = \frac{-8}{2+i} = \frac{-8(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{8(2-i)}{4+1} = -\frac{8}{5}(2-i)$

$$i^{11} = i^{4 \times 2 + 3} = i^3 = -i \rightarrow w = \frac{-4i-i}{1+2i} = \frac{-5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5(i-2i^2)}{1+4} = \frac{-5(-2+i)}{5} = -(2+i)$$

$$\rightarrow w^2 = (2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$$

$$i^{75} = i^{4 \times 18 + 3} = i^3 = -i \rightarrow u = -i + (1-i)^{-6}i^2 = -i + (1-i)^6 = -i + [(1-i)^2]^3$$

$$\rightarrow u = -i + (-2i)^3 = -i - 8i^3 = -i + 8i = 7i$$

$$\therefore 5z + 2w^2 + u = -8(2+i) + 2(3+4i) + 7i = -10 + 7i$$

EJERCICIO 3. Calcular: $E = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$

Solución. $E = \frac{(1+i)^2(1+i)^{n-2}}{(1-i)^{n-2}} = 2i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{n-2} = 2i \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \right]^{n-2}$
 $= 2i \left(\frac{2i}{2} \right)^{n-2} = 2i(i)^{n-2} = 2i^{n-1}$

EJERCICIO 4. Hallar el valor de: $E = \left[\frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{(1+i)^3} \right]^2$

Solución. Según la identidad: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$E = \left[\frac{2(4 + i^2)}{2i(1+i)} \right]^2 = \left(\frac{3}{1-i} \right)^2 = \frac{81}{(-2i)^2} = \frac{81}{4i^2} = -\frac{81}{4}$$

EJERCICIO 5. Expresar en la forma binómica: $z = 1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1+i}}}$

Solución. $z = 1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1+i}}} = 1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{\frac{1+2i}{1+i}}} = 1 + \frac{i}{1 + \frac{2i}{(3,1)}}$

$$\begin{aligned} \rightarrow z &= 1 + \frac{i}{(3,3)} = 1 + \frac{i}{\left(\frac{9+3}{10}, \frac{9-3}{10}\right)} = 1 + \frac{10i}{6(2,1)} = \frac{(6,8)}{3(2,1)} = \frac{2(3,4)}{3(2,1)} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{6+4}{5}, \frac{8-3}{5} \right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

EJERCICIO 6. Comprobar la identidad:

$$x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$$

Solución. En efecto: $(1+i)^2 = 2i$ y $(1-i)^2 = -2i \rightarrow (1+i)^2 = -(1-i)^2$

$$\text{Entonces: } x^4 + 4 = x^4 - (-4) = x^4 - (2i)^2 = x^4 - [(1+i)^2]^2$$

$$\begin{aligned} \text{Factorizando: } x^4 + 4 &= [x^2 + (1+i)^2][x^2 - (1+i)^2] = [x^2 - (1-i)^2][x^2 - (1+i)^2] \\ &= (x+1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x-1-i) \end{aligned}$$

y por la propiedad conmutativa del producto en $\mathbb{C}$, obtenemos:

$$x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$$

Nota. Para simplificar ciertas operaciones con números complejos tener presente lo siguiente: a) $(1+i\sqrt{3})^3 = (1-i\sqrt{3})^3 = -8$

$$b) (\sqrt{3}+i)^3 = 8i \text{ y } (\sqrt{3}-i)^3 = -8i$$

EJERCICIO 7. Si $z = \frac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}-i)^3}$, hallar $\text{Im}(z^2)$

$$\begin{aligned} \text{Solución. } z &= \frac{(1+i)^3(1+i)}{-8i} = \frac{(2i)^2(1+i)}{-8i} = \frac{i(1+i)}{-2} = \frac{1}{2}(1-i) \\ \rightarrow z^2 &= \frac{1}{4}(1-i)^2 = \frac{1}{4}(-2i) = -\frac{1}{2}i \rightarrow \text{Im}(z^2) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

EJERCICIO 8. Si $\overline{w} = 2\overline{u} + v$, $v = -u + (1-i)$, $\overline{u} + (1-i) = 2\overline{(1+i)}$. Efectuar:

$$z = \frac{\overline{v} + 2\overline{w} - u}{u^2 - w} + 2i - 1 + u^3, \text{ expresando el resultado en forma de par ordenado.}$$

Solución. $\overline{u} = -(1-i) + 2(1-i) = 1-i \rightarrow u = 1+i$

$$v = -u + (1-i) = -(1+i) + (1-i) = -2i$$

$$\overline{w} = 2u + v = 2(1-i) - 2i = 2 - 4i \quad \rightarrow \quad w = 2 + 4i$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } z &= \frac{2i + 2(2+4i) - (1+i)}{(1+i)^2 - 2(1+2i)} + \frac{(-1-2i) + (1+i)^2(1+i)}{(1+i)^2 - 2(1+2i)} \\ &= \frac{2i+4+8i-1-i}{2i-2-4i} - \frac{1-2i+2i(1+i)}{2(-3-4i)} = -\frac{3}{2} \left(\frac{3+5i}{1+i} \right) = -\frac{3}{2} \frac{(3+5i)(1-i)}{2} \\ \therefore z &= -\frac{3}{4}(8+2i) = -3(2, 1/2) \end{aligned}$$

EJERCICIO 9. Expresar en la forma rectangular el complejo:

$$z = \frac{i^{32} \cdot 2i^{7^2} + 4i^{10^3} + 6i^{11^3}}{(\sqrt{3} - i)^3}$$

Solución. Para potencias de i , de la forma: i^{n^p} se tiene:

$$z = i^{n^p} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } n = \frac{0}{4}, p \geq 0 \rightarrow z = 1 \\ n = \frac{0}{4} + 1, p \geq 0 \rightarrow z = i \\ n = \frac{0}{4} + 2, p \geq 2 \rightarrow z = 1 \\ n = \frac{0}{4} + 3, p \text{ es par} \rightarrow z = i \\ n = \frac{0}{4} + 3, p \text{ es impar} \rightarrow z = -i \end{cases}$$

$$i^{32} = i^{4 \times 8 + 0} = i^0 = 1$$

$$\text{Para: } i^{7^2}: n=7 = \frac{0}{4} + 3, p=2 \text{ (par)} \rightarrow i^{7^2} = i$$

$$i^{10^3}: n=10 = \frac{0}{4} + 2, p=3 \text{ (} p > 2 \text{)} \rightarrow i^{10^3} = 1$$

$$i^{11^3}: n=11 = \frac{0}{4} + 3, p=5 \text{ (impar)} \rightarrow i^{11^3} = -i$$

$$\text{Luego: } z = \frac{(1)(2i) + 4(1) - 6i}{-8i} = \frac{4(1-i)}{-8i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{EJERCICIO 10. Resolver el sistema: } -2\overline{z}_1 + z_2 = 2+3i \quad (1)$$

$$iz_1 + \frac{1}{2}\overline{z}_2 = \frac{5}{2} + i \quad (2)$$

$$\text{Solución. En (1): } -2\overline{z}_1 + z_2 = 2+3i \rightarrow -2z_1 + \overline{z}_2 = 2-3i$$

$$\text{Multiplicando por } -1: 2z_1 - \overline{z}_2 = -2+3i \quad (3)$$

$$\text{Multiplicando (2) por 2: } 2iz_1 + \overline{z}_2 = 5+2i \quad (4)$$

$$\text{Sumando (3)+(4): } 2(1+i)z_1 = 3+5i, \text{ de donde: } z_1 = 2 + \frac{1}{2}i \quad (\text{Verificar})$$

$$\text{En (1): } -2(2 - \frac{1}{2}i) + z_2 = 2+3i \rightarrow z_2 = 6+2i \quad \therefore C.S = \{(2, 1/2), (6, 2)\}$$

EJERCICIO 11. Demostrar que $\forall w, z, v \in \mathbb{C}$:

$$w \operatorname{Im}(\overline{z} \cdot v) + z \operatorname{Im}(\overline{v} \cdot w) + v \operatorname{Im}(\overline{w} \cdot z) = (0, 0)$$

Demostración. En efecto, sean: $w=(a,b)$, $z=(c,d)$ y $v=(e,f)$

$$+ w=(a,-b), z=(c,-d), v=(e,-f)$$

$$+ \overline{z} \cdot v = (c,-d)(e,f) = (ce+df, cf-de)$$

$$+ \overline{v} \cdot w = (e,-f)(a,b) = (ea+bf, be-af)$$

$$+ \overline{w} \cdot z = (a,-b)(c,d) = (ac+bd, ad-bc)$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } wIm(z \cdot v) &= (a,b)(cf-de)i = (acf-ade)i + (bcf-bde)i \\ &= (bde-bcf) + (acf-ade)i \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} zIm(v \cdot w) &= (c,d)(be-af)i = (bce-acf)i + (bde-adf)i \\ &= (adf-bde) + (bce-acf)i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} vIm(w \cdot z) &= (e,f)(ad-bc)i = (ade-bce)i + (adf-bcf)i \\ &= (bcf-adf) + (ade-bce)i \end{aligned} \quad (3)$$

Sumando (1)+(2)+(3), obtenemos:

$$wIm(z \cdot v) + zIm(v \cdot w) + vIm(w \cdot z) = 0+0i = (0,0)$$

EJERCICIO 12. Hallar el valor de: $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^4$

Solución. Calculamos z por partes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \right)^4 &= \left[\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{3+1} \right]^4 = \frac{(\sqrt{3}-i)^8}{4^4} = \frac{[(\sqrt{3}-i)^2(\sqrt{3}-i)^2]^4}{2^8} \\ &= \frac{(-8i)^2(2-2\sqrt{3}i)}{2^8} = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^4 = \left[\frac{(1+i)^2}{1+1} \right]^4 = \left(\frac{2i}{2} \right)^4 = i^4 = i$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})i = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$$

EJERCICIO 13. Sean $w, z \in \mathbb{C}$ tales que: $w+z$ y $w \cdot z$ son reales. Demostrar que $w = \overline{z}$.

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sean: } w = a+bi, z = c+di$$

$$(2) \text{ Entonces: } w+z = (a+c)+(b+d)i, w \cdot z = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$(3) \text{ Dado que: } w+z \text{ es real } \rightarrow b+d=0 \rightarrow d=-b$$

$$w \cdot z \text{ es real } \rightarrow ad+bc=0 \rightarrow a(-b)+bc=0 \rightarrow a=c$$

$$(4) \text{ Luego, de (3) se deduce que } z=a-bi \rightarrow \overline{z}=a+bi \rightarrow w=\overline{z}$$

EJERCICIO 14. En $\mathbb{C}$ definimos la operación $*$ de la siguiente manera:

$$z^*w = z+zw+zw, \forall z, w \in \mathbb{C}, \text{ hallar el valor de } z \text{ tal que:}$$

$$z^*(1+i) = 0.$$

Solución. Aplicando la operación $\star$ a $z(1+i)=0$ se tiene: $z+(1+i)+z(1+i)=0$

$$\text{Si } z=(a,b) \rightarrow (a+1,b+1) + (a,b)(1,1) = (0,0)$$

$$\rightarrow (a+1,b+1) + (a-b,a+b) = (0,0) \leftrightarrow \begin{cases} a+1+a-b = 0 & \rightarrow 2a-b+1 = 0 \\ b+1+a+b = 0 & \rightarrow a+2b+1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos: $a=-3/5$ y $b=-1/5 \rightarrow z = (-3/5, -1/5)$

EJERCICIOS: Grupo 56

1. Determinar los números reales x e y que satisfacen las ecuaciones:

a) $(2-5i)x + (1+3i)y - 8+9i = 0$

d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^z + \frac{1}{x+yi} = 1+i$

b) $(-1+i)x + (1+2i)y = 1$

e) $\frac{x(1-2i)^2 + y(2+3i)^2}{3-2i} = -2+4i$

c) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

f) $2x+3yi+4xi-2y-5+10i = (x+y+2)-(y-x-5)i$

g) $x(3+4i)-y(8-3i) = (2xi-10y+4)+(4yi-2x+7i)$

2. En los siguientes ejercicios, obtener z , dando el resultado en la forma de par ordenado.

a) $z = 24(i^{25} + i^{15} + i^{52})^3 - 4(1-i)^8 + 3(2-3i)^2$

b) $z = \frac{i^8 + i^9 + i^{16}}{2-i^8 + i^{18} + i^{15}}$

d) $z = \frac{2(2-i)}{(1-i)^8} - \frac{4i^{15i^2}}{(\sqrt{3}-i)^3} + \frac{\sqrt{-4}}{2}$

c) $z = \frac{ai + 3a}{a + bi} - \frac{b + bi + 2ai}{ai - b}$

e) $z = \left[\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{3i} \right]^{-2i}$

3. Calcular: a) $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^7}$

c) $\frac{(1-i)^8 - 1}{(1+i)^8 + 1}$

b) $\left(\frac{2i}{1+i} \right)^7$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)^8$

4. Demostrar: a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}: (a + b)z = az + bz$

c) Si z y w son dos números complejos diferentes, entonces:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z-w}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z-w}\right) = 1$$

d) Si $z, z_1, z_2, \dots, z_n$ son números complejos, entonces:

$$z(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = zz_1 + zz_2 + \dots + zz_n$$

5. Si $z_1=(2,-1)$, $z_2=(1,3)$ y $z_1 \cdot z_2 = 2\bar{z}_2$, hallar: $\bar{z}_2$ y z_2^{-1} .

6. Calcular: a) $\frac{(1+i\sqrt{3})(-2+2i)(-\sqrt{3}+i)}{(2-2\sqrt{3}i)(1+i)^2}$
- b) $i^3 + i^{3^3} + i^{3^3} + i^{3^7} + \dots + i^{3^{21}}$
- c) $i^2 + i^6 + i^{10} + i^{14} + \dots + i^{30}$
7. Dados los números complejos $z_1=2-i$, $z_2=2+\sqrt{3}i$, $z_3=5-4\sqrt{3}i$. hallar $\text{Im}(z)$, si $z = 3z_1 - z_2^2 + \bar{z}_3$.
8. Si $z_1=(-1,3)$, $z_2=(-5/3,1)$ y $z_1 \cdot z_2 = 3\bar{z}_2$, hallar: z_1^{-1} .
9. Si $z = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$, calcular: $\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z}$
10. Hallar z tal que: $\frac{3+2i}{z(2+i)} = 4i+8$
11. Sea $z = \frac{1}{2}(1-3i)$, hallar $(i+z)^7$ en la forma $a+bi$.
12. Obtener z en los siguientes casos:
- a) $z = (6+2\sqrt{3}i)(7+7i)(4\sqrt{3}+12i)$
- b) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^2 - \sqrt{6}i + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$
- c) $z = \frac{i-2}{1+i - \frac{1-i}{1-i - \frac{1-i}{1-i + \frac{2i}{3-i}}}}$
13. Qué relación debe existir entre x e y para que siendo $z=x+yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, se tenga que el cociente $\frac{z+1}{z-1}$ tenga parte real nula.
14. La suma de dos números complejos es $3+2i$. La parte real de uno de ellos es 2. Determinar dichos números, sabiendo que su cociente es imaginario puro.
15. Dados los números: $w_1=3+2i$, $w_2=1+4i$ y sus afijos M_1 y M_2 ; se pide:
- a) La expresión binómica del complejo $z=a+bi$ tal que sus afijos están a lineados con M_1 y M_2 , y la suma w_1+z , sea imaginario puro.
- b) La expresión binómica del número complejo $z_1=a_1+b_1i$ tal que la resultante de la suma w_1+z_1 , pase por el afijo $(-3,12)$.
16. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:
- a) $(3-i)z + (4+2i)w = 2+6i$
 $(4+2i)z - (2+3i)w = 5+4i$
- b) $(3 - \frac{1}{i})z + 2w = 3+4i$
 $4iz + (3+i)w = -4$
- c) $(3-i)z - (1+3i)w = 5+5i$
 $(4+i)z + (5-3i)w = 7+6i$
- d) $(2-3i)z - (1+i)w = 4-3i$
 $(3-i)z + (1+2i)w = 11+i$

e) $3z^2 + iw^3 = 7i$

$z^2 i + 2w^3 = 0$

$(t+1)^2 = -1$

h) $3iz_1 + 2z_2 - iz_3 = 1-2i$

$-\bar{z}_1 - 2\bar{z}_2 - i\bar{z}_3 = -6$

$2z_1 - z_2 + z_3 = 6-i$

f) $(1-i)\bar{z}_1 - \bar{z}_2 + (2+i)\bar{z}_3 = 3-4i$

$z_1 + (1-i)z_2 + (1+i)z_3 = 3i$

$(1-i)z_1 + (2+i)z_2 - z_3 = -i$

i) $(1+i)\bar{z}_1 + i\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 1$

$2z_1 + z_2 + (2-i)z_3 = 1+2i$

$2z_1 + (1-i)z_2 + (1+2i)z_3 = 0$

g) $z_1 \cdot \bar{z}_2 = 10 + 11i$

$z_1 + z_2 = 7-3i$

$\text{Re}(z_1) = 3$

j) $z_1 + z_2 + z_3 = 2$

$iz_1 + 2z_2 + (2+3i)z_3 = 12+4i$

$\bar{z}_1 - i\bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 2i$

17. Si $z_1 = (x, -y) \neq 0 \in \mathbb{C}$, $z_2 = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ y $z_1 \cdot z_2 = (a, b)$; calcular: $a^2 + b^2$.

18. Demostrar que $\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$

(Sug. Sea $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$, multiplicar zS , luego restar $zS - S$)

19. Hallar todos los valores posibles de: $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

n par. (Sug. $S = \sum_{h=0}^n i^h = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$, luego, analizar S para $n=2k$)

20. Obtener los siguientes complejos: a) $z = \sum_{k=0}^{100} i^k$ b) $z = \prod_{k=1}^{100} i^k$

9.9 MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO

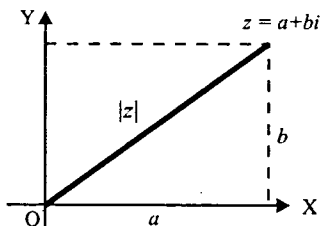
Dado $z = a + bi$, el módulo o valor absoluto de z es la raíz cuadrada no negativa de la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria.

Se denota por:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, el módulo de un complejo representa la magnitud del radio vector r del a fijo correspondiente, al origen.

Por ejemplo, si $z = 4 - 3i$ $+ |z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$
 $+ r = \sqrt{25} = 5$



9.9.1 PROPIEDADES

VA.1: El módulo de todo número complejo es mayor o igual que cero.

$$|z| \geq 0, |z| = 0 \leftrightarrow z = z_0 = (0,0)$$

VA.2: El módulo de todo número complejo es mayor o igual que su parte real y su parte imaginaria.

$$|z| \geq \operatorname{Re}(z) \quad \text{y} \quad |z| \geq \operatorname{Im}(z)$$

Demostración. En efecto:

$$(1) \text{ Sea } z=a+bi \rightarrow |z|^2 = a^2+b^2$$

$$(2) \text{ Pero: } |a|^2 = a^2 \rightarrow |a|^2 \leq a^2 + b^2$$

$$(3) \text{ Según (2): } |a|^2 \leq |z|^2 \rightarrow |a| \leq |z|$$

$$(4) \text{ Dado que } a \in \mathbb{R} \rightarrow a \leq |a|, \text{ y por (3): } |a| \leq |z|$$

$$(5) \text{ De donde se tiene: } |z| \geq \operatorname{Re}(z)$$

Análogamente se demuestra que: $|z| \geq \operatorname{Im}(z)$

VA.3: El módulo de un complejo es igual al módulo de su conjugado y de su inverso aditivo.

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

VA.4: El producto de cualquier complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

VA.5: El módulo de un producto de dos complejos es igual al producto de los módulos.

$$|z \cdot w| = |z| |w|$$

VA.6: El módulo de la suma de dos complejos es menor o igual que la suma de los módulos.

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Desigualdad Triangular})$$

Demostración. En efecto:

$$(1) |z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) \quad (\text{VA.4})$$

$$(2) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \quad (\text{CC.3})$$

$$(3) = z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} \quad (\text{Prop. Distrib.})$$

$$(4) = |z|^2 + z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w + |w|^2 \quad (\text{VA.4 y M.2})$$

$$(5) = |z|^2 + z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}} + |w|^2 \quad (\overline{z \cdot \bar{w}} = \bar{z} \cdot w = \bar{z} \cdot w)$$

(6) Como los términos centrales son complejos conjugados, entonces:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2 \quad (\text{CC.6})$$

$$(7) \leq |z|^2 + 2|z \cdot \bar{w}| + |w|^2 \quad (\text{VA.2})$$

$$(8) \leq |z|^2 + 2|z| |\bar{w}| + |w|^2 \quad (\text{VA.5})$$

$$(9) \leq |z|^2 + 2|z| |w| + |w|^2 \quad (\text{VA.3})$$

$$(10) \rightarrow |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

(Prop. en R)

$$(11) \therefore |z + w| \leq |z| + |w|$$

VA.7: El módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos.

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \text{ siempre que } w \neq w_0 = (0,0)$$

Demostración. En efecto: (1) $\left| \left(\frac{z}{w} \right) w \right| = |z|$

$$(2) \text{ Aplicando VA.5 se tiene: } \left| \frac{z}{w} \right| |w| = |z|$$

$$(3) \text{ Despejando: } \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Observación. Geométricamente, el módulo o valor absoluto de un número complejo significa la distancia entre el origen y el afijo correspondiente al complejo. Aplicaremos esta propiedad para hallar la distancia entre dos puntos.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente.

Por definición de módulo: $d(P_1, P_2) = |z|$

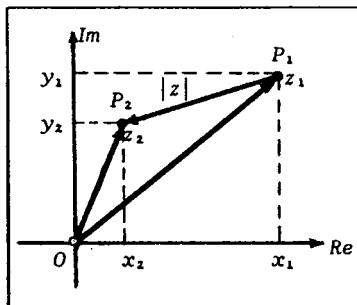
Pero: $z = z_1 - z_2 \rightarrow |z| = |z_1 - z_2|$

$$\rightarrow d(P_1, P_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i|$$

$$\therefore d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Por ejemplo, si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 5 - i$, la distancia entre sus afijos $P_1(2, 3)$ y $P_2(5, -1)$ es:

$$|z_1 - z_2| = d(P_1, P_2) = \sqrt{(2-5)^2 + (3+1)^2} = 5$$



9.10 LA RAIZ CUADRA DE UN NUMERO COMPLEJO

Sea el complejo: $z = a + bi$

cuya raíz cuadrada es el complejo: $w = \sqrt{z} \mid w = x + yi$

$$\text{Entonces: } w^2 = z \leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Aplicando módulos: } |(x+yi)^2| &= |a+bi| \rightarrow |x+yi|^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Desarrollando (1): } x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (3)$$

Sumando y luego restando (2) y (3) se tiene:

$$2x^2 = |z| + a \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{|z| + a}{2}}$$

$$2y^2 = |z| - a \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

Se obtiene cuatro pares de valores reales, de las cuales se seleccionan dos de acuerdo con la condición (4):

i) Si $b > 0$, entonces x e y se eligen con el mismo signo.

ii) Si $b < 0$, entonces x e y se eligen con distinto signo.

EJEMPLO. Hallar las raíces cuadradas de los siguientes complejos:

$$(1) z=5-12i \quad ; \quad (2) z=8i \quad ; \quad (3) z=-9$$

Solución. (1) $z=5-12i \rightarrow a=5$ y $b=-12 \rightarrow |z| = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} = 13$

$$x = \pm \sqrt{\frac{13+5}{2}} = \pm 3 \quad ; \quad y = \pm \sqrt{\frac{13-5}{2}} = \pm 2$$

Dado que $b=-12 < 0$, x e y se eligen con distinto signo, esto es:

$$x=3, y=-2 \quad \text{o} \quad x=-3, y=2$$

$$\text{Luego, si } w = \sqrt{5-12i} \rightarrow w_1=3-2i \text{ y } w_2=-3+2i \quad (\text{Note que } w_1=-w_2)$$

$$(2) z=8i \rightarrow a=0, b=8 \rightarrow |z|=8$$

$$\text{Como } a=0 \rightarrow x = y = \pm \sqrt{\frac{|z|}{2}} = \pm \sqrt{\frac{8}{2}} = \pm 2$$

$b=8 > 0$, x e y se eligen con el mismo signo. Entonces, las soluciones son

$$(2, 2) \text{ y } (-2, -2). \text{ Luego, si } w = \sqrt{8i} \rightarrow w_1=2+2i \text{ o } w_2=-2-2i \quad (w_1=-w_2)$$

$$(3) z=-9 \rightarrow a=-3 \text{ y } b=0 \rightarrow |z|=9$$

$$\text{Entonces: } x = \pm \sqrt{\frac{9-9}{2}} = 0 \quad ; \quad y = \pm \sqrt{\frac{9+9}{2}} = \pm 3$$

Como $b=0$, en este caso, los cuatro pares se reducen a dos: $(0, 3), (0, -3)$

$$\text{Luego, si } w = \sqrt{-9} \rightarrow w_1=3i \text{ o } w_2=-3i$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS



EJERCICIO 1. Simplificar: $E = (|z+2i| + |2-iz|)(|\overline{z}-2i|)$

$$\begin{aligned} \text{Solución. } E &= (|z+2i| + |i(-2i-z)|)(|\overline{z}-2i|) & (|\overline{z}|=|z|) \\ &= (|z+2i| + |i||-z-2i|)(|z+2i|) & (\text{CC.5 y VA.5}) \\ &= (|z+2i| + |-z-2i|)(|z+2i|) & (|i|=1 \text{ y VA.3}) \\ &= (2|z+2i|)(|z+2i|) \\ &= 2|z+2i|^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO 2. Si $z, w \in \mathbb{C}$, demostrar que: $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
 Qué significado geométrico tiene esta identidad?

Demostración. En efecto, apoyándonos en la propiedad: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, se tiene:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= (z - w)(\overline{z - w}) = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} \end{aligned} \quad (2)$$

Sumando (1)+(2), obtenemos:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

El significado geométrico de la identidad es el de un teorema de la geometría elemental: "La suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados".

En efecto, si P y Q son los afijos de z y w respectivamente, entonces:

$$\overline{OP} = |z| \quad \text{y} \quad \overline{OQ} = |w|$$

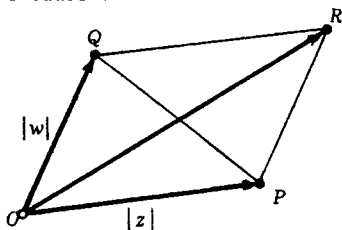
Además, R es el afijo de $z + w \rightarrow \overline{OR} = |z + w|$

Q también es el afijo de $z - w \rightarrow \overline{PQ} = |z - w|$

Entonces: $\overline{OR}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PR}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{QR}^2$

Pero como: $\overline{OQ} = \overline{PR}$ y $\overline{OP} = \overline{QR}$

$$\overline{OR}^2 + \overline{PQ}^2 = 2(\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2) \rightarrow |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$



EJERCICIO 3. Demostrar que: $|z - \frac{3}{4}i| = \frac{1}{4}$, si $z = \frac{i-r}{1+2ir}$, $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, $|z - \frac{3}{4}i| = \frac{1}{4}|4z - 3i|$ (1)

$$\begin{aligned} |4z - 3i| &= \left| \frac{4i - 4r}{1 + 2ir} - 3i \right| = \left| \frac{4i - 4r - 3i(1 + 2ir)}{1 + 2ir} \right| = \left| \frac{i + 2r}{1 + 2ir} \right| \\ &= \left| \frac{i(1 - 2ir)}{1 + 2ir} \right| = \frac{|i| |1 - 2ir|}{|1 + 2ir|} \end{aligned} \quad (\text{VA.5 y VA.3})$$

$$+ |4z - 3i| = \frac{1|1 + 2ir|}{|1 + 2ir|} = 1 \quad \text{Por tanto, en (1): } |z - \frac{3}{4}i| = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 4. Resolver la ecuación: $|x| - x = 1 + 2i$, $x \in \mathbb{C}$.

Solución. Sea $x = (a, b)$

$$+ \sqrt{a^2 + b^2} - (a, b) = (1, 2) \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - a = 1 \\ -b = 2 \rightarrow b = -2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos: $a = 3/2 \rightarrow x = (3/2, -2)$

EJERCICIO 5. Si w y z son dos números complejos y $u = \sqrt{wz}$, verificar la identidad: $|\frac{z+w}{2} - u| + |\frac{z+w}{2} + u| = |w| + |z|$

Demostración. En efecto, sea: $E = |\frac{z+w}{2} - u| + |\frac{z+w}{2} + u|$

$$+ E = \left| \frac{z+w-2\sqrt{wz}}{2} \right| + \left| \frac{z+w+2\sqrt{wz}}{2} \right| = \frac{1}{2} |\sqrt{z} - \sqrt{w}|^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{z} + \sqrt{w}|^2 \quad (\text{Pero: } z \cdot \bar{z} = |z|^2)$$

$$\begin{aligned} + E &= \frac{1}{2} [(\sqrt{z} - \sqrt{w})(\overline{\sqrt{z} - \sqrt{w}}) + (\sqrt{z} + \sqrt{w})(\overline{\sqrt{z} + \sqrt{w}})] \\ &= \frac{1}{2} [(\sqrt{z} - \sqrt{w})(\sqrt{z} - \sqrt{w}) + (\sqrt{z} + \sqrt{w})(\sqrt{z} + \sqrt{w})] \end{aligned}$$

Efectuando las operaciones indicadas obtenemos:

$$E = \frac{1}{2} [2\sqrt{w} \cdot \overline{\sqrt{w}} + 2\sqrt{z} \cdot \overline{\sqrt{z}}] = |\sqrt{w}|^2 + |\sqrt{z}|^2 + E = |w| + |z|$$

EJERCICIO 6. Demostrar que $\forall z \in \mathbb{C}$: i) $|z|^2 \geq 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)|$
ii) $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)|$

Demostración. En efecto:

i) (1) Sea $z = (x, y)$, donde: $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$

$$(2) \text{ Entonces: } (|x| - |y|)^2 \geq 0 \quad + \quad |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$$

$$(3) \quad + \quad |z|^2 \geq 2|x||y|$$

$$(4) \quad + \quad |z|^2 \geq 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)|$$

ii) Si $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad + \quad |z|^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2$

$$(5) \text{ De (3): } \quad + \quad |z|^2 \geq 2|x||y| \quad + \quad 2|z|^2 \geq |z|^2 + 2|x||y|$$

$$(6) \text{ Entonces: } 2|z|^2 \geq (|x| + |y|)^2 \quad + \quad \sqrt{2}|z| \geq |x| + |y|$$

$$(7) \text{ Por tanto: } \sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

EJERCICIO 7. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, demostrar que: $|z-w| \geq ||z| - |w||$

En qué condiciones se cumple la igualdad?

Demostración. En efecto:

$$(1) |z - w|^2 = (z - w)(\overline{z - w}) = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \quad (\text{VA.4 y CC.3})$$

$$(2) \quad = z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = |z|^2 - z \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z} + |w|^2$$

$$(3) \quad = |z|^2 + |w|^2 - (z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z})$$

$$(4) \quad = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \quad (\text{CC.6})$$

$$(5) \text{ Pero por VA.2: } \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad + \quad \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \leq |z \cdot \bar{w}| \quad + \quad -2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \geq -2|z \cdot \bar{w}|$$

$$(6) \text{ Luego, en (4): } |z - w|^2 \geq |z|^2 + |w|^2 - 2|z||\bar{w}| \quad (\text{Pero: } |\bar{w}| = |w|)$$

$$(7) \text{ Entonces: } |z - w|^2 \geq (|z| - |w|)^2 \rightarrow |z - w| \geq ||z| - |w||$$

Veamos ahora en que condiciones se cumple la igualdad.

Sean: $z=(a,b)$ y $w=(c,d) \rightarrow |z-w| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$; $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$; $|w|=\sqrt{c^2+d^2}$

Entonces: $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

Elevando al cuadrado y luego simplificando términos se llega a:

$$(ad-bc)^2 = 0 \leftrightarrow ad-bc = 0 \rightarrow ad = bc \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Por tanto, la igualdad se cumple, si y sólo si, las partes reales y las partes imaginarias de los complejos son proporcionales.

EJERCICIO 8. Determinar algebraicamente las raíces cuadradas de $z=8+4\sqrt{5}i$

Solución. Si $z=a+bi \rightarrow a=8$ y $|z| = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{5})^2} = 12$

$$\text{Sea: } w = \sqrt{z} = x + yi \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{|z|+a}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

Entonces: $x = \pm\sqrt{10}$, $y = \pm\sqrt{2}$. Como $b=4\sqrt{5}>0 \rightarrow x$ e y deben tener el mismo signo. Luego, si $w=x+yi \rightarrow w_1=\sqrt{10}+\sqrt{2}i$ o $w_2=-\sqrt{10}-\sqrt{2}i$; son las raíces de la ecuación dada.

EJERCICIO 9. Resolver la ecuación en $\mathbb{C}$: $x^2+(-2-2i)x = 3-6i$

Solución. $x^2-2(1+i)x-(3-6i)=0 \rightarrow x = (1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2+(3-6i)}$

$$\rightarrow x = (1+i) \pm \sqrt{3-4i} \quad (1)$$

$$\text{Sea: } \sqrt{3-4i} = c + di \rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{|z|+a}{2}}, \quad d = \pm \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

$$\text{Si } a=3 \text{ y } |z|=\sqrt{3^2+4^2}=5 \rightarrow c = \pm 2 \text{ y } d = \pm 1$$

Como $b=-4<0$, entonces c y d se eligen de distinto signo, esto es:

$$\sqrt{3-4i} = \pm(2-i). \text{ Sustituyendo en (1): } x = (1+i) \pm (2-i) \leftrightarrow x_1=3 \text{ o } x=-1+2i$$

$$\therefore C.S = \{(3,0), (-1,2)\}$$

EJERCICIOS: Grupo 57

1. Si $w = \frac{2+i}{3-i}$ y $z = \frac{1-i}{2+i}$, hallar: $|w+z|$.

2. Si $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)(-3+3i)}{(1-i)(3i)(1-\sqrt{3}i)}$, hallar $|z|$.

3. Calcular z^2 , siendo: $z = -|-1+i| + \sqrt{2}i$

4. Analizar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

a) $i^{17} + i^{103} + i^{200} = 1$

b) $\left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right| \leq 2, \forall z, w \in \mathbb{C} - \{z_0\}, z_0 = (0,0)$

$$c) \left| \frac{z_1}{2(1+i)w} \right| = \frac{|\bar{z}_1|(\sqrt{2})}{|\bar{w}|} , \forall w \neq 0$$

5. Analizar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

$$a) \text{ Si } z \neq 0, \frac{1}{z} = z^{-1} \leftrightarrow |z|=1$$

$$b) \text{ Si } z=(1+i)\cos\frac{5\pi}{9} \rightarrow |z| = \sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$c) \left| \frac{z}{w} + i \right| \leq \frac{|z| + |w|}{|w|} , w \neq 0$$

$$d) \frac{z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z}}{2} + z = \operatorname{Re}(z \cdot w + \bar{z}) + \operatorname{Im}(z)$$

6. Hallar z_1 y z_2 tales que: $z_1 + z_2 = 4+i$, $z_1 \cdot z_2 = 5+5i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{10}(1-i)$, $|z_1|^2=10$

7. Resolver la ecuación: $|x| + x = 2+i$, $x \in \mathbb{C}$

8. Hallar z , si z_1 , z_2 y z , son vértices de un triángulo equilátero tal que: $z_1=4+6i$, $z_2=(1-i)z_1$.

9. Dados $z_1=8+5i$ y $z_2=(5,0)$, calcular el complejo $z=(3,y)$ que forma con los anteriores un triángulo isósceles de vértice de lados iguales el z_1

10. Determinar el complejo cuyo afijo equidista de los afijos de $z_1=(-2,0)$, $z_2=(3,3)$ y $z_3=(0,-2)$

11. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Demostrar que si $z_1+z_2+z_3=0$ y $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, entonces z_1 , z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 1.

12. Dados w_1 y w_2 tales que $|w_1|=|w_2|=1$, $w_2=iw_1$, demostrar que $\forall z \in \mathbb{C}$, se cumple: $z = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w_1}\right)w_1 + \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w_2}\right)w_2$

13. Si $z \in \mathbb{C}$, resolver: $|z+i|^2 - z+1 = 4-2i$, $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.

14. Si w y $z \in \mathbb{C}$, demostrar que: $|z-w|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|w|^2)$

15. Si w y $z \in \mathbb{C}$, demostrar que:

$$|z-w|^4 + |z+w|^4 + 2|z^2-w^2|^2 = 4[(z \cdot \bar{z})^2 + (w \cdot \bar{w})^2 + 2z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}]$$

16. Dados $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, demostrar que:

$$|z_1 \cdot \bar{w}_2 - z_2 \cdot \bar{w}_1|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1 \cdot w_1 + z_2 \cdot w_2|^2$$

17. Si $w, z \in \mathbb{C}$, demostrar que: $|1-\bar{w} \cdot z|^2 - |w-z|^2 = (1-|w|^2)(1-|z|^2)$

18. Sean $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, tales que: $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_n|=1$. Demostrar que: $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} \right|$

19. Sea $z \in \mathbb{C}$, si se cumple: $(z + \frac{1}{z}) \in \mathbb{R}$, demostrar que $\operatorname{Im}(z)=0$ o $|z|=1$.

20. Hallar $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que: $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2| = 1$, $z_1 \cdot z_2$ es un imaginario puro.
21. Demostrar que si para $i=1, 2, \dots, n$, cada z_i es un número complejo, entonces: $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$
22. Sabiendo que z y w son números complejos tales que $|z| = |w| = 1$, demostrar que $\frac{z-w}{z+w}$, ($z \neq -w$), es un imaginario puro.
23. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
- a) Si $w = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \cdot z_2}$, demostrar que: $w \cdot \bar{w} = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1)}{1 + |z_1|^2 |z_2|^2 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1)}$
- b) En el caso a): si $|z_1| \leq 1$, demostrar que $|w| \leq 1$.
24. Determinar algebraicamente las raíces cuadradas de los siguientes complejos.
- a) $z = -15 - 8i$ d) $z = -8 + 6i$ g) $z = -2\sqrt{3} + 2i$ j) $z = -1 + 4\sqrt{3}i$
 b) $z = 3 - 4i$ e) $z = 5 - 12i$ h) $z = 7 + 24i$
 c) $z = -11 + 60i$ f) $z = -8 - 6i$ i) $z = 6 + \frac{5}{2}i$
25. Resolver la ecuación en $\mathbb{C}$: $(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i) = 5$
26. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$.
- a) $z^2 - (2+i)z + (3+i) = 0$ c) $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$
 b) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$ d) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$



9.11 LUGARES GEOMETRICOS EN C

El término *lugar geométrico* se aplica normalmente al conjunto de todos los puntos que tienen alguna característica geométrica común. Así por ejemplo, son lugares geométricos, la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse, etc. Haciendo uso de la noción de módulo, a continuación describiremos analítica y geométricamente algunos de estos lugares geométricos.

9.11.1 LA LINEA RECTA

EJEMPLO 1. Representar en el plano complejo las siguientes relaciones:

- a) $\operatorname{Re}(z) = 3$ c) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1$
 b) $\operatorname{Im}(z) = 2$ d) $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = z$

Solución. a) $\operatorname{Re}(z)=3$, es el conjunto de todos los pares ordenados para los cuales $x=3$, es decir, es el lugar geométrico de los afijos de la forma $z=(3,y)$. La ecuación $x=3$ corresponde a la recta paralela al eje imaginario que pasa por el punto de abscisa 3 (Fig. 1).

b) $\operatorname{Im}(z)=2$, es el lugar geométrico de todos los puntos o afijos para los cuales $y=2$, es decir, $\text{L.G.}=\{z|z=(x,2)\}$. Su gráfica corresponde a la recta paralela al eje real que pasa por el punto de ordenada 2 (Fig. 2).

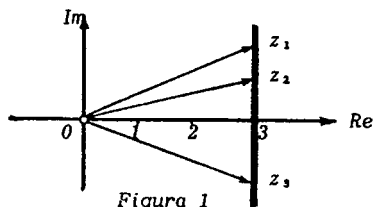


Figura 1

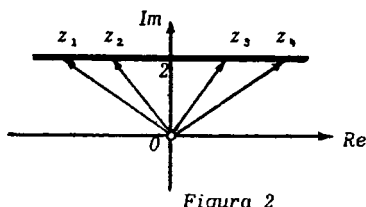


Figura 2

c) $\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=1$, es el lugar geométrico de todos los puntos tales que:

$$(x,0) + (0,y) = 1 \leftrightarrow x(1,0)+y(0,1) = (1,0) \leftrightarrow L:x+y=1$$

Es una recta que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$, (Fig. 3).

d) $\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)=z_0$, está representado en el plano complejo por todos los puntos tales que:

$$(x,0)-(0,y) = (0,0) \leftrightarrow x(1,0)-y(0,1) = (0,0) \leftrightarrow L:x-y=0$$

Es una recta que pasa por el origen de coordenadas y biseca al primer y tercer cuadrantes (Fig. 4).

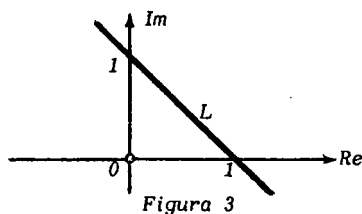


Figura 3

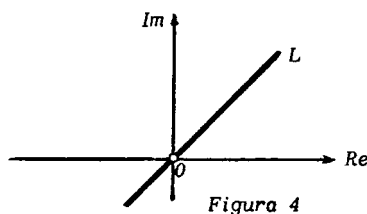


Figura 4

EJEMPLO 2. Determinar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de dos puntos dados.

Solución. Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente, y sea $z=P(x,y) \in \text{L.G.}$

Se debe cumplir que: $d(P_1,P) = d(P_2,P) \rightarrow |z - z_1| = |z - z_2|$
 $\rightarrow |z - (x_1,y_1)| = |z - (x_2,y_2)|$

Esta ecuación nos describe el L.G. de todos los afijos de z que equidistan

de los afijos de z_1 y z_2 , y que es la mediatriz del segmento que une P_1 y P_2 .

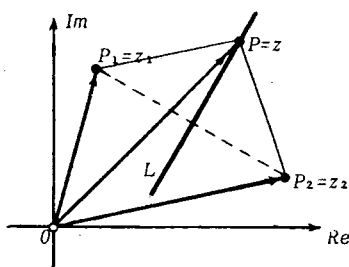
Por ejemplo, si $z_1 = (-1, 3)$ y $z_2 = (3, 5)$

$$+ |z - (-1, 3)| = |z - (3, 5)|$$

$$\leftrightarrow |(x+1, y-3)| = |(x-3, y-5)|$$

$$\leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$$

de donde, $L: 2x + y - 6 = 0$



9.11.2 LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Sean $Q(x_0, y_0)$ el afijo del complejo w y $P(x, y)$ el afijo generatriz del complejo z .

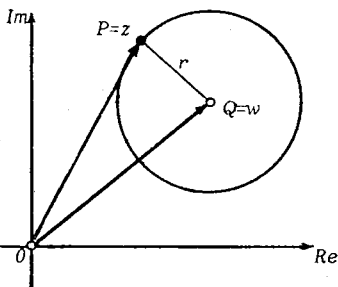
Por definición: $d(Q, P) = r \rightarrow |z - w| = r$

Entonces: $A = \{z \mid |z - w| = r, r > 0, w \text{ fijo}\}$, nos

describe el L.G. de todos los afijos de z a una distancia r del punto fijo w . Es decir, A es una circunferencia de centro w

y radio r . Si $w = z_0 = (0, 0)$, entonces la ecuación compleja $|z - z_0| = r$ representa una circunferencia con centro en el origen y radio r .

En efecto, $|(x, y) - (0, 0)| = r \rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \rightarrow x^2 + y^2 = r^2$



EJEMPLO 3. Sea $A = \text{L.G. de los afijos de } z \mid |\bar{z} - 5 + 7i| = |iz - 1 + 3i|$ y sea:

$B = \text{L.G. de los afijos de } z \mid |z + 1 + 2i| = 5$. a) Graficar $A \cup B$.

b) Hallar $A \cap B$.

Solución. Según VA.3: $|\bar{z}| = |z| \rightarrow |\bar{z} - (5 - 7i)| = |i(z + 3 + i)|$

$$\rightarrow |z - (5 + 7i)| = |i| |z - (-3 - i)| \rightarrow |z - (5, 7)| = |z - (-3, -1)|$$

La ecuación compleja representa la mediatriz del segmento que une los puntos $(5, 7)$ y $(-3, -1)$.

Entonces: $\sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}$, de donde, $L: x + y = 4$

En B : $|z - (-1, -2)| = 5$

Circunferencia de centro $Q(-1, -2)$ y radio 5

$$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = 5 \rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

b) $A \cap B$: De A : $y = 4 - x$; sustituyendo en B : $(x+1)^2 + (4-x+2)^2 = 25$

$$\text{de donde: } \left. \begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\leftrightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = 2 \\ &\leftrightarrow y_1 = 1 \text{ o } y_2 = 2 \end{aligned} \right\} \therefore A \cap B = (3, 1), (2, 2)$$

La gráfica de $A \cup B$ se deja como ejercicio.

9.11.3 LA PARÁBOLA

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta llamada directriz.

Caso 1. El eje de la parábola coincide o es paralelo con el eje real.

Sean: $P(x, y)$ el afijo genérico del complejo z ; el foco $F(p, 0)$, el afijo del complejo z_1 , y $L: x+p=0$, la directriz; donde p es la distancia del vértice al foco de la parábola.

Por definición: $d(P, F) = d(P, D)$

$$+ |z - z_1| = |\overline{PE} + \overline{ED}| = |\operatorname{Re}(z) + p|$$

$$+ |z - (p, 0)| = |x + p|$$

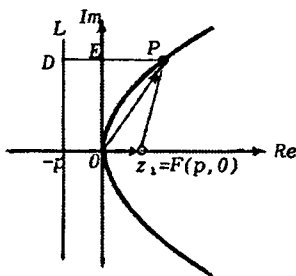
Es la ecuación compleja de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría coincidente con el eje real.

$$\text{En efecto, } \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2, \text{ de donde: } y^2 = 4px$$

Si el vértice coincide con el punto $V(h, k)$ la ecuación toma la forma:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$. Cuando $p > 0$, la curva se abre hacia la derecha y cuando $p < 0$, hacia la izquierda.



Caso 2. El eje de la parábola es coincidente o paralelo al eje imaginario.

En forma similar que el caso 1, tenemos: $z = P(x, y)$, $z_1 = F(0, p)$,

$L: y+p=0$. Luego: $d(P, F) = d(P, D)$

$$+ |z - z_1| = |\overline{PE} + \overline{ED}| + |z - (0, p)| = |\operatorname{Im}(z) + p|$$

$$+ |z - (0, p)| = |y + p|$$

Es la ecuación compleja de la parábola con vértice en el origen y eje coincidente con el eje imaginario. En efecto:

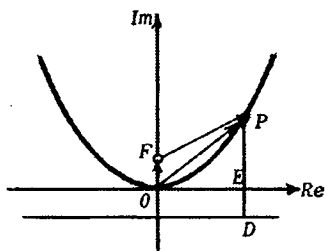
$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \quad + \quad x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$\text{de donde: } x^2 = 4py$$

Si el vértice coincide con el punto $V(h, k)$

la ecuación toma la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Cuando $p > 0$, la curva se abre hacia arriba y cuando $p < 0$, hacia abajo.



EJEMPLO 4. Construir el lugar geométrico: $|iz+3-2i| = |\operatorname{Re}(z)-4|$

Solución. $|i(z-2+3i)| = |x-4| \rightarrow |i||z-(2,3)| = |x-4| \rightarrow |z-(2,3)| = |x-4|$

Foco de la parábola: $F(2,3)$, directriz, $L: x-4=0$

$$+ \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = |x-4|$$

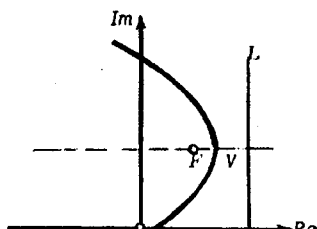
$$+ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2$$

$$+ (y-3)^2 = -4(x-3)$$

Vértice de la parábola: $V(3,3)$

$$4p = -4 \rightarrow p = -1 < 0$$

La curva se abre hacia la izquierda.



9.11.4 LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos es una constante $2a$.

En una elipse se tiene los siguientes elementos:

Eje mayor: $A_1A_2=2a$

Eje menor: $B_1B_2=2b$

Distancia focal: $F_1F_2=2c$, donde F_1 y F_2 son los focos de la elipse, de modo que se cumple la relación: $a^2 = b^2 + c^2$

Q es el centro de la elipse $\rightarrow Q = \frac{1}{2}(F_1+F_2)$

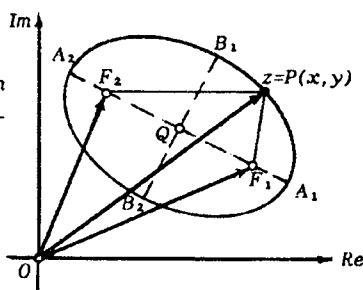
Determinación de la ecuación:

Sean $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ los afijos de los complejos z_1 y z_2 respectivamente.

Por definición: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \rightarrow |z-z_1| + |z-z_2| = 2a$

$$\rightarrow |z-(x_1, y_1)| + |z-(x_2, y_2)| = 2a$$

es la ecuación compleja de la elipse.



EJEMPLO 5. Construir el lugar geométrico: $|z-1-3i| + |z+2-2i| = 4$

Solución. $|z-(1+3i)| + |z-(-2+2i)| = 4$

$$\rightarrow |z-(1,3)| + |z-(-2,2)| = 4$$

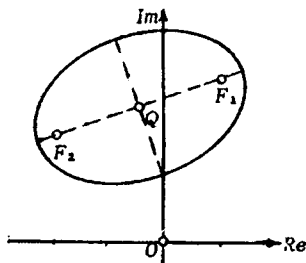
De donde: $2a=4 \rightarrow a=2$; $F_1(1,3)$ y $F_2(-2,2)$

$$d(F_1, F_2) = |F_1 - F_2| = |(3,1)|$$

$$2c = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \rightarrow c = \sqrt{10}/2$$

Como $c < a$, el L.G. es una elipse de centro:

$$Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (-1/2, 5/2)$$



9.11.5 LA HIPERBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual a $2a$.

Una hipérbola tiene por elementos, los siguientes:

Focos: $F_1(x_1, y_1)$ y $F_2(x_2, y_2)$

Eje transverso: $A_1A_2 = 2a$

Eje conjugado: $B_1B_2 = 2b$

Distancia focal: $F_1F_2 = 2c$

$c > a \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Centro: $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$

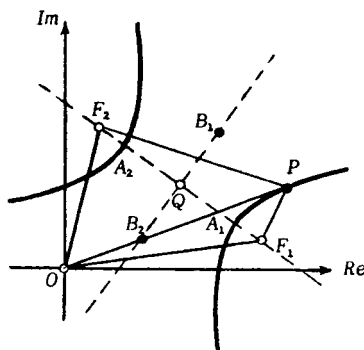
Determinación de su ecuación:

Sea $P(x, y)$ el afijo genérico del complejo z y sean F_1 y F_2 los afijos de los complejos z_1 y z_2 , respectivamente.

Por definición: $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$

$$+ ||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a \rightarrow ||z - (x_1, y_1)| - |z - (x_2, y_2)|| = 2a$$

es la ecuación compleja de una hipérbola.



EJEMPLO 6. Esbozar el lugar geométrico de los afijos $z \in \mathbb{C}$, tales que:

$$(| |iz - 3 + 4i| - |\bar{z} + 3i - 2| | - 3)(|z - 1 + 3i| - |z + 2 - 2i|) = 0$$

Solución. Sea $A = L.G.$ de los afijos de z $| |iz - 3 + 4i| - |\bar{z} + 3i - 2| | - 3 = 0$

$B = L.G.$ de los afijos de z $|z - 1 + 3i| - |z + 2 - 2i| = 0$

En A : $| |i(z + 3i + 4)| - |\bar{z} - (2 - 3i)| | = 3$

$$\rightarrow ||i|| |z - (-4 - 3i)| - |z - (2 + 3i)| | = 3$$

$$\rightarrow ||z - (-4, -3)| - |z - (2, 3)| | = 3$$

de donde: $a = 3/2$, $F_1 = (-4, -3)$, $F_2 = (2, 3)$

$$\rightarrow d(F_1, F_2) = |F_2 - F_1| = |(6, 6)|$$

$$\rightarrow 2c = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \rightarrow c = 3\sqrt{2}$$

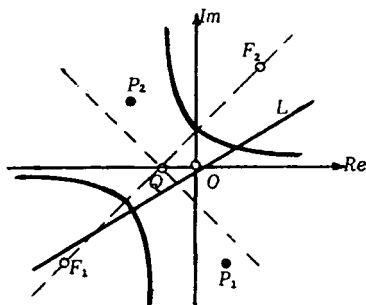
Como $c > a$, el L.G. es una hipérbola cuyo centro es: $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (-1, 0)$

En B : $|z - (1, -3)| = |z - (-2, 2)|$

Es la ecuación compleja de la mediatriz

del segmento que une a $P_1(1, -3)$ y $P_2(-2, 2)$

$$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}, \text{ de donde, } L: 3x - 5y - 1 = 0$$



Observación. Tener mucho cuidado al identificar lugares geométricos cuyas ecuaciones complejas tienen la forma: $|z-z_1| - |z-z_2| = 2a$, pues éstas representan solamente una de las dos ramas de la hipérbola.

EJEMPLO 7. Identificar y construir la gráfica del L.G.: $|z+3| - |z-3| = 4$

Solución. Se tiene: $|z-(-3,0)| - |z-(3,0)| = 4$

Aparentemente se trata de una hipérbola con focos en $F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$ y con centro $Q(0,0)$. Además: $2a=4$, $2c=6 \rightarrow b^2=c^2-a^2=5$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

Este mismo resultado lo obtenemos partiendo de la ecuación compleja dada:

$$|z+3| = 4 + |z-3| \rightarrow \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 4 + \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

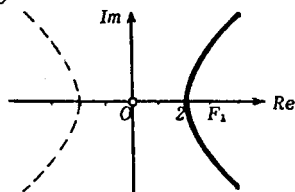
$$\text{Elevando al cuadrado: } 2\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 3x-4$$

Pero, $\sqrt{a} \geq 0$, $\forall a \geq 0$

$$+ (2\sqrt{(x-3)^2+y^2})^2 = (3x-4)^2 \wedge 3x-4 \geq 0$$

de donde: $5x^2-4y^2=20$, para $x \geq 4/3$

Por tanto, la ecuación del L.G. representa solamente la rama derecha de la hipérbola.



Nota. Asociadas a las gráficas de los lugares geométricos de ecuaciones complejas estudiadas, están las gráficas de relaciones que involucran desigualdades. Sus representaciones en el plano complejo se hacen en idéntica forma tal como se hizo para las gráficas de relaciones en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 8. Representar en el plano complejo los conjuntos de puntos que satisfacen a las siguientes relaciones:

$$(1) R_1 = \{z \mid -2 \leq \text{Im}(z) < 3\}$$

$$(3) R_3 = \{z \mid 2 < |z-1| \leq 4\}$$

$$(2) R_2 = \{z \mid 2\text{Re}(z) - 3\text{Im}(z) \leq 6\}$$

$$(4) R_4 = \{z \mid |z+1| \leq 4 - |z-1|\}$$

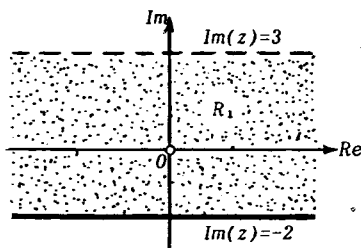
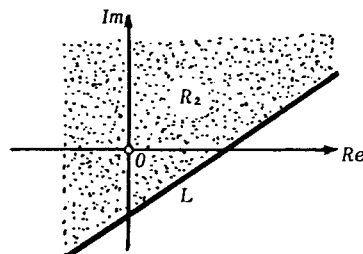
Solución. (1) La gráfica de R_1 es la intersección de las gráficas de:

$\{\text{Im}(z) \geq -2\} \wedge \{\text{Im}(z) < 3\}$; es decir, R_1 es el conjunto de puntos para los cuales: $(y \geq -2) \wedge (y < 3)$, que corresponde al semiplano que contiene al origen cuyos bordes inferior y superior son las rectas $y=-2$, $y=3$, respectivamente. (No se incluye la frontera $y=3$)

(2) La gráfica de R_2 es el conjunto de puntos $z=(x,y)$, tales que:

$$2x-3y \leq 6 \iff y \geq \frac{2}{3}x-2$$

Es decir, es el conjunto de puntos situados en el semiplano superior de la recta $L: 2x-3y=6$, incluida la frontera L .

Gráfica de R_1 Gráfica de R_2

- (3) Las gráficas de $|z-1|=2$ y $|z-1|=4$ son dos circunferencias concéntricas de radios 2 y 4 y centro común en $Q(1,0)$.

En efecto, si $|z-1|=2 \rightarrow |(x-1,y)|=2 \rightarrow C_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$

$$|z-1|=4 \rightarrow |(x-1,y)|=4 \rightarrow C_2: (x-1)^2 + y^2 = 16$$

En consecuencia, la gráfica de R_3 es el anillo circular comprendido entre las circunferencias C_1 y C_2 , incluyendo los bordes o fronteras.

- (4) $R_4 = \{z \mid |z+1| + |z-1| \leq 4\}$

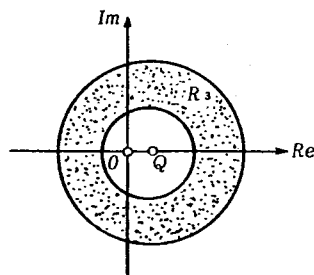
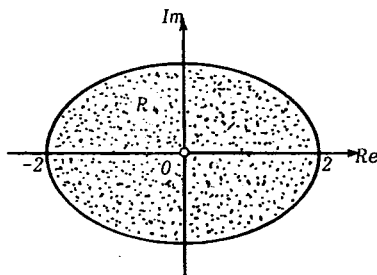
Si $|z-(-1,0)| + |z-(1,0)| \leq 4 \rightarrow 2a=4 \rightarrow a=2$; $F_1=(-1,0)$ y $F_2=(1,0)$

$$d(F_1, F_2) = |F_2 - F_1| = |(2,0)| \rightarrow 2c = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \rightarrow c=1$$

Como $a > c$, la gráfica de $|z+1| + |z-1| = 4$ es una elipse cuyo centro está en $Q = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = (0,0)$. Además, $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 4 - 1 = 3$

$$\text{Ecuación de la elipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Luego, la gráfica de R_4 es el conjunto de puntos que están en el interior de la elipse E incluyendo la frontera.

Gráfica de R_3 Gráfica de R_4

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Determinar los conjuntos de puntos del plano complejo que verifican: $(z + z^{-1}) \in \mathbb{R}$.

Solución. Sea $z=(x,y)$, tal que: $z \neq z_0 = (0,0) \rightarrow |z| \neq 0 \rightarrow x^2+y^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } z + z^{-1} &= z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{x-yi}{x^2+y^2} \\ &= \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)i \end{aligned}$$

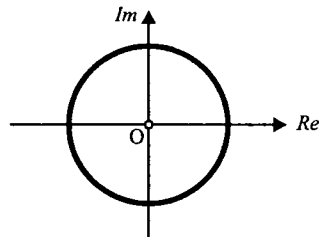
$$\text{Si } (z + z^{-1}) \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(z + z^{-1}) = 0 \rightarrow y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2} = 0 \rightarrow y(x^2+y^2-1) = 0 \wedge x^2+y^2 \neq 0$$

$$\rightarrow (y=0 \vee x^2+y^2=1) \wedge (x^2+y^2 \neq 0)$$

$$\rightarrow (y=0 \wedge x^2+y^2 \neq 0) \vee (x^2+y^2=1 \wedge x^2+y^2 \neq 0)$$

La gráfica de $(z + z^{-1}) \in \mathbb{R}$ es la unión de la gráfica de la circunferencia de radio $r=1$ y centro $z_0=(0,0)$ con la gráfica del eje real $y=0$, exceptuando el origen.



EJERCICIO 2. Demostrar que si c es una constante real positiva, entonces los afijos de $z \in \mathbb{C}$, tales que $|\frac{z+1}{z-1}|=c$ representa una circunferencia si $c \neq 1$ y una recta si $c=1$.

Demostración. En efecto, sea $z=(x,y) \rightarrow z+1=(x+1,y)$ y $z-1=(x-1,y)$, de modo que si $|\frac{z+1}{z-1}|=c \rightarrow |z+1|=c|z-1| \rightarrow |z+1|^2=c^2|z-1|^2$

$$\rightarrow (x+1)^2+y^2=c^2[(x-1)^2+y^2] \rightarrow (c^2-1)x^2+(c^2-1)y^2-2(c^2+1)x+c^2-1=0 \quad (1)$$

$$\text{Sea } a=c^2-1 \rightarrow ax^2+ay^2-2(a+2)x+a=0$$

$$\text{Completando cuadrados se tiene: } \left(x - \frac{a+2}{a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a+2}{a}\right)^2 - 1$$

Tenemos una circunferencia de centro $\left(\frac{a+2}{a}, 0\right)$ y radio: $r = \sqrt{\left(\frac{a+2}{a}\right)^2 - 1}$, para

$a \neq 0$, luego, $c^2-1 \neq 0 \rightarrow c^2 \neq 1 \rightarrow c \neq 1$

En (1), si $c=1 \rightarrow -2(1+1)x+0=0 \rightarrow x=0$, es una recta.

EJERCICIO 3. Analizar que lugar geométrico representa los afijos de los $z \in \mathbb{C}$ | $az \cdot \bar{z} + cz + c\bar{z} + b = 0$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$.

Solución. Sea $z=x+yi \rightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2+y^2$; $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x$

Luego, si: $a|z|^2 + c(z + \bar{z}) + b = 0 \rightarrow a(x^2+y^2) + 2cx + b = 0$

$$+ x^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right)x + y^2 = -\frac{b}{a} \rightarrow \left(x + \frac{c}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2-ab}{a^2}$$

El lugar geométrico es una circunferencia de centro $(-\frac{c}{a}, 0)$ y $r = \frac{\sqrt{c^2-ab}}{a}$

EJERCICIO 4. Hallar el lugar geométrico que describe el afijo z cuando:

$$z = 1+i + \frac{1}{1+ri}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Solución. $z = 1+i + \frac{1-ri}{1+r^2} = \left(1 + \frac{1}{1+r^2}, 1 - \frac{r}{1+r^2}\right)$

Entonces: $x = 1 + \frac{1}{1+r^2} \rightarrow 1+r^2 = \frac{1}{x-1} \rightarrow r^2 = \frac{2-x}{x-1}$

$$y = 1 - \frac{r}{1+r^2} = 1 - r\left(\frac{1}{1+r^2}\right) = 1 - r(x-1)$$

$$+ y-1 = -r(x-1) \rightarrow (y-1)^2 = r^2(x-1)^2 \rightarrow (y-1)^2 = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)(x-1)^2$$

de donde: $(y-1)^2 = -(x^2-3x+2) = -(x-3/2)^2 + 1/4$

$$\therefore (x-3/2)^2 + (y-1)^2 = 1/4$$

El lugar geométrico es una circunferencia de centro $(3/2, 1)$ y radio $r=1/2$.

EJERCICIO 5. Construir la gráfica de la relación:

$$R = \{z \mid ||z+4-3i|-|iz-2i+5|| \leq 8\}.$$

Solución. $||z+4-3i|-|iz-2i+5|| = ||z+4-3i|-|i(z-2+5i)||$
 $= ||z+4+3i| - |i||z-2+5i||$
 $= ||z-(-4,-3)| - |z-(2,5)|| = 8$

de donde: $2a=8 \rightarrow a=4$; $F_1=(2,5)$ y $F_2=(-4,-3) \rightarrow d(F_1, F_2) = |(2,5)-(-4,-3)|$

$$+ d(F_1, F_2) = |(6,8)| \rightarrow 2c = \sqrt{36+64} = 10 \rightarrow c=5$$

Como $c > a$, el L.G. es una hipérbola con

centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1+F_2) = (-1,1)$.

Gráfica de la relación:

Si $||z-(-4,-3)|-|z-(2,5)|| \leq 8$

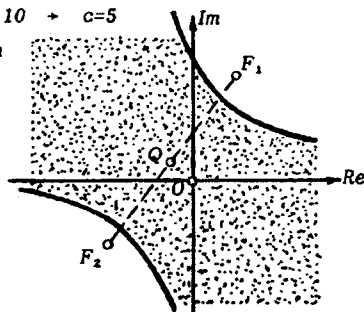
$$+ \sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2} - \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} \leq 8$$

Veamos si $(0,0) \in R$

$$\sqrt{4^2+3^2} - \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} \leq 8$$

$$\rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{29} \leq 8, \text{ se cumple.}$$

Luego, la gráfica de R es el conjunto de puntos ubicados entre las dos ramas de la hipérbola, incluidos los bordes.



EJERCICIO 6. Sean $R_1 = \{z \mid |z+1-2i| + |iz+2-3i| \leq 6\}$ y

$R_2 = \{z \mid |z+2-i| \leq |iz+5-4i|\}$. Construir la gráfica de $R_1 \cap R_2$.

Solución. (1) Construcción de los lugares geométricos:

$$A: |z+1-2i| + |iz+2-3i| = 6 \text{ y } B: |z+2-i| = |iz+5-4i|$$

(2) En A: $|z+1-2i| + |i(z-3-2i)| = 6 \rightarrow |z-(-1,2)| + |z-(3,2)| = 6$

(3) De donde: $2a=6 \rightarrow a=3$, $F_1=(3,2)$ y $F_2=(-1,2) \rightarrow d(F_1, F_2) = |(3,2)-(-1,2)|$
 $\rightarrow d(F_1, F_2) = |(4,0)| \rightarrow 2c=4 \rightarrow c=2$

(4) Como $c < a$, A es una elipse con centro en $Q = \frac{1}{2}(F_1+F_2) = (1,2)$

Además: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow b = \sqrt{5}$

(5) En B: $|z+2-i| = |i(z-4-5i)| \rightarrow |z+2+i| = |i||z-4-5i|$
 $\rightarrow |z-(-2,-1)| = |z-(4,5)|$

(6) El L.G. B es la mediatriz del segmento que une los puntos $(-2,-1)$ y $(4,5)$. En efecto: $|(x+2, y+1)| = |(x-4, y-5)|$
 $\rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$, de donde, $L: x+y=3$

(7) Gráfica de R_1 :

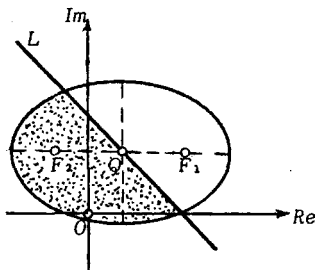
$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \leq 6$$

(8) Es $(0,0) \in R$? $\rightarrow \sqrt{1+4} + \sqrt{9+4} \leq 6$
 $\rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{13} \leq 6$, se cumple.

Luego, R_1 es la totalidad de puntos en el interior de la elipse, incluyendo el borde.

(9) Gráfica de R_2 : $x+y \leq 3 \rightarrow y \leq 3-x$

R_2 es el conjunto de puntos ubicados en el semiplano inferior de la recta L, incluyendo el borde L.



EJERCICIO 7. Sean: $R_1 = \{z \mid |iz+3i+2| + |z-5+6i| \leq 12\}$ y $R_2 = \{z \mid |iz-i-4| \geq 3\}$
 Hallar el área de $(R_1 \cap R_2)$.

Solución. Sean A: $|iz+3i+2| + |z-5+6i| = 12$ y B: $|iz-i-4| = 3$

(1) En A: $|i(z+3-2i)| + |z-5+6i| = 12 \rightarrow |z-(-3,2)| + |z-(5,6)| = 12$

(2) De donde: $a=6$, $F_1=(5,6)$, $F_2=(-3,2)$, $d(F_1, F_2) = |(5,6)-(-3,2)| = |(8,4)|$
 $\rightarrow 2c = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \rightarrow c = 2\sqrt{5}$. Como $a > c$, A es una elipse con centro en:

$$Q = \frac{1}{2}(F_1+F_2) = (1,4); a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 36 - 20 = 16 \rightarrow b = 4$$

(3) En B: $|i(z-1+4i)| = 3 \rightarrow |i||z-1+4i| = 3 \rightarrow |z-(1,4)| = 3$

Luego, B es una circunferencia de centro $Q(1,4)$ y radio $r=3$.

(4) Gráfica de R_1 : $|z-(-3,2)| + |z-(5,6)| \leq 12$

$$+ \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} \leq 12$$

Es $(0,0) \in R_1$? $+ \sqrt{9+4} + \sqrt{25+36} \leq 12$

$$+ \sqrt{13} + \sqrt{61} \leq 12, \text{ se cumple}$$

Luego, R_1 es el conjunto de puntos en el interior de la elipse, incluyendo el borde.

(5) Gráfica de $R_2: |z-(1,4)| \geq 3$

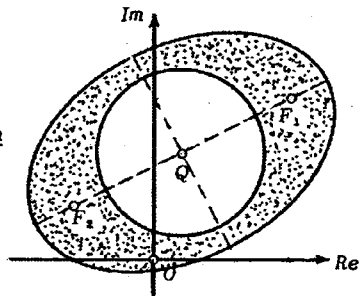
$$+ (x-1)^2 + (y-4)^2 \geq 9$$

Es $(0,0) \in R_2$? $+ (1)^2 + (4)^2 \geq 9$, se cumple.

Luego, la gráfica de R_2 es la totalidad de

puntos ubicados en la parte exterior a la circunferencia, incluyendo el borde. Entonces: $a(R_1 \cap R_2) = a(\text{elipse}) - a(\text{círculo}) = \pi ab - \pi r^2 = \pi(6)(4) - \pi(3)^2$

$$\therefore a(R_1 \cap R_2) = 15\pi \text{ u}^2$$



EJERCICIOS: Grupo 58

1. Identificar el lugar geométrico de los puntos que representan los números complejos $z=x+yi$, tales que:

a) $|z| + \text{Im}(z) = 0$

d) $|z-2| = 2|z+1|$

g) $|z-z_1| = |z-z_2|$

b) $|z| - \text{Re}(z) = 2$

e) $|z-2+i| = 2$

h) $\text{Im}(z^2) = 4$

c) $\bar{z} + z = |z|^2$

f) $|z+1-2i| + |z-1-2i| = 8$

i) $|z| = \text{Im}(z) + 1$

2. Hallar el lugar geométrico de los afijos que representan a los números complejos $z=x+yi$, que satisfacen a las desigualdades:

a) $|z-i| \leq 1$

d) $0 < \text{Re}(iz) < 1$

g) $||z-4i| - |z+2i|| \geq 4$

b) $|z-i-1| < 1$

e) $|z-2| - |z+2| > 3$

h) $||z-5-i| - |z+3i+5|| > 8$

c) $|z-2| + |z+4| \leq 10$

f) $|2z| > |1+z^2|$

i) $|z+1-5i| \geq |iz+3-i|$

3. Dadas las relaciones R_1 y R_2 , construir las gráficas de R_1 y R_2 .

a) $R_1 = \{z \mid |\text{Im}(z)-5| \geq |z+1-3i|\}$; $R_2 = \{z \mid |z-3+2i| \leq |iz+3i-4|\}$.

b) $R_1 = \{z \mid ||z+4i-3| - |z+5+2i|| \leq 8\}$; $R_2 = \{z \mid |iz-1+i| \leq 5\}$.

c) $R_1 = \{z \mid |z-1-2i| + |iz+6-3i| \geq 6\}$; $R_2 = \{z \mid |z-2+4i| \leq 3\}$.

d) $R_1 = \{z \mid |iz-2-i| \geq |\text{Re}(z)-3|\}$; $R_2 = \{z \mid |z-2-2i| \leq 3\}$.

4. Donde se halla el afijo de z si: $\text{Log}_{\sqrt{3}} \left(\frac{|z|^2 - |z+1|}{|z|+2} \right) < 2$

5. Si el afijo del complejo z describe $|z|=1$, qué lugar describe el afijo del complejo $w=x+yi$, sabiendo además que: $w(z+1)^2=4$.

9.12 FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

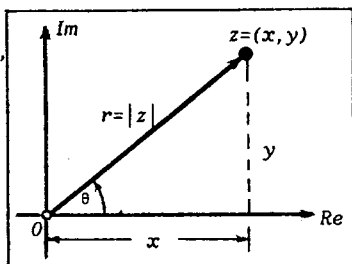
Sea el número complejo no nulo $z=x+yi$. Como ya se ha visto, este número se puede representar en un plano complejo por la pareja (x,y) . Si trazamos la recta desde el origen al punto (x,y) , habremos determinado una distancia r y un ángulo θ en posición normal (medido en sentido antihorario). Esto es, el punto (x,y) ha sido representado en términos de las coordenadas polares r y θ , mediante las relaciones:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

de modo que si: $z=x+yi$, entonces

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Esta representación del complejo z se llama forma polar o trigonométrica de z , donde r es el módulo, radio vector o norma y θ el argumento o amplitud.



Observaciones. (1) El número complejo z puede ser representado en su forma polar simplificada: $z=r\text{Cis}\theta$

(2) Los valores de r y θ se pueden hallar por las relaciones:

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(3) El argumento de un número complejo no es único, pero se tomará como argumento principal: $0 \leq \theta < 2\pi$

(Algunos autores toman como argumento principal: $-\pi < \theta \leq \pi$)

(4) La relación $\tan\theta = \frac{y}{x}$ da dos valores para θ y el ángulo que se elegirá será el que se determine por los signos de x y y .

(5) Dados dos complejos en su forma polar: $z=r\text{Cis}\theta$ y $z_1=r_1\text{Cis}\theta_1$ entonces si:

$$z = z_1 \iff r = r_1 \wedge \theta_1 = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

EJEMPLO 1. Determinar la forma polar de los siguientes complejos:

a) $z=-2+2\sqrt{3}i$

c) $z=1+\sqrt{3}i$

e) $z=3-3\sqrt{3}i$

b) $z=-\sqrt{3}-i$

d) $z=-5+0i$

f) $z=0-2i$

Solución. a) $z=-2+2\sqrt{3}i \rightarrow r = |z| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$

Para el argumento principal tenemos: $x=-2$ (negativo), $y=2\sqrt{3}$ (positivo), entonces θ termina en el II cuadrante.

Luego, si $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = \arctan(-\sqrt{3}) \rightarrow \theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$

$$\therefore z = 4\text{Cis}(2\pi/3)$$

$$b) z = -\sqrt{3} - i \rightarrow r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

Como x e y son ambos negativos, el argumento principal termina en el III cuadrante. Entonces: $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{(-1)}{(-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = \frac{7}{6}\pi$

$$\therefore z = 2\text{Cis}(7\pi/6)$$

$$c) z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 ; \tan \theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \arctan(\sqrt{3})$$

Como x e y son ambos positivos, el argumento figura en el I cuadrante.

$$\text{Luego, } \theta = 60^\circ = \pi/3 \rightarrow z = 2\text{Cis}(\pi/3)$$

$$d) z = -5 + 0i. \text{ Aquí, } y=0, x=-5 \text{ (semieje real negativo)} \rightarrow r = |z| = |-5| = 5$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-5} = 0 \rightarrow \theta = \pi. \text{ Luego: } z = 5\text{Cis}\pi$$

$$e) z = 3 - 3\sqrt{3}i \rightarrow r = |z| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

Como $x=3$ (positivo) e $y=-3\sqrt{3}$ (negativo), el argumento θ termina en el IV cuadrante. Luego, $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = 360^\circ - 60^\circ$

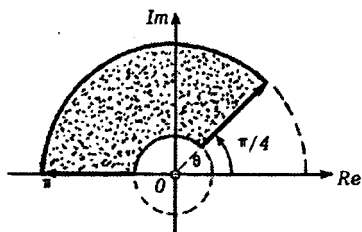
$$\rightarrow \theta = 300^\circ = \frac{5}{3}\pi. \text{ Entonces: } z = 6\text{Cis}(5\pi/3)$$

$$f) z = 0 - 3i. \text{ Aquí, } x=0, y=-3 \text{ (semieje imaginario negativo)} \rightarrow r = |z| = |-3| = 3$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{0} = -\infty \text{ (indeterminado)} \rightarrow \theta = 270^\circ = 3\pi/2 \rightarrow z = 3\text{Cis}(3\pi/2)$$

EJEMPLO 2. Si $A = \{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z| \leq 4, \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \pi\}$. Graficar e identificar el conjunto A .

Solución. $1 \leq |z| \leq 4$, es un anillo circular formado por las circunferencias: $|z|=1$ y $|z|=4$. Entonces A es un segmento de dicho anillo que parte de $\theta=\pi/4$ y termina en $\theta=\pi$.



9.13 OPERACIONES EN LA FORMA POLAR

9.13.1 MULTIPLICACION

El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo en forma polar, cuyo módulo es el producto de los módulos de los factores, y cuyo argumento es la suma de sus argumentos, esto es, si:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ y } z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Entonces: } z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{Sen} \theta_1) (\cos \theta_2 + i \operatorname{Sen} \theta_2) \\
 &= r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{Sen} \theta_1 \operatorname{Sen} \theta_2) + i(\operatorname{Sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{Sen} \theta_2)] \\
 &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{Sen}(\theta_1 + \theta_2)]
 \end{aligned}$$

$$\text{Así tenemos que: } z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \operatorname{Cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

INTERPRETACION GEOMETRICA. En un sistema cartesiano consideremos el complejo unitario $u=(1,0)$ y los afijos A y B representantes de los complejos $z_1=r_1 \operatorname{Cis} \theta_1$ y $z_2=r_2 \operatorname{Cis} \theta_2$, es decir, de coordenadas polares $A(r_1, \theta_1)$ y $B(r_2, \theta_2)$, respectivamente.

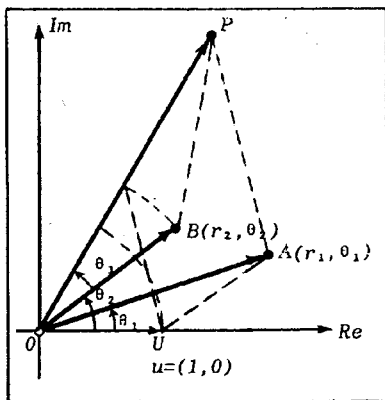
Considerando a $\overline{OB}$ como homólogo de $\overline{OU}$, construimos el $\triangle OBP = \triangle OUA$. Resultando P de coordenadas polares $(r, \theta_1 + \theta_2)$.

Determinamos r por la proporcionalidad de lados homólogos, esto es:

$$\frac{d(O,P)}{d(O,B)} = \frac{d(O,A)}{d(O,U)} \leftrightarrow \frac{r}{r_2} = \frac{r_1}{1}$$

$$\text{de donde: } r = r_1 \cdot r_2$$

Por lo tanto, el vector OP representa al producto de los complejos z_1 y z_2 .



9.13.2 COCIENTE

El cociente de dos números complejos, dados en su forma polar, es otro número complejo, también en forma polar, cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos. Esto es,

$$\text{si: } z_1=r_1 \operatorname{Cis} \theta_1 \text{ y } z_2=r_2 \operatorname{Cis} \theta_2 \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\text{En efecto, sea: } w = r \operatorname{Cis} \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } w = \frac{z_1}{z_2} \rightarrow w \cdot z_2 &= z_1 \\
 \rightarrow r \operatorname{Cis} \theta \cdot r_2 \operatorname{Cis} \theta_2 &= r_1 \operatorname{Cis} \theta_1 \rightarrow r \cdot r_2 \operatorname{Cis}(\theta + \theta_2) = r_1 \operatorname{Cis} \theta_1
 \end{aligned}$$

$$\text{Por la igualdad de complejos: } (r \cdot r_2 = r_1) \wedge (\theta + \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi)$$

$$\rightarrow (r = \frac{r_1}{r_2}) \wedge (\theta = \theta_1 - \theta_2, \text{ si } k=0)$$

$$\text{Luego, en (1): } w = \frac{r_1}{r_2} [\operatorname{Cis}(\theta_1 - \theta_2)] \leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\operatorname{Cis}(\theta_1 - \theta_2)]$$

INTERPRETACION GEOMETRICA. Consideremos el complejo unitario $u=(1,0)$ y los afijos A y B de los complejos:

$z_1=r_1\text{Cis}\theta_1$ y $z_2=r_2\text{Cis}\theta_2$, cuyas coordenadas polares son: $A(r_1, \theta_1)$ y $B(r_2, \theta_2)$.

Considerando a $\overline{OU}$ como homólogo de $\overline{OB}$, construimos sobre $\overline{OU}$ el $\triangle OUQ \sim \triangle OBA$; resultando Q de coordenadas $(r, \theta_1 - \theta_2)$.

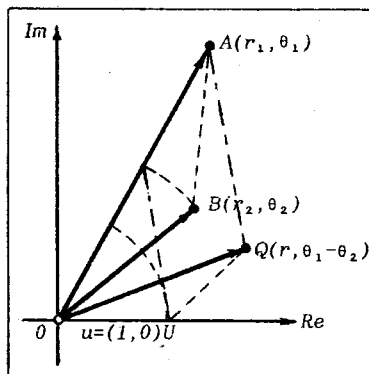
Según la proporcionalidad de lados homólogos:

$$\frac{d(O,Q)}{d(O,U)} = \frac{d(O,A)}{d(O,B)} \leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2}$$

de donde:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Por tanto, el vector $\overline{OQ}$ representa el cociente de los complejos z_1 y z_2 .



EJEMPLO 3. Sean: $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ y $z_2 = -2+2\sqrt{3}i$, efectuar en forma polar las siguientes operaciones: a) $z_1 \cdot z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución. En z_1 : $r_1 = |z_1| = 3$ y $\tan\theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{-3/2}{3\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Como x es positivo e y negativo, el argumento principal termina en el IV cuadrante + $\theta_1 = \arctan(-1/\sqrt{3}) = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ = 11\pi/6$

Luego, $z_1 = 3\text{Cis}(11\pi/6)$

En $z_2 = -2+2\sqrt{3}i$, $r_1 = |z_1| = 4$ y $\tan\theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

Como x es negativo e y positivo, el argumento principal termina en el II cuadrante + $\theta_2 = \arctan(\sqrt{3}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 2\pi/3$ + $z_2 = 4\text{Cis}(2\pi/3)$

$$a) z_1 \cdot z_2 = (3)(4)\text{Cis}\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = 12\text{Cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 12\text{Cis}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 12\text{Cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ z_1 \cdot z_2 = 12(\cos 90^\circ + i\text{Sen} 90^\circ) = 12(0+i) = 12i$$

$$b) \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\text{Cis}\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\text{Cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}\text{Cis}(180^\circ + 30^\circ) = \frac{3}{4}(-\cos 30^\circ - i\text{Sen} 30^\circ)$$

$$+ \frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{8}(\sqrt{3} + i)$$

EJEMPLO 4. Calcular: $z = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\theta + i\text{Sen}\theta)}{2(1-i)(\cos\theta - i\text{Sen}\theta)}$

Solución. Sean: $z_1 = 1-i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1-i$. Expresando ambos complejos en la forma polar y teniendo en cuenta que sus argumentos principales terminan en el IV cuadrante, se tiene:

Para z_1 : $r_1=2$ y $\text{Tan}\theta_1=-\sqrt{3} \rightarrow \theta_1=360^\circ-60^\circ=300^\circ \rightarrow z_1=2\text{Cis}300^\circ$

z_2 : $r_2=\sqrt{2}$ y $\text{Tan}\theta_2=-1 \rightarrow \theta_2=360^\circ-45^\circ=315^\circ \rightarrow z_2=\sqrt{2}\text{Cis}315^\circ$

$$\text{Luego, } z = \frac{2\text{Cis}300^\circ (\text{Cis}\theta)}{2/\sqrt{2}\text{Cis}315^\circ \text{Cis}(-\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{Cis}(300^\circ-315^\circ)\text{Cis}(\theta+\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{Cis}(-15^\circ)\text{Cis}2\theta$$

$$\rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}[\text{Cos}(2\theta-15^\circ)+i\text{Sen}(2\theta-15^\circ)] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\text{Cos}(2\theta - \frac{7\pi}{12}) + i\text{Sen}(2\theta - \frac{7\pi}{12})]$$

EJEMPLO 5. Representar gráficamente el L.G. de los afijos de los complejos que cumplen con la relación $\text{Arg}(\frac{z-z_1}{z_1-z_2})=0$, donde: $z_1=1+i$ y $z_2=-1+2i$.

Solución. Sean: $z=(x,y)$ y $w = \frac{z-z_1}{z_1-z_2} = \frac{(x-1)+(y-1)i}{2-i}$

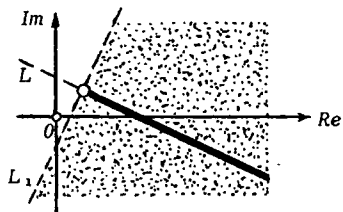
$$\rightarrow w = \frac{1}{5}[(2x-y-1)+(x+2y-3)i]$$

Si $\text{Arg}(w) = \arctan(\frac{x+2y-3}{2x-y-1}) \rightarrow \text{Arg}(w)=0 \leftrightarrow (x+2y-3=0) \wedge (2x-y-1 > 0)$

$$\rightarrow (x+2y-3=0) \wedge (y < 2x-1)$$

Sean $L: x+2y-3=0$ y $L_1: y=2x-1$

Entonces, los afijos del L.G. que cumplen con la relación dada se encuentran sobre la recta L , en la región del semiplano inferior ($y < 2x-1$) de la recta L_1 .



EJEMPLO 6. Si $z \in C \mid |z-1|=1$, $0 < \text{Arg}(z-1) < \pi$; determinar $\text{Arg}(z^2-z)$ en función de $\text{Arg}(z)$.

Solución. $|z-1|=1$ es una circunferencia con centro en $Q(1,0)$ y radio $r=1$.

Entonces, sean: $\theta=\text{Arg}(z)$ y $\alpha=\text{Arg}(z-1)$

Por la geometría elemental sabemos que:

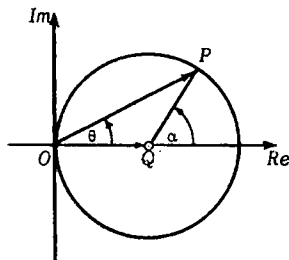
$$m(\angle QOP) = m(\angle OPQ) \quad (\text{Subtienden arcos iguales})$$

$$\text{Además: } \alpha = m(\angle QOP) + m(\angle OPQ) = 2\theta$$

$$\text{Luego: } \text{Arg}(z^2-z) = \text{Arg}z(z-1)$$

$$= \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z-1)$$

$$\rightarrow \text{Arg}(z^2-z) = \theta + 2\theta = 3\theta = 3\text{Arg}(z)$$



EJERCICIOS: Grupo 59

- Expresar los siguientes números complejos en su forma polar:
 - $z = 6\sqrt{3} + 6i$
 - $z = 3 - 3\sqrt{3}i$
 - $z = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$
 - $z = -5\sqrt{3} - 5i$
 - $z = -4 + 4\sqrt{3}i$
 - $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$
- Si $z_1 = 6\text{Cis}30^\circ$, $z_2 = 2\text{Cis}10^\circ$ y $z_3 = 3(\text{Cos}20^\circ - i\text{Sen}20^\circ)$, hallar: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3^{-1}$.
- Realizar la operación indicada y expresar el resultado en su forma rectangular.
 - $$\frac{(\sqrt{2}\text{Cis}22^\circ)(3\text{Cis}84^\circ)(2\text{Cis}27^\circ)}{(6\text{Cis}25^\circ)(\text{Cis}183^\circ)}$$
 - $$\frac{(\text{Cos}133^\circ + i\text{Sen}767^\circ)(\text{Cos}317^\circ + i\text{Sen}223^\circ)}{\text{Cos}30^\circ - i\text{Sen}30^\circ}$$
 - $$\frac{(\text{Cos}171^\circ + i\text{Sen}729^\circ)(\text{Cos}284^\circ + i\text{Sen}1336^\circ)}{\text{Cos}330^\circ - i\text{Sen}330^\circ}$$
 - $$\frac{(\text{Cos}295^\circ + i\text{Sen}655^\circ)[\text{Cos}(-20^\circ) + i\text{Sen}700^\circ]}{\text{Cos}415^\circ - i\text{Sen}125^\circ}$$
- Localizar en un plano complejo los afijos que representan a los números complejos $z = x + yi$, tales que:
 - $\pi/6 < \text{Arg}(z) \leq 2\pi/3$
 - $\pi/4 \leq \text{Arg}(z) < 3\pi/4$
 - $\pi/8 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi/2 \wedge |z| \leq 3$
 - $\pi/3 \leq \text{Arg}(z+i) \leq \pi$
- Hallar la forma polar de:
 - $z = i\text{Cis}(\pi/3) + 1$
 - $z = 1 + i\text{Cotg}\theta$, $\pi < \theta < 3\pi/2$
- Escribir en la forma polar el resultado de: $(6 + 2\sqrt{3}i)(7 + 7i)(4\sqrt{3} + 12i)$
- Si $z_1 = 1 - 2i$ y $z_2 = 2 + i$, graficar el lugar geométrico de los afijos de números complejos que satisfacen la relación: $\text{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z_1 - z_2}\right) = 0$
- Si $z = \text{Cis}\theta$, representar en forma polar: $\frac{2z}{1 - z^2}$
- Graficar los conjuntos:
 - $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = iw^2, \text{ donde } |w| = 1 \text{ y } \text{Arg}(w) \in [\pi/6, \pi/4]\}$
 - $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \left(\frac{i}{w}\right), |w| \geq 1 \text{ y } \text{Arg}(w) \in [\pi/6, \pi/3]\}$



9.14 POTENCIACION DE NUMEROS COMPLEJOS

TEOREMA DE MOIVRE. La potencia n -ésima de un número complejo en su forma polar tiene por módulo la potencia n -ésima de su módulo, y por argumento el producto de su argumento por n . Es decir, si:

$$z = r \operatorname{Cis} \theta \rightarrow z^n = r^n (\operatorname{Cos} n\theta + i \operatorname{Sen} n\theta)$$

Demostración. Por inducción completa, sea la proposición:

$$P(n) = \{n | z^n = r^n \operatorname{Cis} n\theta\}.$$

(1) Para $n=1 \rightarrow P(1): z^1 = r^1 \operatorname{Cis} \theta \rightarrow z = r \operatorname{Cis} \theta$, es verdadera

(2) Supongamos que para $n=h$, la proposición:

$$P(h): z^h = r^h \operatorname{Cis} h\theta, \text{ es verdadera} \quad (\text{Hip. Inductiva})$$

Demostraremos que para $n=h+1$, la proposición:

$$P(h+1): z^{h+1} = r^{h+1} \operatorname{Cis} (h+1)\theta, \text{ es verdadera}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \therefore z^{h+1} &= z^h \cdot z = (r \operatorname{Cis} \theta)^h (r \operatorname{Cis} \theta) = (r^h \operatorname{Cis} h\theta) (r \operatorname{Cis} \theta) \quad (\text{Hip. Ind.}) \\ &= r^h \cdot r [\operatorname{Cis} (h\theta + \theta)] = r^{h+1} [\operatorname{Cis} (h+1)\theta] \end{aligned}$$

(3) Conclusión. Se ha probado que: $P(1)$ es V $\wedge$ $P(h)$ es V $\rightarrow P(h+1)$ es V

EJEMPLO 1. Si $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, hallar: $\operatorname{Re}(z^{20})$.

Solución. Expresamos z en su forma polar:

$$|z| = r = \sqrt{(-\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = 1; \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $x < 0$, $y > 0$, el argumento principal termina en el II cuadrante.

Entonces: $\theta = \arctan(-1/\sqrt{3}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ = 5\pi/6$

Luego, si $z = r \operatorname{Cis} \theta \rightarrow z = 1 \operatorname{Cis} (5\pi/6) \rightarrow z^{20} = 1^{20} \operatorname{Cis} 20(5\pi/6)$ (Moivre)

$$\rightarrow z^{20} = \operatorname{Cis} (8 \times 2\pi + \frac{2}{3}\pi) = \operatorname{Cos} (2\pi/3) + i \operatorname{Sen} (2\pi/3)$$

$$\therefore \operatorname{Re}(z^{20}) = \operatorname{Cos} (\frac{2}{3}\pi) = \operatorname{Cos} (\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{Cos} (\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2. Usando el Teorema de Moivre, demostrar las siguientes identidades:

$$\operatorname{Sen} 3\theta = 3 \operatorname{Sen} \theta - 4 \operatorname{Sen}^3 \theta$$

$$\operatorname{Cos} 3\theta = 4 \operatorname{Cos}^3 \theta - 3 \operatorname{Cos} \theta$$

Solución. Sea el complejo unitario: $z = \operatorname{Cos} \theta + i \operatorname{Sen} \theta$ ($|z|=1$)

Elevando al cubo: $z^3 = \operatorname{Cos}^3 \theta + 3i \operatorname{Cos}^2 \theta \operatorname{Sen} \theta + 3i^2 \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sen}^2 \theta + i^3 \operatorname{Sen}^3 \theta$

$$\rightarrow z^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)i$$

Por el Teorema de Moivre: $z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$$\rightarrow \cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)i$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias obtenemos:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \leftrightarrow \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta \leftrightarrow \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

Nota 1. Dado un complejo $z = r\text{Cis}\theta$ y un entero positivo n , se cumple

$z^{-n} = r^{-n}\text{Cis}(-n\theta)$, es decir, el Teorema de Moivre es válido para potencias enteras negativas.

EJEMPLO 3. Dado $z = 1 - i$, hallar: z^{-3} .

Solución. El complejo z en su forma polar es: $z = \sqrt{2}\text{Cis}(7\pi/4)$ (Verificar)

$$\begin{aligned} \rightarrow z^{-3} &= (\sqrt{2})^{-3}\text{Cis}(-21\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\cos(\frac{21\pi}{4}) - i\sin(\frac{21\pi}{4})] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}[\cos(4\pi + \frac{5\pi}{4}) - i\sin(4\pi + \frac{5\pi}{4})] = \frac{\sqrt{2}}{4}[\cos(\frac{5\pi}{4}) - i\sin(\frac{5\pi}{4})] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}[\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) - i\sin(\pi + \frac{\pi}{4})] = \frac{\sqrt{2}}{4}[-\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})] \\ \rightarrow z^{-3} &= \frac{\sqrt{2}}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

Nota 2. Si para un complejo unitario $z = \text{Cis}\theta$ aplicamos el Teorema de Moivre, se cumplen las siguientes relaciones:

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{y} \quad z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

de donde se obtiene:

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) \quad , \quad \sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n})$$

Estas dos fórmulas se utilizan para expresar potencias de Seno y Coseno en función de ángulos múltiples.

EJEMPLO 4. Hallar $\sin^3\theta$ y $\cos^3\theta$ en términos de $\sin\theta$ y $\cos\theta$, respectivamente.

Solución. Para $n=1 \rightarrow 2\cos\theta = (z + \frac{1}{z}) \rightarrow (2\cos\theta)^3 = (z + \frac{1}{z})^3$

$$\rightarrow 32\cos^3\theta = z^3 + 5z + \frac{1}{z} + 10z^3(\frac{1}{z})^2 + \dots + 2(\frac{1}{z})^3 + 5z(\frac{1}{z})^2 + (\frac{1}{z})^3$$

$$\begin{aligned}
 + 32\cos^3\theta &= (z^3 + \frac{1}{z^3}) + 5(z^3 + \frac{1}{z^3}) + 10(z + \frac{1}{z}) \\
 &= (2\cos 5\theta) + 5(2\cos 3\theta) + 10(2\cos \theta) \\
 + \cos^3\theta &= \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos \theta)
 \end{aligned}$$

Análogamente, para $n=1$, $2i\sin\theta = z - \frac{1}{z}$ $(2i\sin\theta)^3 = (z - \frac{1}{z})^3$

$$\begin{aligned}
 + 32i^3\sin^3\theta &= z^3 - 5z + 10z - \frac{10}{z} + \frac{5}{z^3} - \frac{1}{z^3} \\
 &= (z^3 - \frac{1}{z^3}) - 5(z - \frac{1}{z}) + 10(z - \frac{1}{z}) \\
 + 32i\sin^3\theta &= (2i\sin 5\theta) - 5(2i\sin 3\theta) + 10(2i\sin \theta) \\
 \therefore \sin^3\theta &= \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin \theta)
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS: Grupo 60

1. Calcular y expresar el resultado en la forma $a+bi$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10} & \text{d) } (1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2})^{20} & \text{g) } \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}} \\
 \text{b) } (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{100} & \text{e) } (2-2i)^{10} - (2+2i)^{10} & \text{h) } (\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})^6 \\
 \text{c) } (\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20} & \text{f) } (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-60} & \text{i) } (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{100}
 \end{array}$$

2. Efectuar y expresar el resultado en la forma $a+bi$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \frac{(2\text{Cis}225^\circ)^2(3\text{Cis}140^\circ)^3}{(\sqrt{3}\text{Cis}25^\circ)^4(\sqrt{2}\text{Cis}60^\circ)^4} & \text{c) } \frac{-(\sqrt{2}\text{Cis}445^\circ)^2(\sqrt{6}\text{Cis}140^\circ)^4}{[2\text{Cis}(-130^\circ)]^2(3\text{Cis}345^\circ)^2} \\
 \text{b) } \frac{12\text{Cis}(-30^\circ)(\sqrt{6}\text{Cis}135^\circ)^2}{24\text{Cis}(-150^\circ)(\sqrt{3}\text{Cis}105^\circ)^2} &
 \end{array}$$

3. Si $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$, hallar: $\text{Re}(z^{20})$

4. Simplificar $(1+w)^n$, donde $w=\text{Cis}(2\pi/3)$

5. Simplificar: $(\frac{1+\text{Sen}x+i\text{Cos}x}{1+\text{Sen}x-i\text{Cos}x})^6$

6. Representar mediante un polinomio de primer grado en términos de ángulos múltiplos de x , lo siguiente:

$$\text{a) } \text{Sen}^8x \quad \text{b) } \text{Cos}^8x \quad \text{c) } \text{Sen}^7x \quad \text{d) } \text{Cos}^7x$$

7. Expresar mediante $\text{Cos}x$ y $\text{Sen}x$ lo siguiente:

$$\text{a) } \text{Cos}5x \quad \text{b) } \text{Cos}8x \quad \text{c) } \text{Sen}7x$$

8. Dado nz^+ , demostrar que: $\left(\frac{\text{Cotg } \theta + 1}{\text{Cotg } \theta - 1}\right)^n = \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta$
9. Si $z = \text{Cis } \theta$, hallar todos los valores de θ para los cuales $(z+1)^2$ es imaginario puro.
10. Resolver: $[(1 + \sqrt{3}i)^4 z]^2 = (1 - \sqrt{3}i)^4 z$
11. Calcular z^4 siendo:
- a) $z = (-\sqrt{3}+i)^{-1}$
- b) $z = \frac{a}{\text{Sen } \alpha + i \text{Sen } \alpha}$, $a \in \mathbb{R} \wedge 0 < \alpha < 2\pi$
- c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

9.15 RADICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

Por definición, dado un número complejo z y un entero positivo n , se dice que el complejo w es raíz n -ésima de z si y sólo si, $w^n = z$, se escribe:

$$w = \sqrt[n]{z}, \text{ o bien: } w = z^{1/n}$$

El problema de calcular w se resuelve fácilmente escribiendo z y w en forma polar, esto es, si: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ y $w = R(\cos \psi + i \sin \psi)$ (1)

entonces por definición de raíz: $w^n = z$

Por la fórmula de Moivre:

$$R^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

y por la igualdad de números complejos:

$$R^n = r \wedge n\psi = \theta + 2k\pi \quad + \quad R = \sqrt[n]{r} \wedge \psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Luego, en (1):

$$w = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

donde, para $k=0,1,2,\dots,n-1$, obtenemos los n valores de w , que lo designaremos por w_k , $k=0,1,2,\dots,n-1$, respectivamente.

En resumen, se ha demostrado el siguiente:

TEOREMA 9.1. Todo complejo no nulo admite n raíces n -ésimas distintas dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

donde: $k=0,1,2,\dots,n-1$, $r=|z|$ y $\theta=\text{Arg}(z)$

Dado que todas las raíces tienen el mismo módulo, éstas se encuentran sobre

una circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{r}$, y difieren en el argumento en múltiplos de $2\pi/n$. Por esta razón, las distintas n raíces de un complejo no nulo, se identifican geométricamente con los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia mencionada.

EJEMPLO 1. Determinar y representar en un plano complejo las raíces quintas de $z = -16 - 16\sqrt{3}i$

Solución. $r = |z| = 16\sqrt{1+3} = 32$; $\tan \theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \arctan(\sqrt{3}) = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

$$\text{Si } w = \sqrt[n]{z} \rightarrow w_k = \sqrt[n]{32} \left[\text{Cis} \left(\frac{240 + 2k\pi}{5} \right) \right], \text{ para } k=0, 1, 2, 3, 4$$

$$\text{Para } k=0 \rightarrow w_0 = 2\text{Cis}(48^\circ)$$

$$k=1 \rightarrow w_1 = 2\text{Cis}(120^\circ)$$

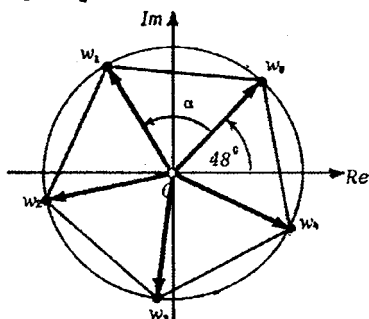
$$k=2 \rightarrow w_2 = 2\text{Cis}(192^\circ)$$

$$k=3 \rightarrow w_3 = 2\text{Cis}(264^\circ)$$

$$k=4 \rightarrow w_4 = 2\text{Cis}(336^\circ)$$

Obsérvese que la diferencia entre los argumentos de cada raíz es:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{360}{5} = 72^\circ$$



EJEMPLO 2. Determinar las raíces cúbicas de la unidad: $z=1$

Solución. Si $z=1 \rightarrow |z|=1$ y $\theta = \text{Arg}(z)=0 \rightarrow w = \sqrt[n]{1} \left[\text{Cis} \left(\frac{0+2k\pi}{3} \right) \right]$

$$+ w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ para } k=0, 1, 2$$

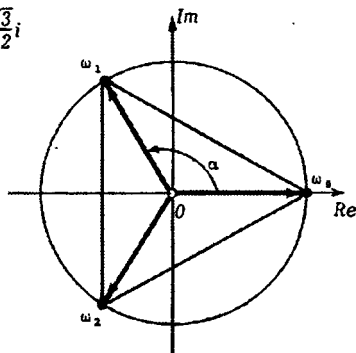
$$\text{Para } k=0 \rightarrow w_0 = \cos 0 + i\text{Sen} 0 = 1$$

$$k=1 \rightarrow w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=2 \rightarrow w_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{Sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Observaciones.

- (1) Los afijos de las raíces cúbicas de la unidad son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio $|z|=1$.
- (2) Las raíces cúbicas de la unidad se encuentran igualmente espaciadas con una de ellas un ángulo igual a $\alpha = 2\pi/3$
- (3) $w_2 = \overline{w_1} \rightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 0$



9.15.1 ECUACIONES CUADRATICAS CON COEFICIENTES COMPLEJOS

En anterior estudio vimos que una ecuación cuadrática con coeficientes reales $ax^2+bx+c=0$, tiene por raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En esta sección y, en idéntica forma, trataremos de hallar un proceso que nos permita resolver una ecuación de la forma:

$$Az^2+Bz+C = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{C} \text{ y } A \neq 0 \quad (1)$$

Completando el cuadrado se tiene:

$$A\left(z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{B^2}{4A^2}\right) = -C + \frac{B^2}{4A} \rightarrow \left(z + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2-4AC}{4A^2} \quad (2)$$

$$\text{Supongamos que: } w = z + \frac{B}{2A} \text{ y } u = \frac{B^2-4AC}{4A^2}$$

$$\text{de modo que en (2) tendremos: } w^2 = u \quad (3)$$

Puede ocurrir entonces que:

I) Si $B^2-4AC=0$, entonces $u=0$ y la ecuación (3) tendrá por solución el conjunto $\{B/2A\}$, esto es, si: $w^2=0 \leftrightarrow z = -B/2A$

En consecuencia, la ecuación (1) tendrá por: C.S = $\{-B/2A\}$

II) Si $B^2-4AC \neq 0$, la ecuación $w^2=u$ tiene dos soluciones denotados por w_0 y w_1 ,

Como $w = z + \frac{B}{2A}$, entonces las soluciones de la ecuación (1) serán:

$$z_1 = w_0 - \frac{B}{2A} \text{ y } z_2 = w_1 - \frac{B}{2A}$$

Pero en la sección 9.10 vimos que $w_1 = -w_0$, por tanto, el conjunto solución

es: $S = \left\{w_0 - \frac{B}{2A}, -w_0 - \frac{B}{2A}\right\}$, donde w_0 es cualquiera de las dos soluciones

de: $w^2 = \frac{B^2-4AC}{4A^2}$. En resumen hemos demostrado el siguiente:

TEOREMA 9.2 El conjunto de soluciones de la ecuación:

$$Az^2+Bz+C=0, \quad A, B, C \in \mathbb{C} \text{ y } A \neq 0 \text{ es:}$$

$$I) \left\{ -\frac{B}{2A} \right\} \text{ si } B^2-4AC=0 \text{ y}$$

$$II) \left\{ -\frac{B}{2A} + w_0, -\frac{B}{2A} - w_0 \right\} \text{ si } B^2-4AC \neq 0,$$

donde w_0 es una de las soluciones de la ecuación: $w^2 = \frac{B^2-4AC}{4A^2}$

EJEMPLO 3. Resolver: $z^2 - (3+2i)z + (5+5i) = 0$

Solución. Tenemos: $A=1$, $B=-(3+2i)$ y $C=5+5i$

$$(1) \text{ Entonces: } B^2 - 4AC = (3+2i)^2 - 4(1)(5+5i) = -15-8i \neq 0$$

$$(2) \text{ Resolvemos la ecuación: } w^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} = \frac{-15-8i}{4} = -\frac{15}{4} - 2i$$

$$(3) \text{ Elegimos una de sus raíces cuadradas: } w_0 = \frac{1}{2} - 2i$$

$$(4) \text{ Entonces: } -\frac{B}{2A} + w_0 = \frac{3+2i}{2} + \frac{1}{2} - 2i = 2-i$$

$$-\frac{B}{2A} - w_0 = \frac{3+2i}{2} - \frac{1}{2} + 2i = 1+3i$$

$$(5) \therefore C.S = \{2-i, 1+3i\}$$

9.15.2 RAICES PRIMITIVAS DE LA UNIDAD

Si $z = \sqrt[n]{1} = 1$ y $1 = \cos 0 + i \sin 0$, entonces las n -ésimas raíces de la unidad, según el Teorema de Moivre, están dadas por:

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (I)$$

$$\text{Si } k=1 \rightarrow w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \rightarrow w_1^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Se observa que: $w_1^k = w_k$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

Esto significa que todas las raíces de la unidad son expresadas como potencias de w_1 , es decir, w_1 genera todas las n -ésimas raíces de la unidad, de aquí que w_1 recibe el nombre de **raíz primitiva** de la unidad de orden n .

En general, si w es la raíz n -ésima de la unidad tal que sus potencias:

$$w^k \text{ para } k=0, 1, 2, \dots, n-1, \text{ son diferentes}$$

entonces se dice que w es una raíz primitiva de orden n de la unidad.

En el ejemplo 2 determinamos las raíces cúbicas de la unidad:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De las cuales w_1 y w_2 son raíces primitivas de la unidad de orden 3, porque para $k=n-1 + k=2$, se tiene:

$$w_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w_2, \text{ es diferente a } w_1$$

$$w_2^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w_1, \text{ es diferente a } w_2$$

$w_0^2 = (1)^2 = 1$, es igual, + w_0 no es raíz primitiva de la unidad de orden 3.

Observamos que: $n=3$ y $k=2$ son primos entre sí, es decir, $\text{mod}(2,3)=1$

En consecuencia, el número de las raíces primitivas de la unidad de orden n

se deducen del siguiente:

TEOREMA 9.3 Sea $0 \leq k < n$. Entonces w_k es una raíz primitiva de la unidad de orden n , si y sólo si n y k son coprimos (primos entre si).

EJEMPLO 4. Determinar todas las raíces de la unidad de orden 6.

Solución. Las raíces sextas de la unidad están dadas por (I) para $n=6$, es-

$$\text{tas son: } w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{6}\right), \quad k=0,1,2,3,4,5$$

Según el Teorema 9.3, elegimos k de modo que $\operatorname{mcd}(k,6)=1$, esto ocurre para: $k=1$ y $k=5$, entonces:

$$w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \cos 60^\circ + i\operatorname{Sen} 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\operatorname{Sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos 300^\circ + i\operatorname{Sen} 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

EJEMPLO 5. Demostrar que si ω es raíz cúbica primitiva de 1, entonces:

$$(1-\omega)(1-\omega^2)=3.$$

Demostración. En efecto, si ω es raíz cúbica primitiva de 1, entonces ω^2 también lo es, pues el $\operatorname{mcd}(2,3)=1$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } (1-\omega)(1-\omega^2) &= 1 - \omega^2 - \omega + \omega^3 \\ &= 1 - (\omega^2 + \omega) + \omega^3 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Pero: } 1 + \omega + \omega^2 = 0 \quad (\text{Ver ejemplo 2}) \quad \rightarrow \quad \omega^2 + \omega = -1$$

$$\text{Por tanto, en (1): } (1-\omega)(1-\omega^2) = 1 - (-1) + 1 = 3$$

EJERCICIOS: Grupo 61

1. Calcular todas las raíces que se indican:

a) Las raíces cuartas de $z = -8 + 8\sqrt{3}i$

b) Las raíces cúbicas de $z = -8i$

c) Las raíces quintas de $z = 16 - 16\sqrt{3}i$

2. Calcular: a) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$

3. Si ω_0, ω_1 y ω_2 son todas las raíces de la ecuación $x^3=1$, hallar el valor de:

a) $\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2$ b) $\omega_0 \cdot \omega_1 + \omega_0 \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot \omega_2$

4. Demostrar que si z_1 es una raíz cúbica de z y si $1, \omega$ y ω^2 son las raíces cúbicas de la unidad, entonces $z_1, z_1 \cdot \omega, z_1 \cdot \omega^2$ son las tres raíces cúbicas de z .
5. Resolver las siguientes ecuaciones:
- a) $z^2 + (1-5i)z - (12+5i) = 0$ c) $(z^3 - iz^2) - (2+2i)(z^2 - iz) + 2(iz-1) = 0$
 b) $z^2 - (3+2i)z + (1+3i) = 0$ d) $z^2 + (4+3i)z + (7+i) = 0$
6. Hallar todas las soluciones de las ecuaciones siguientes:
- a) $z^3 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$ d) $z^3 + 6 + 6\sqrt{3}i = 0$ g) $z^3 + (2i-3)z^2 + 5-i = 0$
 b) $z^3 + 4 = -4\sqrt{3}i$ e) $z^3 - 2z^2 + 4 = 0$ h) $16z^4 = (z+1)^4$
 c) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ f) $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ i) $z^6 - 35z^3 - 36 = 0$
 j) $(z+3)^4 = 16i$
7. Si ω es una raíz cúbica de la unidad, demostrar que:
- a) $(1+\omega^2)^3 = \omega$ c) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2) = 4$
 b) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^3) = 9$
8. Si ω es una raíz n -ésima de la unidad, hallar el valor de:
- a) $S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1}$
 b) $S = 1 + 4\omega + 9\omega^2 + \dots + n^2\omega^{n-1}$
9. Sean m y $n \in \mathbb{Z}^+$ y sea M un múltiplo de m y n , tal que $M \in \mathbb{Z}^+$. Si ω_1 es raíz m -ésima de 1 y ω_2 es raíz n -ésima de 1, probar que $\omega_1 \cdot \omega_2$ es raíz M -ésima de 1.



9.16 LA EXPONENCIAL COMPLEJA

Si $z = x + yi$, se define exponencial de z como:

$$\exp(z) = e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

donde e^x es la función exponencial real y e es la base de los logaritmos neperianos ($e = 2.71828\dots$)

Si z es un imaginario puro, esto es, si $x=0 \rightarrow z = yi$ luego, en la exponencial compleja se tiene:

$$\exp(yi) = e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Pero: $e^z = (e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y) \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{e^x \operatorname{sen} y}{e^x \cos y}\right) = \arctan(\tan y)$
 $\rightarrow \theta = y$

luego, la relación: $\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta$

es la llamada: **fórmula de Euler o exponencial compleja**.

Siendo la representación de un número complejo:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta)$$

la fórmula de Euler da lugar a una representación alternativa de los números complejos en la forma exponencial:

$$z = re^{i\theta}$$

donde: $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Ejemplos: $z = i = \cos(\pi/2) + i\operatorname{Sen}(\pi/2) \rightarrow z = e^{i(\pi/2)}$

$$z = -1 = \cos\pi + i\operatorname{Sen}\pi \rightarrow z = e^{i\pi}$$

$$z = 1 = \cos 0 + i\operatorname{Sen} 0 \rightarrow z = e^{i0} = e^{i2\pi}$$

$$z = -i = \cos(3\pi/2) + i\operatorname{Sen}(3\pi/2) \rightarrow z = e^{i(3\pi/2)} = e^{-i(\pi/2)}$$

$$z = -4 + 4\sqrt{3}i = 8\operatorname{Cis}(2\pi/3) \rightarrow z = 8e^{i2\pi/3}$$

Nota. Si en la fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{Sen}\theta$, se sustituye θ por $(-\theta)$ se obtiene: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{Sen}\theta$

De estas dos ecuaciones resultan las identidades:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) ; \operatorname{Sen}\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

que son de mucha utilidad en demostraciones de identidades trigonom.

EJEMPLO. Hallar $\cos^3\theta$ en función de $\cos\theta$.

Solución. $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \rightarrow \cos^3\theta = \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})$

$$\rightarrow \cos^3\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \frac{3}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right] = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

9.16.1 PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL COMPLEJA

EC.1: $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

Demostración. En efecto, sean: $z = x + yi$, $w = a + bi$

$$(1) \rightarrow e^z = e^x(\cos y + i\operatorname{Sen} y) , \quad e^w = e^a(\cos b + i\operatorname{Sen} b)$$

$$(2) \rightarrow e^z \cdot e^w = [e^x(\cos y + i\operatorname{Sen} y)][e^a(\cos b + i\operatorname{Sen} b)]$$

$$(3) \quad = e^{x+a}[(\cos y \cos b - \operatorname{Sen} y \operatorname{Sen} b) + i(\cos y \operatorname{Sen} b + \operatorname{Sen} y \cos b)]$$

$$(4) \rightarrow e^z \cdot e^w = e^{x+a} [\cos(y+b) + i \operatorname{Sen}(y+b)] = e^{x+a} \cdot e^{i(y+b)}$$

$$(5) \rightarrow e^z \cdot e^w = e^{(x+a)+i(y+b)} = e^{z+w}$$

$$\text{EC.2: } \frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$$

$$\text{EC.3: } e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\text{EC.4: } |e^z| = e^x, \quad y = \operatorname{Arg}(z), \text{ donde } z = x + yi$$

Demostración. En efecto, por definición: $e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{Sen} y)$

$$\rightarrow |e^z| = e^x \sqrt{(\cos y)^2 + (\operatorname{Sen} y)^2} = e^x$$

$$\text{Si } e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{Sen} y \rightarrow \theta = \operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{e^x \operatorname{Sen} y}{e^x \cos y}\right) = \arctan(\operatorname{Tg} y)$$

$$\rightarrow \theta = \operatorname{Arg}(z) = y$$

$$\text{EC.5: Si } y \text{ es real} \rightarrow |e^{iy}| = 1$$

$$\text{EC.6: } e^z = 1 \leftrightarrow z = 2n\pi i, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración. En efecto, sea $z = x + yi$

$$(1) \rightarrow e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{Sen} y) = e^x \cos y + i e^x \operatorname{Sen} y$$

$$(2) \text{ Si } e^z = 1 \rightarrow e^x \cos y + i e^x \operatorname{Sen} y = 1$$

$$(3) \text{ Por la igualdad de complejos: } e^x \cos y = 1 \wedge e^x \operatorname{Sen} y = 0$$

$$(4) \text{ Como } e^x \neq 0, \text{ entonces: } \operatorname{Sen} y = 0 \leftrightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \text{ Ahora, si } y = k\pi \rightarrow \cos y = \cos k\pi = (-1)^k$$

$$(6) \text{ Luego, en la primera igualdad de (3): } e^x (-1)^k = 1 = (-1)^{2k} \rightarrow e^x = (-1)^k$$

$$(7) \text{ Pero } e^x > 0 \rightarrow k = 2n \rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \leftrightarrow x = 0 \\ y = 2n\pi \end{cases}$$

$$(8) \text{ Por lo tanto: } z = x + yi = 2n\pi i, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$(9) \text{ Recíprocamente, si } z = 2n\pi i \rightarrow e^z = e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \operatorname{Sen} 2n\pi = 1 + 0i = 1$$

$$\text{EC.7: } e^z = e^w \leftrightarrow z = w + 2k\pi i, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{EC.8: } (e^z)^n = e^{nz}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

9.16.2 OPERACIONES EN LA FORMA EXPONENCIAL



Las fórmulas relativas al producto, cociente, potenciación y radicación de números complejos en la forma polar son similares para dichas operaciones en la forma exponencial. Esto es:

- i) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- iii) $z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
- iv) $z^{1/n} = (r e^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k=0, 1, 2, \dots, n-1$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, determinar $z^n + w^n$, donde n es un número entero.

Solución. Expresando z y w en su forma polar obtenemos:

$$z = \text{Cis}(2\pi/3) \text{ y } w = \text{Cis}(4\pi/3) \quad (\text{Verificar})$$

$$\text{Luego: } z^n + w^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$\text{Pero: } \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ \text{ y } \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ \rightarrow \cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ \text{ y } \sin 240^\circ = -\sin 60^\circ \rightarrow \sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\text{Por tanto, en (1): } z^n + w^n = 2\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

EJERCICIO 2. Aplicar la potenciación de números complejos para expresar $\text{Tg}\theta$ en términos de $\text{Tg}\theta$.

Solución. Por el Teorema de Moivre: $\cos\theta + i\sin\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

Desarrollando la potencia y luego ordenando las partes reales y las partes imaginarias, obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos\theta + i\sin\theta &= (\cos^2\theta - 15\cos^4\theta \sin^2\theta + 15\cos^2\theta \sin^4\theta - \sin^6\theta) + \\ &\quad + i(6\cos^5\theta \sin\theta - 20\sin^3\theta \cos^3\theta + 6\cos\theta \sin^5\theta) \end{aligned}$$

Por igualdad de números complejos:

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta &= \cos^2\theta - 15\cos^4\theta \sin^2\theta + 15\cos^2\theta \sin^4\theta - \sin^6\theta \\ \sin\theta &= 6\cos^5\theta \sin\theta - 20\sin^3\theta \cos^3\theta + 6\cos\theta \sin^5\theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Finalmente, dividiendo cada término del numerador y denominador de $\tan\theta$ en

$$\text{tre } \cos^6\theta, \text{ resulta: } \tan\theta = \frac{6\tan\theta - 20\tan^3\theta + 6\tan^5\theta}{1 - 15\tan^2\theta + 15\tan^4\theta - \tan^6\theta}$$

EJERCICIO 3. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, demostrar que: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

Demostración. En efecto, si $z = re^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \rightarrow \overline{(z^n)} = r^n e^{-in\theta} \quad (1)$$

$$\bar{z} = re^{-i\theta} \rightarrow (\bar{z})^n = r^n e^{-in\theta} \quad (2)$$

Por tanto, de (1) y (2): $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

EJERCICIO 4. Hallar todas las raíces de la ecuación: $z^8 + z^4 + 1 = 0$

Solución. Sea $z^4 = u \rightarrow u^2 + u + 1 = 0 \leftrightarrow u = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Expresando cada una de estas raíces en su forma polar se tiene:

$$u_1 = \text{Cis}(120^\circ) \text{ y } u_2 = \text{Cis}(240^\circ)$$

$$\text{Luego, si } z^4 = \text{Cis}(120^\circ) \rightarrow w_k = \text{Cis}\left(\frac{120+2k\pi}{4}\right), k=0,1,2,3$$

$$z^4 = \text{Cis}(240^\circ) \rightarrow w_k = \text{Cis}\left(\frac{240+2k\pi}{4}\right), k=0,1,2,3$$

Se deja al lector hallar las 8 raíces dando los respectivos valores de k para cada z^4 , luego ubicarlas en un plano complejo.

EJERCICIO 5. Si $z = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$, hallar $\text{Re}(z^{12})$.

Solución. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{8}$; $\text{Tg}\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3} \rightarrow \theta = 75^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } z &= \sqrt{8} \text{Cis}(75^\circ) \rightarrow z^{12} = (\sqrt{8})^{12} \text{Cis}(12 \times 75^\circ) = 8^6 \text{Cis}(900^\circ) \\ &\rightarrow z^{12} = 8^6 \text{Cis}(180^\circ) = 8^6 (\cos\pi + i\sin\pi) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Re}(z^{12}) = 2^{18} \cos\pi = -2^{18}$$

EJERCICIO 6. Si $|\bar{z}| = 8$ y $\text{Arg}[z(1+i)] = \pi/6$, hallar z en forma exponencial.

Solución. $|\bar{z}| = |z| \rightarrow |z| = 8 \rightarrow x^2 + y^2 = 64 \quad (1)$

$$\text{Arg}[z(1+i)] = \pi/6 \rightarrow \text{Arg}(x-y, x+y) = \pi/6 \rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \text{Tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \sqrt{3}(x+y) = x-y$$

de donde, elevando al cuadrado obtenemos: $2xy = -32 \quad (2)$

Sumando (1)+(2): $x^2 + 2xy + y^2 = 32 \rightarrow (x+y)^2 = 32 \rightarrow x+y = \pm 4\sqrt{2} \quad (3)$

$$\rightarrow \sqrt{3}(\pm 4\sqrt{2}) = x-y \rightarrow x-y = \pm 4\sqrt{6} \quad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos cuatro soluciones:

$$\begin{aligned} x &= 2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) & x &= -2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & x &= 2(\sqrt{2} - \sqrt{6}) & x &= 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ y &= 2(\sqrt{2} - \sqrt{6}) & y &= 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) & y &= 2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) & y &= -2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

- (1) $Tg\theta_1 = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = -2+\sqrt{3}$, $x>0$, $y<0 \rightarrow \theta_1$ en el IV cuadrante
 $\rightarrow \theta_1 = 360^\circ - 15^\circ = 315^\circ = \frac{23}{12}\pi \rightarrow z = 8e^{i23\pi/12}$
- (2) $Tg\theta_2 = \frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = -2+\sqrt{3}$, $x<0$, $y>0 \rightarrow \theta_2$ en el II cuadrante
 $\rightarrow \theta_2 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ = \frac{11}{12}\pi \rightarrow z = 8e^{i11\pi/12}$
- (3) $Tg\theta_3 = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2(\sqrt{2}-\sqrt{6})} = -2-\sqrt{3}$, $x<0$, $y>0 \rightarrow \theta_3$ en el II cuadrante
 $\rightarrow \theta_3 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ = \frac{7\pi}{12} \rightarrow z = 8e^{i7\pi/12}$
- (4) $Tg\theta_4 = \frac{-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = -2-\sqrt{3}$, $x>0$, $y<0 \rightarrow \theta_4$ en el IV cuadrante
 $\rightarrow \theta_4 = 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ = \frac{19}{12}\pi \rightarrow z = 8e^{i19\pi/12}$

EJERCICIO 7. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, demostrar que $\text{Cos}\psi = \frac{\text{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)}{|z_1||z_2|}$, donde ψ es el ángulo comprendido entre los radios vectores que representan a z_1 y z_2 .

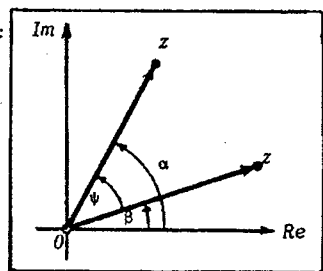
Demostración. En efecto, sean los complejos:

$$z_1 = r_1 e^{i\alpha} \quad \text{y} \quad z_2 = r_2 e^{i\beta}$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\alpha-\beta)} = r_1 r_2 \text{Cis}(\alpha-\beta)$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } \text{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) &= r_1 r_2 \text{Cos}(\alpha-\beta) \\ &= |z_1| |z_2| \text{Cos}\psi \end{aligned}$$

$$\text{de donde: } \text{Cos}\psi = \frac{\text{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)}{|z_1| |z_2|}$$



EJERCICIO 8. Demostrar que si $\omega^3=1$ y $\omega \neq 1$, entonces:

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + 19\omega^{18} = \frac{19}{\omega-1}$$

Demostración. En efecto, si $\omega^3=1 \rightarrow \omega^{18}=1$

$$(1) \rightarrow (\omega-1)(\omega^{18} + \omega^{17} + \dots + \omega + 1) = 0$$

$$(2) \text{ Como } \omega \neq 1 \rightarrow \omega-1 \neq 0 \rightarrow \omega^{18} + \omega^{17} + \dots + \omega + 1 = 0$$

$$(3) \text{ Entonces, sea: } S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + 19\omega^{18}$$

$$(4) \quad + \omega S = \omega + 2\omega^2 + \dots + 18\omega^{18} + 19\omega^{19}$$

$$(5) \text{ Restando: } S - \omega S = \underbrace{1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{18}}_0 - 19\omega^{19}$$

$$(6) \rightarrow S(1-\omega) = 0 - 19\omega^{19} \rightarrow S = \frac{19\omega^{19}}{\omega-1} = \frac{19(1)}{\omega-1} = \frac{19}{\omega-1}$$

EJERCICIO 9. Sea $z=x+yi$ tal que: $z^3=1$ y $z \neq 1$. Hallar:

$$\text{Re}(z + z^2 + z^3 + \dots + z^{37}).$$

Solución. Sea $S = z + z^2 + z^3 + \dots + z^{37} = z(1 + z + z^2 + \dots + z^{36})$

$$+ S = z\left(\frac{1-z^{37}}{1-z}\right) \quad \text{Pero } z^{36}=z^{37} \cdot z^{-1} \rightarrow z^{37} \cdot z^{-1}=1 \rightarrow z^{36}=1/z$$

$$+ S = z\left(\frac{1-1/z}{1-z}\right) = -\left(\frac{z+1}{z}\right) = -\left[\frac{(x+1)y}{x^2+y^2}, \frac{xy-y(x+1)}{x^2+y^2}\right]$$

$$+ S = \left(-\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \rightarrow \operatorname{Re}(S) = -\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}$$

EJERCICIO 10. Uno de los vértices de un octógono regular coincide con el afijo del complejo $z=2\cos 15^\circ - 2i\operatorname{Sen} 15^\circ$. Hallar los vértices restantes (o una fórmula que permita calcularlos).

Solución. $z=2[\cos(-15^\circ)+i\operatorname{Sen}(-15^\circ)]$

Un octógono regular es descrito por los afijos de la raíz octava de un determinado complejo. Ahora bien, sabemos que los argumentos de cada raíz están igualmente espaciadas un ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{360}{8} = 45^\circ$

Entonces, una fórmula que permite calcular los afijos de cada uno de los vértices del octógono es:

$$z = 2[\cos(-15+45k)+i\operatorname{Sen}(-15+45k)] \quad , \quad k=0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$\text{Para } k=0 \rightarrow w_0=2\operatorname{Cis}(-15^\circ) \quad , \quad k=4 \rightarrow w_4=2\operatorname{Cis}(165^\circ)$$

$$k=1 \rightarrow w_1=2\operatorname{Cis}(30^\circ) \quad , \quad k=5 \rightarrow w_5=2\operatorname{Cis}(210^\circ)$$

$$k=2 \rightarrow w_2=2\operatorname{Cis}(75^\circ) \quad , \quad k=6 \rightarrow w_6=2\operatorname{Cis}(255^\circ)$$

$$k=3 \rightarrow w_3=2\operatorname{Cis}(120^\circ) \quad , \quad k=7 \rightarrow w_7=2\operatorname{Cis}(300^\circ)$$

EJERCICIO 11. Determinar el total de números enteros positivos n de tres cifras que verifican la igualdad: $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Solución. Si $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow z = e^{i\pi/3}$ (Verificar)

$$+ (e^{i\pi/3})^n = e^{i\pi/3} \leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (\text{Igualdad de complejos})$$

de donde: $n=6k+1$, pero: $100 < n \leq 999 \rightarrow 100 < 6k+1 \leq 999$

$$+ 16.5 < k \leq 166.3 \rightarrow 17 \leq k \leq 166$$

Dado que, por cada k existe un $n \rightarrow n = (166-17)+1 = 150$

EJERCICIO 12. Demostrar que para $\theta \in [0, 2\pi]$ y n número natural:

$$\left(\frac{1+\operatorname{Sen}\theta+i\operatorname{Cos}\theta}{1+\operatorname{Sen}\theta-i\operatorname{Cos}\theta}\right)^n = \operatorname{Cos}\left[n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] + i\operatorname{Sen}\left[n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

Demostración. En efecto, sean: $z=1+\text{Sen}\theta+i\text{Cos}\theta$ y $w=1+\text{Sen}\theta-i\text{Cos}\theta$

$$+ z = \text{Sen}\frac{\pi}{2} + \text{Sen}\theta + i\text{Sen}(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\text{Cos}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + 2i\text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\text{Cos}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})$$

Pero, por ser complementarios: $\text{Cos}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) = \text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$

$$\begin{aligned} + z &= 2\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\text{Cos}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + 2i\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \\ &= 2\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\left[\text{Cos}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) + i\text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\right] = 2\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\left[e^{i(\pi/4 - \theta/2)}\right] \end{aligned}$$

Por un razonamiento similar se demuestra que:

$$w = 2\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\left[\text{Cos}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) - i\text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\right] = 2\text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})\left[e^{-i(\pi/4 - \theta/2)}\right]$$

$$\text{Entonces: } \left(\frac{z}{w}\right)^n = e^{in(\pi/2 - \theta)} = \text{Cosn}(\frac{\pi}{2} - \theta) + i\text{Senn}(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

EJERCICIO 13. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, demostrar que si $z + \frac{1}{z} = 2\text{Cos}\theta$, entonces:

$$\text{a) } z^m + \frac{1}{z^m} = 2\text{Cos}m\theta, \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{b) } z^m - \frac{1}{z^m} = 2i\text{Sen}m\theta, \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Demostración. En efecto, sea $z=r(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)$ $\rightarrow z^{-1}=\frac{1}{r}(\text{Cos}\theta-i\text{Sen}\theta)$

$$\text{Entonces: } z + \frac{1}{z} = (r + \frac{1}{r})\text{Cos}\theta + i(r - \frac{1}{r})\text{Sen}\theta$$

$$\text{Dado que: } z + \frac{1}{z} \text{ es real} \rightarrow \text{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0$$

$$\text{Esto es: } (r - \frac{1}{r})\text{Sen}\theta = 0 \leftrightarrow (r - \frac{1}{r} = 0) \vee (\text{Sen}\theta = 0)$$

$$\leftrightarrow r = 1 \vee \theta = 2k\pi$$

$$\text{Para } r=1 \rightarrow z=\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta \text{ y } z^{-1}=\text{Cos}\theta-i\text{Sen}\theta$$

$$+ z^m = \text{Cos}m\theta + i\text{Sen}m\theta \text{ y } z^{-m} = \text{Cos}m\theta - i\text{Sen}m\theta$$

Por tanto, sumando y luego restando los extremos de ambas ecuaciones obtengamos:

$$\text{mos: a) } z^m + \frac{1}{z^m} = 2\text{Cos}m\theta \quad \text{b) } z^m - \frac{1}{z^m} = 2i\text{Sen}m\theta$$

EJERCICIO 14. Si $\text{Sen}a+\text{Sen}b+\text{Sen}c=0$ y $\text{Cos}a+\text{Cos}b+\text{Cos}c=0$, demostrar que:

$$\text{Sen}3a+\text{Sen}3b+\text{Sen}3c = 3\text{Sen}(a+b+c)$$

Demostración. En efecto, sean: $A=\text{Cos}a+i\text{Sen}a$, $B=\text{Cos}b+i\text{Sen}b$, $C=\text{Cos}c+i\text{Sen}c$

$$+ A+B+C = (\text{Cos}a+\text{Cos}b+\text{Cos}c) + i(\text{Sen}a+\text{Sen}b+\text{Sen}c)$$

$$\text{Luego, si } A+B+C=0 \rightarrow [(A+B)+C]^3=0 \rightarrow (A+B)^3+3(A+B)^2C+3(A+B)C^2+C^3=0$$

$$+ (A+B)^3+C^3+3C(A+B)(A+B+C) = 0 \rightarrow (A+B)^3+C^3+3C(A+B)(0) = 0$$

$$\rightarrow (A+B)^3 + C^3 = 0 \rightarrow A^3 + B^3 + C^3 + 3AB(A+B) = 0 \quad (\text{Pero } A+B=-C)$$

$$\rightarrow A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$

$$\rightarrow (\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c) + i(\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c) = 3[\cos(a+b+c) + i\sin(a+b+c)]$$

Por igualdad de complejos, tomando la parte imaginaria obtenemos:

$$\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c = 3\sin(a+b+c)$$

EJERCICIO 15. Sabiendo que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k!}\right)^k$, demostrar que:

$$r \operatorname{Sen} \alpha + \frac{r^2 \operatorname{Sen} 2\alpha}{2!} + \frac{r^3 \operatorname{Sen} 3\alpha}{3!} = e^{r \operatorname{Cis} \alpha} \operatorname{Sen}(r \operatorname{Sen} \alpha)$$

Demostración. En efecto, sea: $z = re^{i\alpha} = r \operatorname{Cis} \alpha$

Desarrollando los tres primeros términos de la sumatoria se

$$\text{tiene: } e^{r(\operatorname{Cis} \alpha + i \operatorname{Sen} \alpha)} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$+ e^{r \operatorname{Cis} \alpha} \cdot e^{ir \operatorname{Sen} \alpha} = 1 + \frac{r \operatorname{Cis} \alpha}{1!} + \frac{r^2 \operatorname{Cis} 2\alpha}{2!} + \frac{r^3 \operatorname{Cis} 3\alpha}{3!}$$

$$+ e^{r \operatorname{Cis} \alpha} [\cos(r \operatorname{Sen} \alpha) + i \sin(r \operatorname{Sen} \alpha)] = 1 + \frac{r \operatorname{Cis} \alpha}{1!} + \frac{r^2 \operatorname{Cis} 2\alpha}{2!} + \frac{r^3 \operatorname{Cis} 3\alpha}{3!}$$

Por igualdad de complejos, tomando las partes imaginarias obtenemos:

$$e^{r \operatorname{Cis} \alpha} \operatorname{Sen}(r \operatorname{Sen} \alpha) = r \operatorname{Sen} \alpha + \frac{r^2 \operatorname{Sen} 2\alpha}{2!} + \frac{r^3 \operatorname{Sen} 3\alpha}{3!}$$

EJERCICIO 16. Demostrar que: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \operatorname{Sen} x$

Demostración. En efecto, si en el ejercicio anterior sustituimos $r=x$ y

$\alpha = \pi/2$, tendremos:

$$e^{x \operatorname{Cis} \pi/2} \operatorname{Sen}(x \operatorname{Sen} \frac{\pi}{2}) = x \operatorname{Sen}(\frac{\pi}{2}) + \frac{x^2 \operatorname{Sen}(\pi)}{2!} + \frac{x^3 \operatorname{Sen}(3\pi/2)}{3!} + \frac{x^4 \operatorname{Sen}(2\pi)}{4!} +$$

$$+ \frac{x^5 \operatorname{Sen}(5\pi/2)}{5!} + \frac{x^6 \operatorname{Sen}(3\pi)}{6!} + \frac{x^7 \operatorname{Sen}(7\pi/2)}{7!} + \dots$$

$$+ e^0 \operatorname{Sen} x = x(1) + \frac{x^2(0)}{2!} + \frac{x^3(-1)}{3!} + \frac{x^4(0)}{4!} + \frac{x^5(-1)}{5!} + \frac{x^6(0)}{6!} + \frac{x^7(-1)}{7!} + \dots$$

$$\therefore \operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

EJERCICIO 17. Para $z = \operatorname{Cis}(\pi/4)$, hallar:

a) El módulo y el argumento de $(1+iz)^6$.

b) $\operatorname{Im}(1+iz)^6$ en sumas, usando el Teorema del binomio de Newton.

Solución. a) Sea $\theta = \pi/4 \rightarrow iz = i(\cos \theta + i \operatorname{Sen} \theta) = -\operatorname{Sen} \theta + i \operatorname{Cos} \theta$

$$\rightarrow 1+iz = (1-\operatorname{Sen} \theta) + i \operatorname{Cos} \theta = (\operatorname{Sen} \pi/2 - \operatorname{Sen} \theta) + i \operatorname{Sen}(\pi/2 - \theta)$$

$$+ 1 + iz = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

Por ser complementarios: $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

$$+ 1 + iz = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Para $\theta = \pi/4 \rightarrow 1 + iz = 2\sin(\pi/8)[\cos(3\pi/8) + i\sin(3\pi/8)]$

$$+ (1 + iz)^* = 2^* \sin^*(\pi/8) [\cos(9\pi/4)]$$

$$\rightarrow \text{Mod}(1 + iz)^* = 2^* (\sqrt{2-\sqrt{2}})^* = (2-\sqrt{2})^* = 20-14\sqrt{2} ; \text{Arg}(1 + iz)^* = 9\pi/4 = 225^\circ$$

$$\begin{aligned} b) (1 + iz)^* &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (1)^k (iz)^{6-k} = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (e^{i\pi/2} \cdot e^{i\theta})^{6-k} \\ &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (e^{i(\pi/2 + \theta)})^{6-k} = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot e^{i(\pi/2 + \theta)(6-k)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Im}(1 + iz)^* = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)(6-k) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cos(6-k)\theta$$

EJERCICIO 18. Simplificar: $2 + (3)(2)\cos\theta + (4)(3)\cos 2\theta + \dots + (20)(19)\cos 18\theta$

sabiendo que: $e^{i19\theta} = 1$ y $e^{i\theta} \neq 1$

Solución. Sean: $A = 2 + (3)(2)\cos\theta + (4)(3)\cos 2\theta + \dots + (20)(19)\cos 18\theta$

$$B = (3)(2)\sin\theta + (4)(3)\sin 2\theta + \dots + (20)(19)\sin 18\theta$$

Tomando el complejo unitario: $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$, obtenemos el complejo:

$$A + Bi = 2 + (3)(2)\omega + (4)(3)\omega^2 + \dots + (20)(19)\omega^{18}$$

Entonces, si $Z = A + Bi$, debemos simplificar $A = \text{Re}(Z)$

Luego, si: $Z = 2 + (3)(2)\omega + (4)(3)\omega^2 + \dots + (20)(19)\omega^{18}$

$$+ \omega Z = \frac{2\omega + (3)(2)\omega^2 + \dots + (19)(18)\omega^{18} + (20)(19)\omega^{19}}{1}$$

$$+ (1 - \omega)Z = 2 + 2(2)\omega + 3(2)\omega^2 + \dots + 19(2)\omega^{18} - (20)(19)\omega^{19}$$

$$= 2[1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + 19\omega^{18}] - (20)(19)\omega^{19}$$

La expresión entre corchetes es $= \frac{19}{\omega - 1}$ (Ver ejercicio 8) y $\omega^{19} = e^{i19\theta} = 1$

$$\rightarrow (1 - \omega)Z = 2\left(\frac{19}{\omega - 1}\right) - (20)(19) = -38\left(\frac{10\omega - 11}{\omega - 1}\right) \rightarrow Z = \frac{380}{\omega - 1} - \frac{38}{(\omega - 1)^2} \quad (1)$$

$$\omega - 1 = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2e^{i\pi/2}\sin\frac{\theta}{2}(e^{i\pi/2}) = 2(\sin\frac{\theta}{2})e^{i(\pi/2 + \theta/2)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\omega - 1} = \frac{e^{-i(\pi/2 + \theta/2)}}{2\sin\theta/2} \quad \text{Luego en (1): } Z = \frac{380e^{-i(\pi/2 + \theta/2)}}{2\sin\theta/2} - \frac{38e^{i(\pi + \theta)}}{4\sin^2\theta/2}$$

$$\text{Entonces: } A = \operatorname{Re}(Z) = \frac{380 \cos(\pi/2 + \theta/2)}{2 \operatorname{Sen} \theta/2} - \frac{38 \cos(\pi + \theta)}{4 \operatorname{Sen}^2 \theta/2} = -\frac{380 \operatorname{Sen} \theta/2}{2 \operatorname{Sen} \theta/2} + \frac{38 \cos \theta}{2(1 - \cos \theta)}$$

$$\therefore A = 19 \left(\frac{11 \cos \theta - 1}{1 - \cos \theta} \right)$$

EJERCICIO 19. Hallar las raíces n -ésimas ($n < 18$) de $z \in \mathbb{C}$, sabiendo que:

$w_k = (-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ es una de ellas y se conoce además que:

$$[(1-i) \cos \frac{11}{12}\pi - (1+i) \cos \frac{17}{12}\pi]^n = 2^{n/2} \cdot i^{2-n}$$

Solución. $\frac{17}{12}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{11}{12}\pi \rightarrow \cos \frac{17}{12}\pi = -\operatorname{Sen} \frac{11}{12}\pi$

$$\rightarrow [(1-i) \cos \frac{11}{12}\pi + (1+i) \operatorname{Sen} \frac{11}{12}\pi]^n = 2^{n/2} (e^{i\pi/2})^{2-n}$$

$$\rightarrow [(1-i) \cos \frac{11}{12}\pi + i(1-i) \operatorname{Sen} \frac{11}{12}\pi]^n = 2^{n/2} (e^{i\pi/2})^{2-n}$$

$$\rightarrow [(1-i) (\cos \frac{11}{12}\pi + i \operatorname{Sen} \frac{11}{12}\pi)]^n = 2^{n/2} (e^{i\pi/2})^{2-n}$$

Pero: $1-i = \sqrt{2} \operatorname{Cis}(7\pi/4) = \sqrt{2} e^{i7\pi/4}$

$$\rightarrow [\sqrt{2} e^{i7\pi/4} \cdot e^{i11\pi/12}]^n = 2^{n/2} (e^{i\pi/2})^{2-n} \rightarrow 2^{n/2} \cdot e^{i2n\pi/3} = 2^{n/2} (e^{i\pi/2})^{2-n}$$

de donde: $\frac{2n\pi}{3} = \frac{\pi}{2}(2-n) + 2k\pi, k=0,1,2,\dots,n-1$ (Igualdad de complejos)

$$\rightarrow n = \frac{6}{7}(2k+1), k=0,1,2, \dots, n-1$$

Hallaremos n dando valores a k , tales que $n \in \mathbb{Z}^+$, esto es:

Para $k=3 \rightarrow n=8$ (cumple con la condición: $6 < 18$)

$k=10 \rightarrow n=18$ (no cumple con la condición: $18 \nless 18$)

Por lo tanto, se deben hallar las raíces sextas de z .

Dado que: $w_k = (-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3e^{i7\pi/6}$ es una raíz sexta, es decir,

$$\sqrt[6]{z} = w_k \rightarrow z = (\sqrt[6]{z})^6 = 27e^{i7\pi} = 27e^{i\pi}$$

Por consiguiente, las raíces sextas de z están dadas por la fórmula:

$$w = \sqrt[6]{3} \operatorname{Cis}(\frac{\pi+2k\pi}{6}), k=0,1,2,3,4,5$$

EJERCICIO 20. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, convertir a producto la suma:

$$\binom{n}{0} \cos n\theta + \binom{n}{1} \cos(n-1)\theta + \binom{n}{2} \cos(n-2)\theta + \dots + \binom{n}{n}$$

Solución. Sean: $A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(n-k)\theta$ y $B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Sen}(n-k)\theta$

Tomando el complejo unitario: $z = \cos \theta + i \operatorname{Sen} \theta \rightarrow z^{n-k} = \cos(n-k)\theta + i \operatorname{Sen}(n-k)\theta$

$$\text{Pero: } A+iB = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\cos(n-k)\theta + i\sin(n-k)\theta] \quad + \quad A+iB = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \quad (1)$$

$$\text{Por el binomio de Newton: } (z+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (1)^k \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que: $A + iB = (z+1)^n$

$$\text{Ahora: } z+1 = (1+\cos\theta) + i\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$$

$$\text{Luego: } (z+1)^n = A+iB = 2^n \cos^n(\frac{\theta}{2}) [\cos(\frac{n\theta}{2}) + i\sin(\frac{n\theta}{2})]$$

$$\therefore A = \operatorname{Re}(z+1)^n = 2^n \cos^n(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{n\theta}{2})$$

EJERCICIO 21. Convertir a producto la suma:

$$\cos x + \binom{n}{1} \cos 2x + \binom{n}{2} \cos 3x + \dots + \binom{n}{n} \cos(n+1)x$$

$$\text{Solución. Sean: } A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k+1)x \quad \text{y} \quad B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k+1)x$$

$$\text{Tomando el complejo unitario } z = \cos x + i \sin x \quad + \quad z^{k+1} = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

$$\text{Luego: } A+iB = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\cos(k+1)x + i \sin(k+1)x] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z^{k+1}$$

$$+ \quad A+iB = z \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (z)^k = z(1+z)^n \quad (\text{Binomio de Newton})$$

$$\text{Del ejercicio anterior: } (1+z)^n = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) [\cos(\frac{nx}{2}) + i \sin(\frac{nx}{2})]$$

$$+ \quad (1+z)^n = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) (e^{inx/2})$$

$$\text{Entonces: } z(1+z)^n = e^{ix} \cdot 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) (e^{inx/2}) = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \cdot e^{i(n+2)x/2}$$

$$\therefore A = \operatorname{Re}[z(1+z)^n] = 2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \cos(n+2)\frac{x}{2}$$

EJERCICIO 22. Expresar en sumas y productos: $(z + \bar{z})^n$

$$\text{Solución. a) En productos: Si } z = x+yi \quad + \quad x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad (\text{CC.1})$$

$$+ \quad (z + \bar{z})^n = (2x)^n = (2r \cos\theta)^n = 2^n r^n \cos^n\theta$$

$$\text{b) En sumas: } z = r \operatorname{Cis}\theta = re^{i\theta}$$

$$(z + \bar{z})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z)^k (\bar{z})^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (re^{i\theta})^k (re^{-i\theta})^{n-k}$$

$$+ \quad (z + \bar{z})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^n \cdot e^{2ki\theta - in\theta} = r^n e^{-in\theta} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i2\theta})^k = r^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i2\theta})^k$$

EJERCICIO 23. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, convertir a productos:

$$\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x + \dots + \cos^2 (2n-1)x - \frac{n}{2}$$

Solución. Basándonos en la identidad: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, la suma dada se puede escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos^2(2k-1)x - \frac{n}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [1 + \cos(2k-1)2x] - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)2x - \frac{n}{2} \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^n \cos^2(2k-1)x - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)2x \end{aligned} \quad (1)$$

Consideremos el complejo unitario $z = \cos 2x + i \sin 2x = e^{i2x}$

y sean: $A = \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)2x \quad y \quad B = \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)2x$

$$\begin{aligned} \rightarrow A+iB &= \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)2x + i \sin(2k-1)2x = \sum_{k=1}^n z^{2k-1} = z \sum_{k=1}^n z^{2(k-1)} \\ &= z \left(\frac{1 - z^{2n}}{1 - z^2} \right) = z \left[\frac{1 - \cos 2n(2x) - i \sin 2n(2x)}{1 - \cos 2(2x) - i \sin 2(2x)} \right] \\ &= z \left[\frac{2 \sin^2(2nx) - 2i \sin(2nx) \cos(2nx)}{2 \sin^2 2x - 2i \sin 2x \cos 2x} \right] = z \left[\frac{-2i \sin 2nx (\cos 2nx + i \sin 2nx)}{-2i \sin 2x (\cos 2x + i \sin 2x)} \right] \end{aligned}$$

de donde: $A+iB = \left(\frac{\sin 2nx}{\sin 2x} \right) i \cos 2nx \rightarrow A = \operatorname{Re}(A+iB) = \left(\frac{\sin 2nx}{\sin 2x} \right) \cos 2nx = \frac{\sin 4nx}{2 \sin 2x}$

Luego, en (1): $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)2x = \frac{\sin 4nx}{2 \sin 2x}$

EJERCICIO 24. Convertir a productos:

$$1 - \binom{n}{1} \cos 2x + \binom{n}{2} \cos 4x - \binom{n}{3} \cos 6x + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cos 2nx$$

Solución. Sea $z = \cos 2x + i \sin 2x \rightarrow z^k = \cos 2kx + i \sin 2kx$

y sean: $A = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cos 2kx$ (suma dada), $B = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sin 2kx$

$$\begin{aligned} \text{de modo que } A+iB &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\cos 2kx + i \sin 2kx) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (z)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-z)^k (1)^{n-k} = (-z + 1)^n \quad (\text{Binomio de Newton}) \end{aligned}$$

Pero: $1 - z = 1 - \cos 2x - i \sin 2x = 2 \sin^2 x - 2i \sin x \cos x = 2i \sin x (\cos x + i \sin x)$
 $= 2(e^{-ix/2}) \sin x (e^{ix}) = \sin x \cdot e^{i(x-\pi/2)}$

$\rightarrow (1-z)^n = 2^n \sin^n x \cdot e^{in(x-\pi/2)} \rightarrow A = \operatorname{Re}(1-z)^n = 2^n \sin^n x \cdot \cos n(x-\pi/2)$

EJERCICIO 25. Hallar $\text{Im}[(1-iz)^n]$, $n \in \mathbb{Z}^+$, expresando en sumas y productos.

Solución. a) Expresando en sumas con: $z = \cos x + i \sin x = e^{ix}$

$$\begin{aligned}(1-iz)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^k (-iz)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-iz)^{n-k} \\+ (1-iz)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-i\pi/2} \cdot e^{ix})^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(x-\pi/2)(n-k)} \\ \therefore \text{Im}[(1-iz)^n] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Sen}[(x - \frac{\pi}{2})(n-k)]\end{aligned}$$

b) Expresando en productos con $z = \cos x + i \sin x \rightarrow iz = -\sin x + i \cos x$

$$\begin{aligned}1-iz &= 1 + \sin x - i \cos x = \text{Sen} \frac{\pi}{2} + \sin x - i \text{Sen}(\frac{\pi}{2} - x) \\&= 2 \text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) - 2i \text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\end{aligned}$$

Pero: $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$, por ser complementarios.

$$\begin{aligned}1-iz &= 2 \text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) [\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) - i \text{Sen}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})] \\&= 2 \text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) [\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + i \text{Sen}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})] = 2 \text{Sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \cdot e^{i(x/2 - \pi/4)} \\ \therefore \text{Im}[(1-iz)^n] &= 2^n \text{Sen}^n(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \cdot \text{Sen}n(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

EJERCICIO 26. Demostrar que si $(n+1)x = \pi$, con n entero mayor que uno, entonces: $\text{Sen}^2 x + \text{Sen}^2 2x + \text{Sen}^2 3x + \dots + \text{Sen}^2 nx = \frac{n+1}{2}$

Demostración. En efecto, según la identidad: $\text{Sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \text{Sen}^2 kx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(1 - \cos 2kx) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos 2kx = \frac{n}{2} - \frac{A}{2} \quad (1)$$

Sea el complejo unitario $z = \cos 2x + i \sin 2x = e^{i2x}$

$$\text{Luego, si } A = \sum_{k=1}^n \cos 2kx \rightarrow B = \sum_{k=1}^n \sin 2kx$$

$$\begin{aligned}A + iB &= \sum_{k=1}^n (\cos 2kx + i \sin 2kx) = \sum_{k=1}^n z^k = z \sum_{k=1}^n z^{k-1} = z \left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right) \\&= z \left[\frac{1 - \cos 2(n+1)x - i \sin 2(n+1)x}{1 - \cos 2x - i \sin 2x} \right] = z \left[\frac{2 \text{Sen}^2 nx - 2i \text{Sen} nx \cos nx}{2 \text{Sen}^2 x - 2i \text{Sen} x \cos x} \right] \\&= z \left[\frac{-2i \text{Sen} nx (\cos nx + i \text{Sen} nx)}{-2i \text{Sen} x (\cos x + i \text{Sen} x)} \right] = e^{2ix} \left[\frac{\text{Sen} nx (e^{nix})}{\text{Sen} x (e^{ix})} \right]\end{aligned}$$

$$A + iB = \frac{\text{Sen} nx}{\text{Sen} x} [e^{i(n+1)x}] \rightarrow A = \text{Re}(A + iB) = \frac{\text{Sen} nx}{\text{Sen} x} \cos(n+1)x \quad (2)$$

Dado que: $(n+1)x = \pi \rightarrow nx = \pi - x \rightarrow \text{Sen} nx = \text{Sen}(\pi - x) = \text{Sen} x$

Luego, en (2): $A = \frac{\text{Sen}x}{\text{Sen}x} \text{Cos}x = -1$. Por tanto, en (1): $\sum_{k=1}^n \text{Sen}^2 kx = \frac{n+1}{2}$

EJERCICIO 27. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, convertir a producto:

$$\binom{n}{0} \text{Cos} nx + \binom{n}{1} \text{Cos}(n-1)x + \binom{n}{2} \text{Cos}(n-2)x + \dots + \binom{n}{n}$$

Solución. Sea el complejo unitario: $z = \text{Cos}x + i \text{Sen}x$, y sea A la suma dada:

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Cos}(n-k)x \quad + \quad B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Sen}(n-k)x$$

$$\text{Luego: } A + iB = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\text{Cos}(n-k)x + i \text{Sen}(n-k)x] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [z^{n-k}]$$

$$+ A + iB = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^k z^{n-k} = (1+z)^n \quad (\text{Teorema del Binomio})$$

$$= (1 + \text{Cos}x + i \text{Sen}x)^n = (2 \text{Cos}^2 x/2 + 2i \text{Sen}x/2 \text{Cos}x/2)^n$$

$$= 2^n \text{Cos}^n x/2 (\text{Cos} \frac{x}{2} + i \text{Sen} \frac{x}{2})^n = 2^n \text{Cos}^n (\frac{x}{2}) [\text{Cos}(\frac{nx}{2}) + i \text{Sen}(\frac{nx}{2})]$$

$$\therefore A = \text{Re}(A+iB) = 2^n \text{Cos}^n (\frac{x}{2}) \text{Cos}(\frac{nx}{2})$$

EJERCICIO 28. Calcular: $\text{Cos}(\frac{2\pi}{n}) + 2\text{Cos}(\frac{4\pi}{n}) + \dots + (n-1)\text{Cos}(\frac{(n-1)\pi}{n})$

Solución. Sea el complejo unitario: $z = \text{Cos}x + i \text{Sen}x$, donde: $x = 2\pi/n$

Formemos el complejo $A+iB$ en función del complejo z , de modo tal

$$\text{que si: } A = \text{Cos}x + 2\text{Cos}2x + 3\text{Cos}3x + \dots + (n-1)\text{Cos}(n-1)x$$

$$B = \text{Sen}x + 2\text{Sen}2x + 3\text{Sen}3x + \dots + (n-1)\text{Sen}(n-1)x$$

$$+ A + iB = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + (n-1)z^{n-1}$$

$$+ z(A+iB) = z^2 + 2z^3 + \dots + (n-2)z^{n-1} + (n-1)z^n$$

Restando ambos extremos de las dos igualdades obtenemos:

$$(1-z)(A+iB) = z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} - (n-1)z^n$$

$$= z(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-2}) - (n-1)z^n = z(\frac{1-z^{n-1}}{1-z}) - (n-1)z^n$$

$$+ A + iB = \frac{z-z^n}{(1-z)^2} - \frac{(n-1)z^n}{1-z} \quad (1)$$

$$\text{Pero: } z^n = 1 \text{ para } x = 2\pi/n \text{ (Verificar)}. \text{ Luego, en (1): } A+iB = \frac{n}{z-1} \quad (2)$$

$$z-1 = \text{Cos}x - 1 + i \text{Sen}x = -2\text{Sen}^2 x/2 + 2i \text{Sen}x/2 \text{Cos}x/2 = 2i \text{Sen} \frac{x}{2} [\text{Cos} \frac{x}{2} + i \text{Sen} \frac{x}{2}]$$

$$= 2(e^{i\pi/2}) \text{Sen} \frac{x}{2} [e^{ix/2}] = 2 \text{Sen} \frac{x}{2} (e^{i(\pi/2+x/2)})$$

Luego, en (2): $A+iB = \left(\frac{n}{2\text{Sen}x/2}\right)e^{-i(\pi/2 + x/2)}$ —

$$\therefore A = \text{Re}(A+iB) = \left(\frac{n}{2\text{Sen}x/2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\frac{n}{2\text{Sen}x/2}\right)(-\text{Sen}x/2) = -\frac{n}{2}$$

EJERCICIO 29. Hallar las sumas: a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$

$$b) \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$$

Solución. Sea el complejo: $z = 1+i = \sqrt{2}\text{Cis}(\pi/4)$

$$\text{Por el Teorema del Binomio: } (1+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (i)^k$$

$$\begin{aligned} + (1+i)^n &= \binom{n}{0}i + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i + \binom{n}{3}i + \binom{n}{4}i + \binom{n}{5}i + \binom{n}{6}i + \binom{n}{7}i + \dots \\ &= \binom{n}{0} + i\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + i\binom{n}{5} - \binom{n}{6} - i\binom{n}{7} + \dots\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Re}(1+i)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots \quad ; \quad \text{Im}(1+i)^n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$$

$$\text{Pero: } \text{Re}(1+i) = \sqrt{2}\cos(\pi/4) \quad + \quad \text{Re}(1+i)^n = 2^{n/2}\cos(n\pi/4)$$

$$\text{Im}(1+i) = \sqrt{2}\sin(\pi/4) \quad + \quad \text{Im}(1+i)^n = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$$

$$\text{Por lo tanto: a) } 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^{n/2}\cos(n\pi/4)$$

$$b) \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = 2^{n/2}\sin(n\pi/4)$$

EJERCICIO 30. Demostrar que: $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{2}[2^{n-1} + 2^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{4})]$

Demostración. En efecto, por el Teorema del Binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\text{Si } a=b=1 \quad + \quad 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots$$

$$\text{Si } a=1 \text{ y } b=-1 \quad + \quad 0 = (-1)^k \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \dots$$

Sumando ambos lados de estas dos igualdades se tiene:

$$2^n = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots\right] \quad + \quad 2^{n-1} = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots$$

$$\text{Del ejercicio anterior: } \text{Re}(1+i)^n = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$$

$$\text{Entonces: } 2^{n-1} + \text{Re}(1+i)^n = 2\left[1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots\right]$$

$$\text{de donde: } 1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = \frac{1}{2}[2^{n-1} + 2^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{4})]$$

EJERCICIO 31. Hallar la suma:

$$\cos a - \cos(a+x) + \cos(a+2x) - \dots + (-1)^{n-1} \cos[a+(n-1)x]$$

Solución. Sea el complejo unitario: $z = \text{Cis } \theta = e^{i\theta}$. Si A es la suma dada,

$$\text{entonces: } A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cos[a+(k-1)x] \text{ y } B = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin[a+(k-1)x]$$

$$\begin{aligned} A + iB &= \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{i[a+(k-1)x]} = \sum_{k=0}^n e^{i\pi(k-1)} \cdot e^{i[a+(k-1)x]} \\ &= e^{i(a-\pi-x)} \cdot \sum_{k=1}^n [e^{i(\pi+x)}]^k = e^{i(a-\pi-x)} \cdot e^{i(\pi+x)} \sum_{k=1}^n [e^{i(\pi+x)}]^{k-1} \\ &= e^{ia} \left[\frac{1 - e^{i(\pi+x)n}}{1 - e^{i(\pi+x)}} \right] = e^{ia} \left[\frac{1 - \cos n(\pi+x) - i \sin n(\pi+x)}{1 - \cos(\pi+x) - i \sin(\pi+x)} \right] \end{aligned}$$

Procediendo como en ejercicios anteriores, obtenemos:

$$A + iB = e^{ia} \left[\frac{\sin n(\pi+x)/2 \cdot e^{in(\pi+x)/2}}{\sin(\pi/2 + x/2) \cdot e^{i(\pi+x)/2}} \right] = \frac{\sin \frac{n}{2}(\pi+x)}{\cos x/2} e^{[a+(n-1)(\pi+x)/2]}$$

$$A = \text{Re}(A + iB) = \frac{\sin(\frac{n}{2}\pi + \frac{nx}{2})}{\cos x/2} \cos[a + (\frac{n-1}{2})(\pi+x)]$$

Para n par: $\sin(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx}{2}) = \pm \sin(nx/2)$

$$\cos[(n-1)\frac{\pi}{2} + a + (\frac{n-1}{2})x] = \pm \sin[a + (\frac{n-1}{2})x]$$

Para n impar: $\sin(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx}{2}) = \pm \cos(nx/2)$

$$\cos[(n-1)\frac{\pi}{2} + a + (\frac{n-1}{2})x] = \pm \cos[a + (\frac{n-1}{2})x]$$

$$\therefore A = \frac{\sin(nx/2)}{\cos(x/2)} \sin[a + (\frac{n-1}{2})x], \text{ para } n \text{ par}$$

$$A = \frac{\cos(nx/2)}{\cos(x/2)} \cos[a + (\frac{n-1}{2})x], \text{ para } n \text{ impar}$$

EJERCICIOS: Grupo 62

1. Escribir en forma exponencial: $z = \frac{(11\sqrt{3}-11i)(9+9i)}{(-1+\sqrt{3}i)(4-4i)}$

2. Calcular y expresar el resultado en la forma $a+bi$ de: $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{-40}$

3. Expresar $\cos^2 x$ en términos de $\cos 4x$ y $\cos 2x$.

4. Expresar $\frac{\text{Sen}5x}{\text{Sen}x}$ en términos sólo de potencias de $\text{Cos}x$.
5. Resolver las ecuaciones:
 - a) $z^3 - \frac{\sqrt{3} - i}{i\sqrt{3} - 1} = 0$
 - b) $(z+1-i)^3 = 1$
 - c) $\frac{(-4\sqrt{3}-4) + i(4\sqrt{3}-4)}{z^3} = -1-i$
 - d) $(iz-1)^2 - z^2 = 0$
6. Si $z = re^{i\theta}$, demostrar que la parte real de $\sqrt[n]{z} + \sqrt[n]{\bar{z}}$ es $2 \cdot \sqrt[n]{r} \cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})$, $k=0,1,2,\dots,n-1$. Además, hallar la parte real de $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$.
7. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos: $x_n + iy_n = (1+i\sqrt{3})^n$ con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Demostrar que $x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1} = 2^{2(n-1)}\sqrt{3}$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{1\}$.
8. Demostrar que cualquiera que sea el complejo unitario z , entonces: $|z - z^2| = 2|\text{Sen}(\frac{\text{Arg}z}{2})|$.
9. Demostrar que: $\frac{e^{i\theta}(1 - e^{i\alpha})}{e^{i\theta}(1 - e^{i\alpha})} = e^{-i\theta}(1 - e^{-i\alpha})$.
10. Si ψ es el ángulo comprendido entre dos vectores que representan a los complejos z y w , demostrar que: $z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 2|z \cdot w| \cos \psi$.
11. Si $z=3+4i$ y $w=2+6i$, hallar el coseno del ángulo comprendido entre $(z-w)$ y z .
12. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que: $(1 + \text{Cosa} + i \text{Sena})^n = 2^n \text{Cos}^n(\frac{a}{2}) [\text{Cos}(\frac{na}{2}) + i \text{Sen}(\frac{na}{2})]$.
13. Analizar la verdad o falsedad de:
 - a) Si $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow \omega^{3n} + \omega^{3n+1} + \omega^{3n+2} = 0$
 - b) Si $\omega \neq -1$, $\omega^3 = -1$ $\rightarrow \omega^3 - \omega^2 + \omega - 1 = 0$
14. Si $z = 1 + i\sqrt{3}$, hallar: $\text{Re}(z^{2^3})$.
15. Si $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 - 2\sqrt{3}i| \leq \sqrt{2}\}$; hallar $z_1 \in A$ de módulo máximo, $z_2 \in A$ de argumento máximo.
16. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/5 \leq |z| \leq 1, \pi/8 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi/3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z \in A\}$. Graficar: $D = \{iz \in \mathbb{C} \mid z \in B\}$, y determinar la forma polar de $z \in D$ de módulo máximo y argumento mínimo.
17. Hallar $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$, tal que: $(z+i)^n = iz^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

18. Simplificar: $(1+i\tan x)^n + (1-i\tan x)^n$

19. Demostrar que todas las raíces de la ecuación $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i}{1-i}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ son reales y distintas.

20. Si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, calcular: $z^9 + \frac{1}{z^9}$

21. En base a las expresiones de $(1+i)^n$

a) Demostrar que:

$$\binom{n}{0} + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + i\binom{n}{n} = 2^{n/2}[\cos(\frac{n\pi}{4}) + i\sin(\frac{n\pi}{4})]$$

b) Usando lo anterior, calcular: $\binom{10}{1} - \binom{10}{3} + \binom{10}{5} - \binom{10}{7} + \binom{10}{9}$

22. Demostrar que:

$$a) \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots = \frac{1}{2}[2^{n-1} + 2^{n/2}\sin(\frac{n\pi}{4})]$$

$$b) \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots = \frac{1}{2}[2^{n-1} - 2^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{4})]$$

$$c) \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots = \frac{1}{2}[2^{n-1} - 2^{n/2}\sin(\frac{n\pi}{4})]$$

23. Hallar la suma: $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \dots$

24. Demostrar que:

$$a) 1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \dots = \frac{1}{3}[2^n + 2\cos(\frac{n\pi}{3})]$$

$$b) \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \dots = \frac{1}{3}[2^n + 2\cos(\frac{n-2}{3}\pi)]$$

$$c) \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \binom{n}{11} + \dots = \frac{1}{3}[2^n + 2\cos(\frac{n-4}{3}\pi)]$$

25. Demostrar que:

$$\text{Sen } x + \text{Sen } 2x + \text{Sen } 3x + \dots + \text{Sen } nx = \frac{\text{Sen}(\frac{n+1}{2}x) \cdot \text{Sen}(\frac{nx}{2})}{\text{Sen}(x/2)}$$

26. Demostrar que:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\text{Sen}(\frac{2n+1}{2}x)}{2\text{Sen}(x/2)}$$

27. Hallar la suma:

$$\text{Sen } a - \text{Sen}(a+x) + \text{Sen}(a+2x) - \dots + (-1)^{n-1}\text{Sen}[a+(n-1)x]$$

28. Hallar la suma:

$$\text{Sen } x + \binom{n}{1}\text{Sen } 2x + \binom{n}{2}\text{Sen } 3x + \dots + \binom{n}{n}\text{Sen } (n+1)x$$

29. Hallar las sumas:

$$a) \cos x - \binom{n}{1} \cos 2x + \binom{n}{2} \cos 3x - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cos(n+1)x$$

$$b) \sin x - \binom{n}{1} \sin 2x + \binom{n}{2} \sin 3x - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \sin(n+1)x$$

30. Hallar la suma: $\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x + \dots + \sin^2(2n-1)x$

31. Demostrar que:

$$a) \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$$

$$b) \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$$

32. Demostrar que:

$$a) \cos^3 x + \cos^3 2x + \dots + \cos^3 nx = \frac{3 \cos(\frac{n+1}{2})x \sin(\frac{nx}{2})}{4 \sin(x/2)} + \frac{\cos(\frac{3n+3}{2})x \sin(\frac{3nx}{2})}{4 \sin(3x/2)}$$

$$b) \sin^3 x + \sin^3 2x + \dots + \sin^3 nx = \frac{3 \sin(\frac{n+1}{2})x \sin(\frac{nx}{2})}{4 \sin(x/2)} - \frac{\sin(\frac{3n+3}{2})x \sin(\frac{3nx}{2})}{4 \sin(3x/2)}$$

33. Demostrar que:

$$a) \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos(n+1)x - 1}{4 \sin^2(x/2)}$$

$$b) \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2(x/2)}$$

34. Hallar la suma: $\sin x - \sin 2x + \dots + (-1)^{n-1} \sin nx$

35. Demostrar que:

$$a) \cos a + \cos(a+b) + \dots + \cos(a+nb) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}b)}{\sin b/2} \cos(a + \frac{nb}{2})$$

$$b) \sin a + \sin(a+b) + \dots + \sin(a+nb) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}b)}{\sin(b/2)} \sin(a + \frac{nb}{2})$$

36. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que: $1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\cos kx}{\cos^k x} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cos(\frac{kx}{2}) \operatorname{Tg}^k x$

[Sugerencia: Desarrollar $(1 + \frac{e^{i\theta}}{\cos \theta})^n$]

37. Hallar el valor de S, si: $S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{\cos kx}{\cos^k x} \right)$

[Sugerencia: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{Tg} x$]

38. Usando números complejos, convertir a producto: $\sum_{k=1}^n \operatorname{Sen}\left(\frac{n-2k}{n-2}\right)x$
39. Calcular: $\sum_{k=1}^n \operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$. (Sugerencia: Hacer $u = \frac{2\pi}{2n+1}$)
40. Resolver la ecuación en C : $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = 2\operatorname{Cosa}$ y mostrar que todas sus raíces son imaginarias puras. (Sug. Hacer: $u = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$)
41. Resolver la ecuación: $(1+z)^n = (1-z)^n$
42. Desarrollar en sumas y productos: $\operatorname{Re}(e^{i\theta} - i)^n$
43. Hallar el valor de: $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \operatorname{Cos}\left(\frac{4k\pi}{51}\right)$
44. Hallar el valor exacto de:
 $(\sqrt{3})^{100} \binom{100}{1} - (\sqrt{3})^{99} \binom{100}{3} + (\sqrt{3})^{98} \binom{100}{5} - (\sqrt{3})^{97} \binom{100}{7} + \dots$
 [Sug. Desarrollar: $(\sqrt{3}+i)^{100}$]
45. Demostrar que: $2^n \operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \binom{n}{0} - \binom{n}{2}(3) + \binom{n}{4}(3) - \binom{n}{6}(3) + \dots + \binom{n}{n}(3)^{n/2}$
 siendo n un número entero positivo múltiplo de 4. [Sug. Des. $(1+i\sqrt{3})^n$]
46. Sea $P(z) = z^n - z^{n-1} + z^{n-2} - z^{n-3} + \dots - 1$, n impar, $z = \operatorname{Cis}\theta$, $z \neq -1$.
 Hallar la forma polar de $P(z)$. (Sug. Usar cocientes notables)
47. Transformar a producto: a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \operatorname{Cos} k\theta$; b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \operatorname{Sen} k\theta$
48. Demostrar que: $\sum_{k=1}^n \operatorname{Tg} kx \operatorname{Sec} 2kx = \frac{\operatorname{Sen}(2n-1)x}{\operatorname{Cos} 2nx \operatorname{Cos} x}$
49. Sin usar inducción matemática, demostrar que: $\sum_{k=1}^n k \operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}$
50. Hallar la expresión más simple de: $\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} 3x + \operatorname{Cos} 5x - \dots + \operatorname{Cos}(2n-1)x$
51. Hallar el resultado de: $\operatorname{Sen}^2(1^\circ) + \operatorname{Sen}^2(2^\circ) + \dots + \operatorname{Sen}^2(180^\circ)$
 [Sug. Usar la identidad: $\operatorname{Sen}^2 x = \frac{1}{4}(3\operatorname{Sen} x - \operatorname{Sen} 3x)$]
52. Simplificar: $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} \operatorname{Cos}(2^{1-k}x) \cdot \operatorname{Sen}^2(2^{-k}x)$
52. Transformar a productos: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Cos}[k(a-b) + nb]$



CAPITULO

10

POLINOMIOS

10.1 DEFINICIONES Y NOTACIONES

Un polinomio en una variable compleja z , es una función de la forma:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

donde los números $a_i \in \mathbb{C}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$) son sus coeficientes; a_0 es el coeficiente principal, a_n es el coeficiente final o término constante, $n=\text{gr}(P)$ es el grado del polinomio siempre que $a_0 \neq 0$.

Observaciones:

- (1) Si $n=1$, $\text{gr}(P)=1 \rightarrow P(z) = a_0 z + a_1$; P es polinomio lineal.
- (2) Si $n=2$, $\text{gr}(P)=2 \rightarrow P(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$; P es un polinomio cuadrático.
- (3) Si $n=0$ y $a_0 \neq 0 \rightarrow \text{gr}(P)=0$; P es un polinomio constante.
- (4) Si $n=0$ y $a_0=0$, el grado de P (polinomio nulo) se define convencionalmente como $-\infty$, esto es, $\text{gr}(P)=-\infty$
- (5) Si $z=x+i$ (0) $\rightarrow P(z)$ es un polinomio de variable real, esto es:

$$P(z) = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$
 donde los coeficientes $a_i \in K$ (K denota a los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).
- (6) Los polinomios con coeficiente principal 1 se llaman polinomios mónicos.
- (7) Al conjunto de todos los polinomios en x , con coeficientes K , se denota por:

$$K(x) = \{P(x) | P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, n \geq 0, a_i \in K\}$$

10.2 IGUALDAD DE POLINOMIOS

Dos polinomios P_1 y P_2 son iguales si, y sólo si, son del mismo grado y cada coeficiente de P_1 es el mismo número que el correspondiente coeficiente de P_2 .

ciente de P_2 . Entonces se escribe:

$$P_1 = P_2$$

Esto es, si: $P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

$$\text{y } P_2(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$$

Entonces: $P_1(x) = P_2(x) \leftrightarrow m=n \wedge (a_i = b_i, \forall i \in N)$

10.3 SUMA Y MULTIPLICACION DE POLINOMIOS

En el conjunto $K(x)$ se definen las operaciones de suma (+) y otro de producto ($\times$) de la siguiente manera:

a) **Suma:** Dados P y Q tales que: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

Entonces: $P(x) + Q(x) = (a_0+b_0)x^n + (a_1+b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1}+b_{n-1})x + a_n+b_n$

Se suma los términos correspondientes.

Aquellos términos en los que el polinomio de mayor grado no tiene términos correspondientes en el otro polinomio, permanecen sin cambio en $P+Q$.

EJEMPLO 1. Hallar la suma de: $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ y $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x^2$

Solución. Un polinomio está completo si en su desarrollo existen todos los términos que siguen al término principal. Como vemos, tanto P y Q son polinomios incompletos, a P le faltan los términos en x^5 y x^2 , y a Q los términos en x^3 y x . Estos términos que faltan pueden escribirse con coeficientes nulos, esto es:

$$P(x) = 0x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 0x^2 - 5x + 2$$

$$Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 0x^3 + x^2 + 0x + 1$$

de modo que: $P(x)+Q(x) = (0+3)x^3 + (2-2)x^2 + (3+0)x^2 + (0+1)x^2 + (-5+0)x + (2+1)$

$$= 3x^3 + 3x^2 + x^2 - 5x + 3$$

b) **Producto.** Si $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$

$$\text{y } Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

Entonces, el producto $P(x) \times Q(x)$, es el polinomio definido por:

$$P(x) \times Q(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_k$$

Siendo: $k=m+n$ y $c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \dots + a_0 b_i$, con $i=0, 1, 2, \dots, k$

EJEMPLO 2. Hallar el producto de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

Solución. Sean $P(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, y $Q(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$.

Vemos que $gr(P)=3$ y $gr(Q)=2 \rightarrow gr(P \times Q)=3+2=5$

Además: $a_0=2, a_1=-3, a_2=0, a_3=1, a_4=a_5=0$; $b_0=1, b_1=2, b_2=-3, b_3=b_4=0$

Luego, para $P(x) \times Q(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \dots + c_k$, se tiene:

$$c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \dots + a_0 b_i, \quad i=0,1,2,3,4,5$$

$$\rightarrow c_0 = a_0 b_0 = (2)(1) = 2$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = (-3)(1) + (2)(2) = 1$$

$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = (0)(1) + (-3)(2) + (2)(-3) = -12$$

$$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = (1)(1) + (0)(2) + (-3)(-3) + (2)(0) = 10$$

$$c_4 = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4 = (0)(1) + (1)(2) + (0)(-3) + (-3)(0) + (2)(0) = 2$$

$$c_5 = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_0 b_5 = (0)(1) + (0)(2) + (1)(-3) + (0)(0) + (-3)(0) + (2)(0) = -3$$

$$\therefore P(x) \times Q(x) = 2x^5 + x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

La multiplicación de polinomios se puede hacer más rápidamente usando el método de coeficientes separados, como se muestra en seguida, donde se puede notar la similitud con el procedimiento para multiplicar enteros.

			2	-3	0	1	
				1	2	-3	
			-6	9	0	-3	
		4	-6	0	2		
2	-3	0	1				
2	1	-12	10	2	-3		

$$\therefore P(x) \times Q(x) = 2x^5 + x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 2x - 3$$

10.4 ALGORITMO DE LA DIVISION

Existe algún entero no negativo q , tal que: $284 = 12 \times q$?

La respuesta se puede determinar mediante el procedimiento de la división, llamado **algoritmo de la división**:

284	12
24	23
44	
36	
8	

Como el residuo es 8, la respuesta es no. Sin embargo el algoritmo nos mues

tra que $284 = (12)(23) + 8$; es decir, que 284 se puede expresar como el producto de 12 por otro entero no negativo más un número menor que 12.

En general, si p y d son enteros no negativos, entonces el algoritmo de la división nos permite escribir:

$$p = q \times d + r, \text{ donde } q, r \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } r < d$$

Un resultado similar se tiene para polinomios.

Supongamos los polinomios $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 12$, $D(x) = x^2 - 3x + 2$ y efectuamos la división de $P(x)$ entre $D(x)$, recordando que debemos disponer cada polinomio en potencias decrecientes de x , cuidando de poner cero como coeficiente a las potencias de x que faltaran en $P(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) = 2x^3 + 0x^2 - 5x^2 + x + 12 & x^2 - 3x + 2 = D(x) \\
 \underline{-2x^3 + 6x^2 - 4x^2} & 2x^2 + 6x + 9 = Q(x) \\
 6x^3 - 9x^2 + x & \\
 \underline{-6x^3 + 18x^2 - 12x} & \\
 9x^2 - 11x + 12 & \\
 \underline{-9x^2 + 27x - 18} & \\
 16x - 6 = R(x) &
 \end{array}$$

En resumen:

- (1) Obtener el primer término del cociente ($2x^2$) dividiendo el término inicial del dividendo $P(x)$ entre el término inicial del divisor $D(x)$.
- (2) Multiplicar el divisor $D(x)$ por este término del cociente ($2x^2$) y restar el producto del dividendo $P(x)$.
- (3) Usar el residuo de esta resta, junto con los términos no utilizados del dividendo, como nuevo dividendo ($6x^3 - 9x^2 + x$) y seguir los pasos (1) a (3) respectivamente, obteniendo cada vez un nuevo término del cociente.
- (4) Cuando el residuo tenga grado menor que el del divisor (o que sea cero), el proceso ha terminado.

En este ejemplo, el cociente es $Q(x) = 2x^2 + 6x + 9$ y el residuo es $R(x) = 16x - 6$, de modo que podemos indicar el resultado escribiendo:

$$2x^3 - 5x^2 + x + 12 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 6x + 9) + 16x - 6$$

o sea:

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

Este ejemplo ilustra el siguiente teorema conocido como algoritmo de la división.

TEOREMA 10.1 Dados un polinomio $P(x)$ de grado $n > 1$ y un polinomio $D(x)$ de grado m , con $1 \leq m \leq n$; entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, que tienen la propiedad de que:

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

en donde: $\text{gr}[R(x)] < \text{gr}[D(x)]$

Nota. Si al dividir $P(x)$ entre $D(x)$ se obtiene $R(x)=0$, es decir, si $P(x)=D(x) \times Q(x)$, se dice que $D(x)$ divide o es divisor o factor de $P(x)$. En cuyo caso se escribe: $D(x) \mid P(x)$

EJEMPLO 3. Bajo que condición el polinomio x^3+px^2+q es divisible por un polinomio de la forma x^2+mx+1 ?

Solución. Sean $P(x)=x^3+px^2+q$ y $D(x)=x^2+mx+1$.

Dado que P es divisible por D , el resto de la división debe ser cero y, por el Teorema 10.1: $P(x)=D(x) \times Q(x)$

Como $\text{gr}[P(x)] = \text{gr}[D(x)] + \text{gr}[Q(x)] \rightarrow 4 = 2 + \text{gr}[Q(x)] \rightarrow \text{gr}[Q(x)] = 2$

Luego, si: $Q(x)=ax^2+bx+c \rightarrow x^3+px^2+q = (x^2+mx+1)(ax^2+bx+c)$

de donde: $x^3+px^2+q = ax^3+(am+b)x^2+(a+bm+c)x+(b+mc)$

Por igualdad de polinomios:

Coefficientes de x^3 : $a = 1$

" de x^2 : $am+b = 0 \rightarrow b=-m$

" de x : $a+bm+c = p \rightarrow 1-m^2+c = p$ (1)

" de x^0 : $b+mc = q \rightarrow -m+mc = q \leftrightarrow m=0$ o $c=1$

Términos independientes: $q=c \rightarrow q=1 \leftrightarrow m=0$ o $q=1$

Entonces, en (1), existen dos condiciones:

a) Si $m=0 \rightarrow 1+q = p \leftrightarrow q = p-1$

b) Si $q=1 \rightarrow 1-m^2+1 = p \leftrightarrow m = \pm \sqrt{2-p}$

EJEMPLO 4. Calcular la raíz cuadrada del polinomio:

$$P(x) = 9x^4+6x^3-23x^2-3x+13$$

Solución. Dado que $P(x)$ no es un cuadrado perfecto, la raíz cuadrada que se busca tendrá la forma: $A(x)=ax^2+bx+c$ y el resto: $R(x)=mx+n$

Si consideramos a $P(x)$ como dividendo, el divisor $D(x)$ y el cociente $Q(x)$ serán iguales a $A(x)$, entonces por el Teorema 10.1: $P(x) = [A(x)]^2 + R(x)$

$$\rightarrow 9x^4+6x^3-23x^2-3x+13 = (ax^2+bx+c)^2 + mx+n$$

de donde: $9x^3+6x^3-23x^2-3x+13 = a^2x^3+2abx^2+(b^2-2ac)x^1+(2bc+m)x+(c^2+m)$

Identificando coeficientes obtenemos: $a=\pm 3$, $b=\pm 1$, $c=\pm 4$, $m=5$, $n=-3$

$$\therefore A(x)=\pm(3x^2+x-4) \quad , \quad R(x)=5x-3$$

EJERCICIOS: Grupo 63

1. Multiplicar los polinomios:

a) $P(x)=2x^3-x^2+x+1$, $Q(x)=x^2-3x+1$

b) $P(x)=x^3+x^2-x-1$, $Q(x)=x^2-2x-1$

2. Efectuar la división con resto de:

a) $P(x)=2x^3-3x^2+4x-5$ entre $D(x)=x^2-3x+1$

b) $P(x)=x^3-3x^2-x-1$ entre $D(x)=3x^2-2x+1$

3. Bajo que condición el polinomio x^3+px+q es divisible por un polinomio de la forma x^2+mx-1 ?

4. Sin efectuar la división, demostrar que $x^4+2x^3+5x^2+12x-6$ es divisible entre x^2+2x-1 .

5. Al dividir el polinomio $x^4+ax^3+bx^2-18x-12$ por x^2+4x+3 , el resto es $2x+3$, hallar a y b .

6. Calcular la raíz cuadrada de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

b) $P(x) = 16x^6-40x^5+49x^4-46x^3+29x^2-12x+4$

7. Hallar la condición para que el polinomio $x^4-2ax^3+bx^2-cx+1$ pueda ser un cuadrado perfecto para todos los valores de x .

8. Determinar los valores de m y n para que el polinomio $x^4+mx^3+nx^2+12x+4$, sea un cuadrado perfecto.



10.5 LA DIVISION SINTETICA



Es un procedimiento práctico para obtener el cociente y el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x-r)$, sin necesidad de recurrir a la división ordinaria.

Supongamos el polinomio dividido, de grado n :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

y el binomio divisor, de grado uno: $D(x)=x-r$

Entonces, por el Teorema 10.1: $P(x) = (x-r)Q(x) + R$ (2)

donde R es un polinomio constante y $Q(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, de la forma:

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1} \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2) se tiene:

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 &= (x-r)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}) \\ &= b_n x^n + (b_1 - rb_n) x^{n-1} + (b_2 - rb_{n-1}) x^{n-2} + \dots \\ &\quad + (b_{n-1} - rb_{n-2}) x + (R - rb_{n-1}) \end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios:

$$\begin{array}{ll} a_0 = b_0 & + \quad b_0 = a_0 \\ a_1 = b_1 - rb_0 & + \quad b_1 = a_1 + rb_0 \\ a_2 = b_2 - rb_1 & + \quad b_2 = a_2 + rb_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = b_{n-1} - rb_{n-2} & + \quad b_{n-1} = a_{n-1} + rb_{n-2} \\ a_n = R - rb_{n-1} & + \quad R = a_n + rb_{n-1} \end{array}$$

Estas relaciones nos permiten expresar los coeficientes sucesivos de $Q(x)$ y R en términos de los coeficientes de $P(x)$ y $Q(x)$ previamente determinados. Para propósitos de cálculo, estas igualdades se pueden disponer de la forma siguiente:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
r	$\downarrow$					
	rb_0	rb_1	$\dots$	rb_{n-2}	rb_{n-1}	
	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}	R	

Los números de la primera fila son los coeficientes de $P(x)$ dispuestos en forma decreciente respecto a las potencias de x . Como $a_0 = b_0$, ésta se baja a la tercera fila, luego, el producto rb_0 se escribe como primer elemento de la segunda fila y se obtiene $b_1 = a_1 + rb_0$. El producto rb_1 es el segundo elemento de la segunda fila y b_2 es la suma de los elementos que están encima de él, y así sucesivamente.

De la tercera fila de esta tabla escribimos el cociente:

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_{n-1}, \text{ y el resto: } R = a_n + rb_{n-1}$$

EJEMPLO 1. Obtener el cociente y el resto de la división de:

$$P(x)=2x^5-14x^3+8x^2+7 \text{ entre } D(x)=x+3.$$

Solución. Aquí $r=3$, se obtiene haciendo $D(x)=0$

Entonces, según el esquema anteriormente descrito se tiene:

	2	0	-14	8	0	7
-3	↓	-6	18	-12	12	-36
	2	-6	4	-4	12	-29

$$\therefore Q(x)=2x^4-6x^3+4x^2-4x+12, R=-29$$

Observaciones:

(I) La división sintética también es aplicable cuando el divisor es un polinomio de segundo grado factorizable de la forma: $(x-a)(x-b)$

En efecto, si $P(x)$ es el polinomio dividendo y $x-a$ el binomio divisor, por división sintética encontramos el cociente $Q_1(x)$ y el resto R_1 , tales que:

$$P(x) = (x-a)Q_1(x) + R_1 \quad (1)$$

Tomando $Q_1(x)$ como polinomio dividendo y $x-b$ como binomio divisor encontramos el cociente $Q(x)$ y el resto R_2 , tales que:

$$Q_1(x) = (x-b)Q(x) + R_2 \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos:

$$P(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + R_2(x-a) + R_1$$

donde se observa que $Q(x)$ es el cociente y el resto: $R=R_2(x-a)+R_1$.

EJEMPLO 2. Por división sintética, hallar el cociente y resto de la división de $P(x)=x^5-3x^3+5x^2+22x-10$ entre x^2+x-2 .

Solución. $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$. Hallemos, sucesivamente $Q_1(x)$ y $Q(x)$ de la división de $P(x)$ entre $(x+2)$ y $(x-1)$, respectivamente:

	1	-3	5	22	-10
-2	↓	-2	10	-30	16
$Q_1(x) =$	1	-5	15	-8	6 = R_1
	1	↓	1	-4	11
$Q(x) =$	1	-4	11	3 = R_2	

$$\therefore Q(x)=x^3-4x+11 \text{ y el resto: } R=3(x+2)+6=3x+12$$

(II) La división sintética es también aplicable cuando el divisor es un polinomio de segundo grado, factorizable o no factorizable, o un polinomio de grado mayor que 2. Esta división se realiza por el llamado método de Horner. Se ilustra con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3. Por división sintética, hallar el cociente y el resto de la división de $P(x)=12x^3-13x^2-57x+32x+8$ entre $D(x)=4x^2+5x-6$

Solución. La disposición de los coeficientes del polinomio dividendo y divisor es como sigue:

4	12	-13	-57	32	8
-5		-15	18		
6			35	-42	
				5	-6
		-28	-4		
	3	-7	-1	-5	2

Explicación. En la primera fila, a la derecha de la línea vertical llena, se colocan los coeficientes del dividendo $P(x)$. En la columna a la izquierda de la línea vertical llena van los coeficientes del divisor $D(x)$, con los signos cambiados, después del primero; la segunda fila se obtiene multiplicando -5 y 6 por 3 (que resulta de dividir el primer coeficiente del dividendo entre el primer coeficiente del divisor). Luego se suman los términos de la segunda columna (esto da -28), el resultado se divide entre el primer coeficiente del divisor (esto da -7), que es el segundo coeficiente del cociente. En seguida se obtiene la tercera fila multiplicando -5 y 6 por -7; la suma de los términos de la tercera columna (que es -4), se divide entre el primer coeficiente del divisor (esto da -1), que es el tercer término del cociente. La cuarta fila se obtiene multiplicando -5 y 6 por -1. Cuando se ha obtenido el número de términos deseados del cociente, el residuo se obtiene sumando las demás columnas restantes (después de la línea vertical punteada).

$$\therefore Q(x)=3x^2-7x-1 \text{ y } R(x)=-5x+2$$

10.6 TEOREMA DEL RESTO



TEOREMA 10.2 Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x-r$, siendo r una cons

tante arbitraria, hasta obtener un cociente $Q(x)$ y un residuo R , entonces,

$$P(r) = R$$

Demostración. En efecto, por el algoritmo de la división:

$$P(x) = (x-r)Q(x) + R$$

Como esta igualdad es válida para todo x , en particular para $x=r$, entonces:

$$\begin{aligned} P(r) &= (r-r)Q(r) + R \\ &= (0)Q(r) + R \rightarrow P(r) = R \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Hallar el resto de la división de:

$$P(x)=x^4-2x^3-24x^2+15x+50 \text{ entre } D(x)=x+4$$

Solución. Por el Teorema 10.2: $R=P(-4)$

$$\rightarrow R = (-4)^4 - 2(-4)^3 - 24(-4)^2 + 15(-4) + 50 = 256 + 128 - 384 - 60 + 50 = -10$$

Como se puede observar en este ejemplo, el cálculo de R resulta bastante laborioso. La división sintética puede usarse ventajosamente para calcular R , cuando la sustitución directa de r por x se dificulte.

En efecto, por la división sintética:

	1	-2	-24	15	50
-4		-4	24	0	-60
	1	-6	0	15	-10

determinamos fácilmente que: $R=-10$ y además: $Q(x)=x^3-6x^2+15$

10.7 TEOREMA DEL FACTOR

TEOREMA 10.3 Dado un polinomio $P(x)$, un número r es raíz de $P(x)$ si y sólo si $(x-r)$ es un factor de $P(x)$.

Demostración. i) En efecto, por el Teorema 10.1: $P(x)=(x-r)Q(x)+R$

Por el teorema del resto: $P(r)=R$, pero como r es un cero, es decir, $P(r)=0$, entonces $R=0$.

Por lo tanto, $P(x)=(x-r)Q(x)$, luego, $(x-r)$ es un factor de $P(x)$.

ii) Recíprocamente, si $x-r$ es un factor de $P(x)$, entonces: $P(x)=(x-r)Q(x)$

Como el resto $R=P(r)$ es cero, entonces: $P(r)=(r-r)Q(r)=0$

Significa que r es una raíz de $P(x)$.

EJEMPLO 5. Determinar si $(x-3)$ es factor de $P(x)=x^3-8x^2+9x+18$.

Solución. Bastará comprobar que $P(r)=P(3)=0$

En efecto, $P(3) = (3)^3 - 8(3)^2 + 9(3) + 18 = 27 - 72 + 24 + 18 = 0$

Luego, $(x-3)$ es un factor de $P(x)$.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

EJERCICIO 1. Determinar m y n de manera que el polinomio

$$P(x) = x^3 + x^2 - 11x^2 - mx + n \text{ sea divisible por } x^2 - 9.$$

Solución. $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$. Aplicando sucesivamente el método de la división sintética para cada factor se tiene:

	1	1	-11	-m	n
-3		-3	6	15	-45+3m
	1	-2	-5	15-m	3m+n-45 = R_1
3		3	3	-6	
	1	1	-2	9-m	= R_2

Los restos R_1 y R_2 deben ser igual a cero, esto es, si:

$$R_2 = 0 \rightarrow 9 - m = 0 \rightarrow m = 9; \quad R_1 = 0 \rightarrow 3m + n - 45 = 0 \rightarrow n = 18$$

EJERCICIO 2. Si $P(x)$ es divisible por $(x-1)^2$, pero al dividir $P(x)$ entre $(x-1)$ y luego este resultado entre $(x-2)$ se obtiene 4 de residuo y $S(x)$ de cociente. Hallar $S(1)$.

Solución. Sea $P(x) = (x-1)(x-1)Q(x)$.

Dividiendo $P(x)$ entre $(x-1)$ obtenemos el cociente: $(x-1)Q(x)$

Luego, dividiendo este resultado entre $(x-2)$ se obtiene:

$$(x-1)Q(x) = (x-2)S(x) + 4 \rightarrow S(x) = \frac{(x-1)Q(x) - 4}{x-2} \rightarrow S(1) = 4$$

EJERCICIO 3. Si $P(x) = x^3 + x^2 - 19x^2 + ax + b$ y $D(x) = x^2 + x - 20$, determinar $|a| + |b|$, si a y b permiten que $P(x)$ se exprese como $P(x) = D(x) \times Q(x)$, para algún polinomio $Q(x)$.

Solución. $D(x) = (x+5)(x-4)$. Si $P(x) = D(x) \times Q(x)$ $\rightarrow D(x)$ es un factor de $P(x)$

Por el teorema del factor: $x = -5$ y $x = 4$ son raíces de $P(x)$, luego, por el método de la división sintética se tiene: (en la página siguiente)

$$\text{Si } R_2 = 0 \rightarrow a = 1; \quad \text{si } R_1 = 0 \rightarrow b - 5a + 25 = 0 \rightarrow b = -20$$

$$\therefore |a| + |b| = 21$$

	1	1	-19	a	b
-5		-5	20	-5	25-5a
	1	-4	1	a-5	b-5a+25 = R ₁
4		4	0	4	
	1	0	1	a-1 = R ₂	

EJERCICIO 4. Si $(x^2-4)(x+3)$ son factores del polinomio:

$P(x)=x^5+x^4-9x^3+mx^2+nx+p$, con m, n y p constantes en R , determinar el valor de $E=m+n+p$.

Solución. $(x^2-4)(x+3) = (x+2)(x-2)(x+3) \rightarrow x=-2, x=2$ y $x=-3$ son raíces de $P(x)$, entonces, por el método de la división sintética se tiene:

	1	1	-9	m	n	p
2		2	6	-6	2m-12	4m+2n-24
	1	3	-3	m-6	2m+n-12	4m+2n+p-24 = R ₁
-2		-2	-2	10	-2m-8	
	1	1	-5	m+4	n-20 = R ₂	
-3		-3	6	-3		
	1	-2	1	m+1 = R ₃		

Por el Teorema del factor: $R_1=R_2=R_3=0$

Resolviendo cada ecuación obtenemos: $m=-1$, $n=20$, $p=-12 \rightarrow E=m+n+p=7$

EJERCICIO 5. Si $(x-k)^2$ es un factor del polinomio $P(x)=x^5-5ax+4b$, mostrar que: $a^3=b^3$.

Solución. En efecto, por el Teorema del factor, $x=k$ es una raíz doble. Entonces por el método de la división sintética se tiene:

	1	0	0	0	-5a	4b
k		k	k ²	k ³	k ⁴	k ⁵ -5ak
	1	k	k ²	k ³	k ⁴ -5a	k ⁵ -5ak+4b = R ₁
k		k	2k ²	3k ³	4k ⁴	
	1	2k	3k ²	4k ³	5k ⁴ -5a = R ₂	

Como $R_1=R_2=0 \rightarrow (5k^4-5a=0) \wedge (k^5-5ak+4b=0) \rightarrow (a=k^4) \wedge (b=k^3)$

de donde:

$$a^3 = b^3$$

EJERCICIO 6. Sea el polinomio $P(x)=ix^3+2x^2-ax+7+2i$. Al restar del resto de $P(x)$ entre $(x-3i)$, el resto de $P(x)$ entre $(x-2i)$ se obtiene $b+i$. Hallar el residuo al dividir $P(x)$ entre $(x-3i)(x-2i)$.

Solución. Por el Teorema del resto: $R_1=P(3i)$ y $R_2=P(2i)$

$$\text{Si } R_1-R_2 = b+i \rightarrow P(3i)-P(2i) = b+i \quad (1)$$

$$P(3i) = i(3i)^3+2(3i)^2-a(3i)+7+2i = 16+2i-3ai \quad (2)$$

$$P(2i) = i(2i)^3+2(2i)^2-a(2i)+7+2i = 7+2i-2ai \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1): $16+2i-3ai-7-2i+2ai = b+i \rightarrow 9-ai = b+i$

de donde: $b=9$ y $a=-1 \rightarrow P(x) = ix^3+2x^2+ix+7+2i$

Por el método de la división sintética se tiene:

	i	2	1	7+2i
3i	-3	-3i	9+3i	
	i	-1	1-3i	16+5i = R ₁
2i	-2	-6i		
	i	-3	1-9i	= R ₂

$$\text{Luego: } R = R_2(x-3i)+R_1 = (1-9i)(x-3i)+16+5i = (x-11)+(2-9x)i$$

EJERCICIO 7. $P(x)$ es un polinomio que dividido entre x^2+x+6 da como cociente $Q(x)$ y como residuo -5 . Hallar, en términos de ω , el resto de dividir $P(x)$ entre $(x-\omega-1)$ sabiendo que $Q(-\omega^2)=\omega$ y $\omega^3=1$, $\omega \neq 1$.

Solución. Por el Teorema 10.1: $P(x) = (x^2+x+6)Q(x)-5$

$$\text{Dado que: } \omega^3=1 \rightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1) = 0$$

$$\text{Como } \omega \neq 1 \rightarrow \omega-1 \neq 0 \rightarrow \omega^2+\omega+1=0 \rightarrow -\omega^2=\omega+1$$

Por el Teorema 10.2, el resto de dividir $P(x)$ entre $[x-(\omega+1)]$ es $P(\omega+1)$.

$$\text{Pero: } P(\omega+1) = P(-\omega^2) = [(-\omega^2)^2+(-\omega^2)+6]Q(-\omega^2)-5 = (\omega^3-\omega^2+6)\omega-5$$

$$\rightarrow R = P(\omega+1) = \omega^3(\omega^2-1)+6\omega-5 = 1[(-\omega-1)-1]+6\omega-5 = 5\omega-7$$

EJERCICIO 8. $P(x)=x^2f(x)+xf(x^2)$, $P(x)$ es una expresión polinomial entera. Se sabe que $\forall a, b \in \mathbb{C}$: $P(a)+P(b)=P(a+b)$. Demostrar que:

$$P(2\omega+1)=0 \text{ si } \omega^3=1, \omega \neq 1$$

Demostración. En efecto, si: $P(a)+P(b)=P(a+b) \rightarrow P(a)+P(-a)=P(a-a)=P(0)$

$$\text{Pero: } P(0)=0^2f(0)+0f(0^2)=0 \rightarrow P(a)+P(-a)=0 \rightarrow P(-a)=-P(a)$$

$$\text{Si } \omega^3=1 \rightarrow \omega^3-1=0 \rightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\text{Como } \omega \neq 1 \rightarrow \omega^2+\omega+1=0 \rightarrow \omega+1=-\omega^2 \rightarrow 2\omega+1=\omega-\omega^2$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } P(2\omega+1) &= P(\omega-\omega^2) = P(\omega)+P(-\omega^2) && (\text{Por condición dada}) \\ &= P(\omega) - P(\omega^2) && [P(-a)=-P(a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + P(2\omega+1) &= [\omega^2 f(\omega) + f(\omega^2)] - [\omega^4 f(\omega^2) + \omega^2 f(\omega^4)] \\ &= \omega^2 f(\omega) + \omega f(\omega^2) - \omega^4 \cdot \omega f(\omega^2) - \omega^2 f(\omega^3 \cdot \omega) \end{aligned}$$

$$+ P(2\omega+1) = \omega^2 f(\omega) + \omega f(\omega^2) - \omega f(\omega^2) - \omega^2 f(\omega) = 0$$

EJERCICIO 9. Dados los polinomios $P(x)=x^3+px^2+q$ y $Q(x)=x^2+2x+5$. Cuáles son los valores de p y q respectivamente para los que $P(x)$ sea divisible por $Q(x)$.

Solución. Aplicaremos la división sintética de Horner:

1	1	0	p	0	q
-2		-2	-5		
-5			4	10	
				-2p+2	-5p+5
	1	-2	p-1	12-2p	q-5p+5

Para que $P(x)$ sea divisible por $Q(x)$, el resto debe ser cero, esto es:

$$(12-2p=0) \wedge (q-5p+5=0) \leftrightarrow p=6 \wedge q=25$$

EJERCICIO 10. Hallar el valor de m para que el polinomio x^3-7x+5 sea factor de $P(x)=x^5-2x^4-4x^3+19x^2-31x+12+m$.

Solución. Según la división sintética de Horner se tiene:

1	1	-2	-4	19	-31	12+m
0		0	7	-5		
7			0	-14	10	
-5				0	21	-15
	1	-2	3	0	0	m-3

Por el Teorema del factor: Resto = $P(r) = 0 \rightarrow m-3=0 \rightarrow m=3$

EJERCICIO 11. Se sabe que: $x^n+py^n+qz^n$ es divisible por $x^2-(ay+bz)x+abyz$,

$$y \neq 0, z \neq 0. \text{ Demostrar que: } \frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} = -1$$

Demostración. En efecto: $x^2-(ay+bz)x+abyz = (x-ay)(x-bz)$

Por el Teorema del factor: $(x-ay)(x-bz)=0 \leftrightarrow x=ay \text{ o } x=bz$

$$\leftrightarrow y = x/a \text{ o } z = x/b$$

$$\text{Luego, si } P(y) = P\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \rightarrow x^n + p\left(\frac{x}{a}\right)^n + qz^n = 0 \quad (1)$$

$$P(z) = P\left(\frac{y}{b}\right) = 0 \rightarrow x^n + py^n + q\left(\frac{x}{b}\right)^n = 0 \quad (2)$$

$$\text{Sumando (1)+(2), se tiene: } 2x^n + x^n\left(\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n}\right) + py^n + qz^n = 0 \quad (3)$$

$$\text{Pero, en (1): } x^n + py^n + qz^n = 0 \rightarrow py^n + qz^n = -x^n$$

$$\text{En (3): } 2x^n + x^n\left(\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n}\right) - x^n = 0 \rightarrow x^n\left(1 + \frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} = -1$$

EJERCICIO 12. Para qué valores de m , $(x+1)^m - x^m - 1$ es divisible por $x^2 + x + 1$

Solución. Sean: $P(x) = (x+1)^m - x^m - 1$ y $Q(x) = x^2 + x + 1$

Si ω es una raíz de $Q(x)$, satisface a la ecuación cúbica $\omega^3 = 1$, toda vez que: $\omega^3 - 1 = 0 \rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \rightarrow (\omega \neq 1) \wedge (\omega^2 + \omega + 1 = 0)$

Es decir, las dos raíces primitivas de la unidad de orden 3 de $Q(\omega) = 0$ son

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Pero: $1 + \omega = -\omega^2 = \lambda$ es una raíz primitiva de la unidad de orden 6 (Ver página 615). Luego, si $\omega \in P(x)$, determinaremos bajo que condiciones el residuo:

$$P(\omega) = 0 \rightarrow P(\omega) = (\omega+1)^m - \omega^m - 1 = \lambda^m - \omega^m - 1, \text{ pero: } \lambda^2 = (-\omega^2)^2 = \omega^3 \cdot \omega = \omega$$

$$\rightarrow P(\omega) = \lambda^m - \lambda^{2m} - 1, \text{ si } m = 6n + k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\rightarrow P(\omega) = (\lambda^6)^n (\lambda^k) - (\lambda^6)^{2n} (\lambda^{2k}) - 1. \text{ Como: } \omega^3 = (\lambda^2)^3 \rightarrow 1 = \lambda^6$$

$$\rightarrow P(\omega) = \lambda^k - \lambda^{2k} - 1$$

$$\text{Para: } k=0 \rightarrow m = 6n \rightarrow P(\omega) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$$

$$k=1 \rightarrow m = 6n+1 \rightarrow P(\omega) = \lambda - \lambda^2 - 1 = (1+\omega) - \omega - 1 = 0$$

$$k=2 \rightarrow m = 6n+2 \rightarrow P(\omega) = \lambda^2 - \lambda^4 - 1 = \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0$$

$$k=3 \rightarrow m = 6n+3 \rightarrow P(\omega) = \lambda^3 - \lambda^6 - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$

$$k=4 \rightarrow m = 6n+4 \rightarrow P(\omega) = \lambda^4 - \lambda^8 - 1 = -\lambda - \lambda^2 - 1 \neq 0$$

$$k=5 \rightarrow m = 6n+5 \rightarrow P(\omega) = \lambda^5 - \lambda^{10} - 1 = -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Por lo tanto, $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ si: $m = 6n+1$ y $m = 6n+5$

EJERCICIO 13. Demostrar que: $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

Demostración. Sean: $P(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ y $Q(x) = x^2 + x + 1 \rightarrow Q(\omega) = \omega^2 + \omega + 1$

Si ω es raíz de $Q(x) \rightarrow \omega^3 = 1$, ya que: $\omega^3 - 1 = 0$

$$\rightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1) = 0 \rightarrow \omega^2+\omega+1=0, \omega \neq 1$$

Probaremos entonces que el resto: $P(\omega)=0$

$$\begin{aligned} \text{En efecto: } P(\omega) &= \omega^{3m} + \omega^{3n+1} + \omega^{3p+2} = (\omega^3)^m + (\omega^3)^n \cdot \omega + (\omega^3)^p \cdot \omega^2 \\ &= (1)^m + (1)^n \cdot \omega + (1)^p \cdot \omega^2 = 1 + \omega + \omega^2 \rightarrow P(\omega) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(x)$ es siempre divisible por $Q(x)$, $\forall n, p \in \mathbb{Z}^+$

EJERCICIO 14. Bajo que condición: $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ es divisible por $x^3 + x^2 + 1$.

Solución. Sean: $P(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ y $Q(x) = x^3 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

En el ejercicio anterior demostramos que $Q_1(x) = x^2 + x + 1$ es siempre divisor de $P(x)$. Nos queda averiguar bajo que condición $P(x)$ es divisible por $Q_2(x) = x^2 - x + 1$. Luego, si λ es raíz de $Q_2(x) \rightarrow \lambda^3 = -1$, ya que: $\lambda^3 + 1 = 0$

$$\rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \lambda \neq -1$$

Si $\lambda \in P(x)$, probaremos bajo que condición: $P(\lambda) = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(\lambda) &= (\lambda^3)^m + (\lambda^3)^n \cdot \lambda + (\lambda^3)^p \cdot \lambda^2 = (-1)^m + (-1)^n \lambda + (-1)^p \lambda^2 \\ &= (-1)^m - (-1)^{n+1} \lambda + (-1)^p \lambda^2 \end{aligned}$$

Cuando $m, n+1$ y p son pares $\rightarrow P(\lambda) = 1 - \lambda + \lambda^2 = 0$

Cuando $m, n+1$ y p son impares $\rightarrow P(\lambda) = -1 + \lambda - \lambda^2 = -(1 - \lambda + \lambda^2) = 0$

Por lo tanto, $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ cuando los números $m, n+1$ y p son simultáneamente pares o impares.

EJERCICIO 15. Si $P(x) = \prod_{k=0}^{49} (1 - x^{6k+1} + x^{6k+5})(1 - x^{6k+5} + x^{6k+7})$, hallar el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x) = x^2 + x + 1$

Solución. Sea $\omega \in Q(x) \rightarrow Q(\omega) = \omega^2 + \omega + 1$. Si ω es raíz de $Q(x) \rightarrow \omega^3 = 1$, toda vez que: $\omega^3 - 1 = 0 \rightarrow (\omega-1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \leftrightarrow \omega \neq 1 \wedge \omega^2 + \omega + 1 = 0$

Por el teorema del resto: $R = P(\omega)$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(\omega) &= \prod_{k=0}^{49} [1 - (\omega^3)^{2k} \cdot \omega + (\omega^3)^{2k} \cdot \omega^5] [1 - (\omega^3)^{2k} \cdot \omega^5 + (\omega^3)^{2k} \cdot \omega^7] \\ &= \prod_{k=0}^{49} (1 - \omega + \omega^5)(1 - \omega^5 + \omega^7) = \prod_{k=0}^{49} (1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega) \\ &= \prod_{k=0}^{49} (1 + \omega + \omega^2 - 2\omega)(1 + \omega + \omega^2 - 2\omega^2) = \prod_{k=0}^{49} (0 - 2\omega)(0 - 2\omega^2) = \prod_{k=0}^{49} (4\omega^3) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Resto} = P(\omega) = 4^{50} = 2^{100}$$

EJERCICIOS: Grupo 64

- Por división sintética obtener el cociente y resto de las divisiones siguientes:
 - $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 6x + 8$, entre $D(x) = x - 1$
 - $P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 3$, entre $D(x) = 2x + 1$
 - $P(z) = 4z^3 + z^2$, entre $D(z) = z + 1 + i$
 - $P(z) = z^3 - z^2 - z$, entre $z - 1 + 2i$
- Hallar el resto que resulta de dividir $P(x)$ entre $D(x)$:
 - $P(x) = x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 + 2\sqrt{2} + 7$; $D(x) = x - \sqrt{2} + 1$
 - $P(x) = x^3 + (1 + 2i)x^2 - (1 + 3i)x + 7$; $D(x) = x + 2 + i$
 - $P(x) = 4x^3 - 16x^2 + 9x + 33$; $D(x) = 2x^2 - 5x - 7$
 - $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 12x - 11$; $D(x) = 2x^2 - 3x - 2$
- Si para la constante $k \in \mathbb{R}$, al dividir el polinomio $P(x) = kx^3 + 3x^2 - 5x - 4$ entre $x - 2$ da por residuo 22, hallar el valor de $k^3 - k^2 + 4$.
- Si el polinomio $P(x) = 2x^3 - mx^2 + x^2 - nx + 2$ es divisible por $x^2 + x - 2$, hallar el valor de $E = n - m$.
- Hallar el valor de m si el residuo de dividir $x^3 - 5x + 12$ entre $x^2 + mx - 1$ es cero.
- Si -1 es una de las raíces del polinomio $P(x) = ax^3 + ax^2 + 13x^3 - 11x^2 - 10x - 2a$ y $P(1) = k$, hallar el valor de $a + k$.
- El polinomio $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ es múltiplo de $(x^2 - 9)$ y al dividir entre $x + 1$, da un resto de -8 . Hallar b , c y d .
- Dado el polinomio $P(x) = x^5 - 2x^3 - 6x^2 + mx^2 + nx + p$; hallar m , n y p , si $P(x)$ es divisible por el producto $(x - 3)(x + 1)(x - 1)$.
- $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ tiene como resto $ax + b$. Si $P(1) = 4$ y $P(2) = 2$, hallar a y b .
- Si el polinomio $P(x) = x^4 - 3ax^3 + a^2x^2 + ma^3x - na^4$ es divisible entre el polinomio $Q(x) = x^2 - ax + 2a^2$, hallar el valor de $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$.
- Qué valor debe tener k para que el polinomio $P(x) = x^6 + 2x^3 + kx^2 - x^2 + (8 + k)x^2 + 6x - 18$, sea divisible por $x^3 + 2x^2 - 3$.
- El polinomio $P(x) = x^5 - 5ax + 4b$ da un cociente exacto al dividir entre $D(x) = (x - k)^2$. Hallar $b - a$ en términos de k .

13. Si $x+1$ es un factor de $x^3-2ax^2+(3a+b)x-3b$ y de $x^3-(a+2b)x+2a$, hallar ab
14. Un polinomio de tercer grado, cuyo coeficiente principal es la unidad es divisible por x^2-x-2 , y al dividir por $x-3$ da de resto 20. Qué resto daría al dividir dicho polinomio por $x+3$?
15. Hallar un polinomio $P(z)$ de tercer grado, cuyo coeficiente principal es la unidad y que es divisible por z^2-z-6 , y que al dividir entre $z+1$ su residuo es 9.
16. Determinar A y B de tal modo que el trinomio Ax^3+Bx^2+1 sea divisible entre $(x-1)^2$.
17. Determinar A y B de tal modo que el trinomio $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ sea divisible por $(x-1)^2$.
18. Al dividir un polinomio entero $P(x)$ entre $(x-1)(x-2)$ el cociente es el polinomio $Q(x)$ con término independiente 2. Si $P(0)=11$ y $P(1)=20$, determinar el resto de la división indicada.
19. Hallar un polinomio de tercer grado tal que sea divisible por $x-1$ y al dividirlo separadamente por $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ el resto es siempre -9 .
20. Bajo qué condiciones el polinomio $P(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$ es divisible por x^2-x+1 .
21. Bajo qué condición el polinomio $x^{2m}+x^m+1$ es divisible por x^2+x+1 ?
22. Para qué valor de m , $(x+1)^m+x^m+1$ es divisible por x^2+x+1 ?
23. Para qué valores de m , $(x+1)^m-x^m-1$ es divisible por $(x^2+x+1)^2$.
24. Para qué valores de m , $(x+1)^m+x^m+1$ es divisible por $(x^2+x+1)^2$.
25. Dados $n \in \mathbb{Z}^+$ impar, $m \in \mathbb{Z}^+$ par y si:

$$P(x) = x^{3n}-x^{3n-3}+x^{3n-6}-\dots+(-1)^{n-1}x^3+x$$

$$Q(x) = x^{3m}-x^{3m-3}+x^{3m-6}-\dots+(-1)^{m-1}x^3+x^2$$
 Demostrar que $P(x)+Q(x)$ es divisible por x^2+x+1 .
26. Para qué valores de a y n el polinomio $x^n-ax^{n-1}+ax-1$ es divisible por $(x-1)^2$.
27. Determinar p y q de modo que $P(x)=x^3-9x^2+px+q$ admita el factor $x-5$ y otro factor $x-a$ elevado al cuadrado.



10.8 RAICES DE UN POLINOMIO

Por el Teorema del Factor sabemos que dado un polinomio $P(x)$ con grado mayor o igual que 1, un número r se llama *raíz o cero* del polinomio $P(x)$ si $P(r)=0$.

EJEMPLOS:

(1) $P_1(x)=2x^2-5x-3$, tiene por raíz $r=3$, pues: $P_1(3)=2(3)^2-5(3)-3=0$

(2) $P_2(x)=x^3+2x^2-5x-10$, tiene por raíz $r=\sqrt{5}$, pues:

$$P_2(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^3 + 2(\sqrt{5})^2 - 5\sqrt{5} - 10 = 0$$

(3) $P_3(x)=x^3-5x^2+4x-20$, tiene por raíz $r=2i$, pues:

$$P_3(2i) = (2i)^3 - 5(2i)^2 + 4(2i) - 20 = -8i + 20 + 8i - 20 = 0$$

Como se puede observar en estos ejemplos, existen polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ que pueden tener raíces racionales (como P_1), raíces reales (como P_2) o raíces complejas (como P_3), y como todo complejo se puede expresar en la forma $a+bi$, donde a y b son números reales, ocurre que todo polinomio, con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, tiene sus raíces en $\mathbb{C}$ necesariamente.

Este importante resultado fué formulado por el francés D'Alembert y demostrado luego el alemán Gauss y que se conoce con el nombre de:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Todo polinomio de grado positivo n :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $\text{gr}(P) \geq 1$ y $a_n \neq 0$, definido sobre el campo de los números complejos, tiene por lo menos una raíz, ya sea real o compleja.

Supondremos válido el teorema, ya que su demostración escapa a los alcances teóricos del presente tratamiento.

10.8.1 NUMERO DE RAICES DE UNA ECUACION POLINOMICA

TEOREMA 10.5 Todo polinomio de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

tiene exactamente n raíces.

Demostración. En efecto, por el Teorema Fundamental, $P(x)$ tiene al menos una raíz r_1 y por el teorema del factor: $P(x) = (x-r_1)Q_1(x)$

Siendo $Q_1(x)$ el cociente de la división de $P(x)$ por $x-r_1$.

Análogamente $Q_1(x)$ tiene una raíz r_2 , de modo que:

$$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)Q_2(x)$$

Como además cada nuevo cociente es de grado menor en una unidad al del cociente anterior, podemos continuar el proceso hasta obtener finalmente:

$$P(x) = (x-r_1)(x-r_2) \dots (x-r_n)Q_n(r)$$

Dado que hay n factores $(x-r_i)$, entonces $Q_n(r)$ debe ser la constante a_n , en consecuencia:

$$P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2) \dots (x-r_n) \quad (1)$$

donde cada r_i es una raíz o cero de $P(x)$.

Si en la identidad (1) hacemos $x=r$, siendo r un número arbitrario, tenemos:

$$P(r) = a_n(r-r_1)(r-r_2) \dots (r-r_n)$$

Si $r \neq r_i$, $\forall i$, ninguno de los factores $(r-r_i)$ es cero, y como $a_n \neq 0$, $f(r) \neq 0$, y r no es cero de $P(x)$; por lo tanto, hay exactamente n raíces, con lo que el teorema queda demostrado.

10.8.2 MULTIPLICIDAD DE UN FACTOR

Definición. Una raíz r de un polinomio $P(x)$, se dice que es de multiplicidad $m \geq 1$, si $P(x) = (x-r)^m Q(x)$, donde $Q(x) \neq 0$.

Por ejemplo, el polinomio $P(x) = (x-1)(x+2)^3(x-4)^2$ es de grado 6 y sus raíces son: 1, -2, -2, -2, 4, 4, y en donde:

$r=1$ es una raíz simple

$r=-2$ es un cero de multiplicidad 3 o es una raíz triple

$r=4$ es un cero de multiplicidad 2 o es una raíz doble.

10.8.3 MULTIPLICIDAD DE UN FACTOR

Por el Teorema Fundamental sabemos que todas las raíces de un polinomio con coeficientes reales se encuentran en $\mathbb{C}$, siendo algunas reales y otras complejas.

Veremos en seguida que las raíces, tanto complejas como irracionales, se presentan por pares.

TEOREMA 10.6 Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio real no constante. Si un número complejo $r = a + bi$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ es una

raíz de $P(x)$, entonces su conjugada $\bar{r}=a-bi$ también es raíz de $P(x)$.

Demostración. En efecto, si r es una raíz, entonces $P(a+bi)=0$, esto es:

$$a_n(a+bi)^n + a_{n-1}(a+bi)^{n-1} + \dots + a_1(a+bi) + a_0 = 0$$

Como los a_i son reales, tomando conjugadas en ambos extremos se tiene:

$$a_n(a-bi)^n + a_{n-1}(a-bi)^{n-1} + \dots + a_1(a-bi) + a_0 = 0$$

lo que demuestra que $\bar{r}=a-bi$ es una raíz de $P(x)$.

Observación. El Teorema 10.6 es válido sólo si los coeficientes a_i son números reales. Si los a_i son números complejos no se puede asegurar que si r es una raíz de $P(x)$, entonces $\bar{r}$ también lo es.

Veamos un ejemplo, sea: $P(x)=x^3+2ix^2-(1+i)x-7+6i$

Podemos probar que $r=2-i$ es una raíz de $P(x)$.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } P(2-i) &= (2-i)^3 + 2i(2-i)^2 - (1+i)(2-i) - 7 + 6i \\ &= (8-12i+6i^2-i^3) + 2i(4-4i+i^2) - (2-i-i^2) - 7 + 6i \\ &= (2-11i) + (8+6i) - (3+i) - 7 + 6i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien: } P(\bar{r}) &= P(2+i) = (2+i)^3 + 2i(2+i)^2 - (1+i)(2+i) - 7 + 6i \\ &= (8+12i+6i^2+i^3) + 2i(4+4i+i^2) - (2+3i+i^2) - 7 + 6i \\ &= (2+11i) + (-8+6i) - (1+3i) - 7 + 6i = -14+20i \neq 0 \end{aligned}$$

Luego, $\bar{r}=2+i$ no es raíz de $P(x)$.

Corolario 1. Todo polinomio real $P(x)$, con coeficientes reales y de grado impar debe tener por lo menos una raíz real.

En efecto, si $n=1$, entonces:

$$P(x) = a_0x + a_1, \quad a_0 \neq 0, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R} \quad + \quad x = -\frac{a_1}{a_0} \text{ es una raíz real de } P(x)=0.$$

Si $n \geq 3$ y $r_1=a+bi$, $b \neq 0$, es una raíz compleja de $P(x)$, por el Teorema 10.6, $r_2=a-bi$ también es raíz de $P(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Luego, por el teorema del factor: } P(x) &= (x-r_1)(x-r_2)Q(x) \\ &= (x^2-2ax+a^2-b^2)Q(x) \end{aligned}$$

donde $\text{gr}(Q)=n-2 \geq 1$, siendo $n-2$ impar por ser n impar.

Si razonamos por inducción podemos afirmar que $Q(x)$ tiene una raíz real que también es raíz de $P(x)$.

Corolario 2. Todo polinomio real $P(x)$ con coeficientes reales puede expresarse como producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, correspondiendo cada factor lineal a un cero real y cada factor cuadrático a un par de ceros complejos conjugados.

EJEMPLO 1. Hallar todas las raíces del polinomio $P(x)=x^4+x^3+x^2+11x+10$, sabiendo que una de sus raíces es $1+2i$.

Solución. Por el Teorema 10.6, si $r_1=1+2i$ es raíz de $P(x)$ + $r_2=1-2i$ también es raíz de $P(x)$.

Formando una ecuación cuadrática de raíces r_1 y r_2 se tiene:

$$S = r_1 + r_2 = 1+2i+1-2i = 2 \quad ; \quad P = (1+2i)(1-2i) = 5$$

Luego, si $D(x)=x^2-Sx+P$ + $D(x)=x^2-2x+5$

Dividiendo $P(x)$ entre $D(x)$ obtenemos el polinomio $Q(x)=x^2+3x+2$, cuyas raíces: $x=-2$ y $x=-1$ son también raíces de $P(x)$.

Por tanto, las cuatro raíces de $P(x)$ son: $1+2i$, $1-2i$, -2 y -1 .

EJEMPLO 2. Hallar un polinomio con coeficientes reales, de grado mínimo, que tenga como raíces $r_1=2$ y $r_2=2-3i$.

Solución. Por el Teorema 10.6, si $r_2=2-3i$ + $r_3=2+3i$

Por el teorema del factor: $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

$$+ P(x) = (x-2)(x-2+3i)(x-2-3i) = (x-2)(x^2-4x+13) = x^3-6x^2+21x-26$$

TEOREMA 10.7 Si un binomio irracional $a+\sqrt{b}$ es una raíz del polinomio real $P(x)$ con coeficientes racionales, entonces el binomio irracional $a-\sqrt{b}$ es también raíz de $P(x)$.

EJEMPLO 3. Hallar todas las raíces del polinomio $P(x)=x^4-9x^3+27x^2-33x+14$, sabiendo que $3+\sqrt{2}$ es una de sus raíces.

Solución. Por el Teorema 10.7, si $r_1=3+\sqrt{2}$ + $r_2=3-\sqrt{2}$ es también raíz de $P(x)$. Formamos un polinomio cuadrático con r_1 y r_2 :

$$S = r_1 + r_2 = (3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2}) = 6 \quad ; \quad P = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 7 \quad + \quad D(x)=x^2-6x+7$$

Dividiendo $P(x)$ entre $D(x)$ obtenemos el polinomio reducido: $Q(x)=x^2-3x+2$ cuyas raíces $x=1$ y $x=2$ son también raíces de $P(x)$.

Por lo tanto, las raíces de $P(x)$ son: $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, 1 y 2

EJEMPLO 4. Construir un polinomio con coeficientes reales, de grado mínimo, que tenga como raíces los números 1 , $1+\sqrt{5}$ y $3i$.

Solución. Sean $r_1=1$, $r_2=1+\sqrt{5}$ y $r_3=3i$. Ahora, r_2 y r_3 admiten conjugadas, entonces: $r_4=1-\sqrt{5}$ y $r_5=-3i$ + $gr[P(x)]=5$

$$\text{Luego: } P(x) = (x-1)(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})(x-3i)(x+3i) = x^5-3x^4+7x^3-23x^2-18x+36$$

EJEMPLO 5. Construir una ecuación de grado seis, entre cuyas raíces se encuentran los números: $1+i$, $1+\sqrt{2}$ y $1/2$.

Solución. Las conjugadas de $1+i$ y $1+\sqrt{2}$ son $1-i$ y $1-\sqrt{2}$, respectivamente. Como la ecuación buscada es de grado seis, las raíces serán:

$r_1=1+i$, $r_2=1-i$, $r_3=1+\sqrt{2}$, $r_4=1-\sqrt{2}$, $r_5=r_6=1/2$, es decir, $1/2$ es una raíz doble. Entonces: $(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)(x-r_5)(x-r_6) = 0$

$$\rightarrow (x-1-i)(x-1+i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x-1/2)^2 = 0$$

$$\rightarrow (x^2-2x+2)(x^2-2x-1)(4x^2-4x+1) = 0 \rightarrow 4x^6-20x^5+37x^4-32x^3+5x^2+6x-2=0$$

TEOREMA 10.8 (Regla de los signos de Descartes)

Si $P(x)=0$ es una ecuación entera con coeficientes reales y con raíces reales, entonces:

- El número de raíces positivas de $P(x)=0$ es igual al número de variaciones (V) que presentan los signos de los coeficientes de $P(x)$, o es menor que este número (V) en un número par.
- El número de raíces negativas de $P(x)=0$ es igual al número de variaciones (V) que presentan los signos de los coeficientes de $P(-x)$, o es menor que este número (V) en un número par.

Esta proposición, conocida como la "Regla de los signos de Descartes", también proporciona información acerca del número de raíces complejas. Sabemos que si el polinomio $P(x)$ es de grado n , entonces tiene exactamente n raíces por tanto, el número de raíces complejas es igual a n menos el número de raíces positivas y negativas.

EJEMPLO 6. Hallar toda la información posible acerca de la naturaleza de las raíces del polinomio $P(x)=x^3+5x^2-x^3+7x+2$.

Solución. Por la regla de los signos de Descartes, tenemos:

$$P(x) = x^3 + \underbrace{5x^2}_V - \underbrace{x^3}_V + 7x + 2 \quad (2 \text{ variaciones})$$

$$P(-x) = \underbrace{-x^3}_V + 5x^2 + \underbrace{x^3}_V - \underbrace{7x}_V + 2 \quad (3 \text{ variaciones})$$

Vemos que $P(x)$ tiene dos variaciones de signo, entonces la ecuación $P(x)=0$ tendrá, a lo más, 2 o 0 raíces positivas.

$P(-x)$ tiene tres variaciones de signo, entonces la ecuación $P(x)=0$ tendrá, a lo más, 3 o 1 raíces negativas.

Si designamos por C el número de raíces complejas, el cuadro adjunto ilustra las posibles combinaciones entre las raíces positivas, negativas y complejas. (La suma de cada fila debe ser igual al grado del polinomio).

+	-	C
2	3	4
2	1	6
0	3	6
0	1	8

EJEMPLO 7. Determinar el mínimo número de raíces complejas del polinomio

$$P(x) = 11x^9 + 5x^6 - 2x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 2$$

Solución. Según la regla de los signos de Descartes, se tiene:

$$P(x) = 11x^9 + \underbrace{5x^6}_V - \underbrace{2x^5}_V + 4x^3 + \underbrace{2x^2}_V - 6x - 2$$

$$P(-x) = -\underbrace{11x^9}_V + 5x^6 + \underbrace{2x^5}_V - \underbrace{4x^3}_V + 2x^2 + \underbrace{6x}_V - 2$$

a) Raíces reales positivas:

$P(x)$ tiene tres variaciones de signo.

Entonces, número de raíces positivas = 3 o 1

b) Raíces reales negativas:

$P(-x)$ tiene 4 variaciones de signo.

+ Número de raíces negativas = 4, 2 o 0

c) En el cuadro adjunto vemos que el polinomio

$P(x)$ tiene como mínimo 2 raíces complejas.

+	-	C
3	4	2
3	2	4
3	0	6
1	4	4
1	2	6
1	0	8

EJERCICIOS: Grupo 65

En los ejercicios siguientes, se dan una de las raíces del polinomio $P(x)$. Hallar las demás raíces.

1. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 14$, $x = 2 - i$

2. $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2x + 36$, $x = -2 + i\sqrt{5}$

3. $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 14x + 12$, $x = 1 - \sqrt{3}$

4. $P(x) = 6x^4 + 35x^3 - 49x^2 + 7x + 7$, $x = -3 + \sqrt{2}$

Construir la ecuación de menor grado, con coeficientes reales, que tengan las raíces indicadas.

5. $x = -1, 3, 1 + i\sqrt{3}$

6. $x = 2 + 4i, 2i$

7. $x = 2, -3, 2 - \sqrt{3}$

8. $x = 1/2, -2 + i, -1 + 2\sqrt{2}$

9. $x = 2 - i, 1 + \sqrt{2}, 2, -1$

10. $x = 1 + i\sqrt{3}, 4 + \sqrt{2}, 0, -1, -2$

Hallar toda la información acerca de la naturaleza de las raíces del polinomio dado, por medio de la regla de los signos de Descartes.

11. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 4x - 8$

13. $P(x) = 8x^7 + 4x^5 - 3x^3 + 5x^3 - 6x^2 + 3x - 2$

12. $P(x) = 2x^5 - 3x^6 - 9x^3 - x + 5$

14. $P(x) = 5x^9 - 2x^7 + 6x^5 + 2x^3 - 3x + 5$

15. Demostrar que el polinomio $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 8$ tiene por lo menos dos raíces complejas.

16. Demostrar que el polinomio $P(x) = 2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5$ tiene como mínimo cuatro raíces complejas.



10.8.4 RAICES RACIONALES DE UN POLINOMIO

TEOREMA 10.9 (Teorema de Gauss)

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$, un polinomio cuyos coeficientes son enteros. Si el número racional p/q , expresado en forma irreducible, es una raíz de $P(x)$, entonces p es el divisor exacto de a_n y q es un divisor exacto de a_0 .

Demostración. En efecto, como por hipótesis p/q es una raíz de $P(x)$, entonces $P(p/q) = 0$, esto es:

$$a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0 \quad (1)$$

Multiplicando por q^n , obtenemos:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0$$

Pasamos $a_n q^n$ al segundo miembro y dividiendo la igualdad resultante entre p se tiene:

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} q^{n-1} = -a_n \left(\frac{q^n}{p}\right)$$

Dado que cada a_i , p y q son enteros, el primer miembro de la igualdad es un entero y, por ende, lo es también el segundo miembro. Además, p y q son primos entre sí, de modo que p no es divisor de q^n ; luego, p es divisor exacto de a_n .

Si en la ecuación (1), pasamos al segundo miembro $a_n p^n$ y dividimos la igualdad resultante por q , obtenemos:

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} = -a_0 \left(\frac{p^n}{q}\right)$$

y por un razonamiento similar, concluimos que q es divisor exacto de a_0 .

EJEMPLO 1. Hallar todas las raíces del polinomio

$$P(x) = 12x^4 - 44x^3 + 37x^2 + 11x - 10$$

Solución. Divisores de $a_n = -10$: $p = \pm \{1, 2, 5\}$

Divisores de $a_0 = 12$: $q = \pm \{1, 2, 3, 4\}$

Probables raíces racionales: $r = \frac{p}{q} = \pm(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 2, \frac{2}{3}, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4})$

(Nótese que hay en total 20 probables raíces racionales)

Por el teorema del resto hacemos la prueba con $r = \pm 1$ y encontramos que:

$P(1) = 6 \neq 0$ y $P(-1) = 71 \neq 0$. Entonces ± 1 no son raíces de $P(x)$.

Mediante la división sintética hacemos la prueba con $x = 2$ y obtenemos:

	12	-44	37	11	-10
2		24	-40	-6	10
	12	-20	-3	5	0

Como el resto $R = P(2) = 0$, $x = 2$ es una raíz de $P(x)$.

$$\therefore P(x) = (x-2)(12x^3 - 20x^2 - 3x + 5) \quad (1)$$

Los otros factores probables de $P(x)$ lo son de: $Q(x) = 12x^3 - 20x^2 - 3x + 5$

Usando nuevamente la división sintética, encontramos que -2 y ± 5 no son raíces de $Q(x)$. Continuando el proceso, probamos con $x = 1/2$

	12	-20	-3	5
1/2		6	-7	-5
	12	-14	-10	0

$R = Q(1/2) = 0 \rightarrow x = 1/2$ es una raíz de $Q(x)$ y, por ende, de $P(x)$.

Luego, en (1): $P(x) = (x-2)(x-1/2)(12x^2 - 14x - 10) = (x-2)(2x-1)(6x^2 - 7x - 5)$

$$= (x-2)(2x-1)(2x+1)(3x-5)$$

$$\therefore \{x \in \mathbb{Q} | P(x) = 0\} = \{-1/2, 1/2, 5/3, 2\}$$

Corolario. Sea $P(x) = x^{n+a_1}x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, un polinomio mónico cuyos coeficientes son enteros. Si $a_1 = 1$, entonces cualquier número racional que sea raíz de $P(x)$ es un entero y un divisor de a_n .

EJEMPLO 2. Determinar todas las raíces enteras del polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$$

Solución. Los divisores de $a_n = 24$ son: $p = \pm \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$

Por el teorema del resto: $P(1)=0$ y $P(-1)\neq 0$. Entonces, mediante la división sintética con $x=1$, se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 2 & -13 & -14 & 24 \\ 1 & & 1 & 3 & -10 & -24 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & -24 & 0 \end{array}$$

$$+ P(x) = (x-1)(x^3+3x^2-10x-24) \quad (1)$$

Hagamos la prueba con $x=-2$ en $Q(x)=x^3+3x^2-10x-24$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -10 & -24 & \\ -2 & & -2 & -2 & 24 & \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 & \end{array}$$

Entonces en (1): $P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+x-12) = (x-1)(x+2)(x+4)(x-3)$

$$\therefore \{x \in \mathbb{C} \mid P(x)=0\} = \{-4, -2, 1, 3\}$$

Observaciones:

- (1) Si los coeficientes de un polinomio $P(x)$ son reales y positivos, la ecuación $P(x)=0$ no tiene raíces positivas.
- (2) Si un polinomio $P(x)$ tiene sus coeficientes reales y alternativamente positivos y negativos, entonces la ecuación $P(x)=0$ no tiene raíces negativas.

Por ejemplo: a) $2x^3+7x^2+7x+2=0$ no tiene raíces positivas

b) $3x^4-19x^3+29x^2-29x+6=0$ no tiene raíces negativas.

TEOREMA 10.10 (Teorema del Valor Intermedio)

Sea $P(x)$ una función continua en $[a, b]$, entonces:

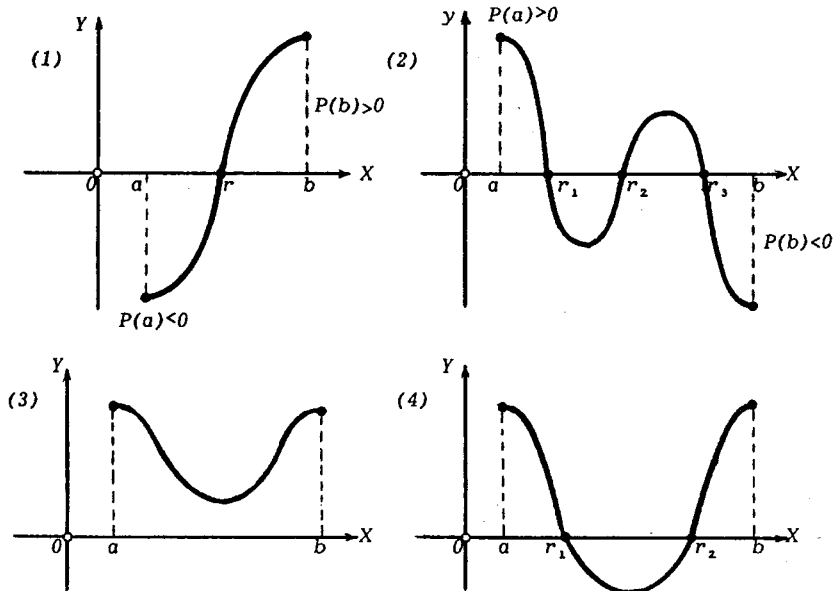
- i) Si $P(a)$ y $P(b)$ tienen signo diferentes, es decir, si $P(a)P(b) < 0$ entonces existe al menos un $r \in (a, b)$ o un número impar de ellas, tal que $P(r)=0$
- ii) Si $P(a)$ y $P(b)$ tienen el mismo signo, es decir, si $P(a)P(b) > 0$, ninguna raíz o un número par de ellas estarán en (a, b)

En la figura (1): $P(a) \cdot P(b) < 0 \rightarrow \exists r \in (a, b) \mid P(r)=0$

En la figura (2): $P(a) \cdot P(b) < 0 \rightarrow \exists r_1, r_2, r_3 \in (a, b) \mid P(r)=0$

En la figura (3): $P(a) \cdot P(b) > 0 \rightarrow \nexists r \in (a, b) \mid P(r)=0$

En la figura (4): $P(a) \cdot P(b) > 0 \rightarrow \exists r_1, r_2 \in (a, b) \mid P(r)=0$



EJEMPLO 3. Determinar todas las raíces de la ecuación:

$$6x^5 - 23x^4 + 30x^3 - 10x^2 - 16x + 8 = 0$$

Solución. Sea: $P(x) = 6x^5 - 23x^4 + 30x^3 - 10x^2 - 16x + 8$

Divisores de $a_n = 8$: $p = \pm(1, 2, 4, 8)$

Divisores de $a_0 = 6$: $q = \pm(1, 2, 3)$

Probables raíces racionales: $\frac{p}{q} = (1, 1/2, 1/3, 1/6, 2, 2/3, 4, 4/3, 8, 8/3)$

$P(0) = 8$ y $P(1) = -5 \rightarrow P(0) \cdot P(1) < 0 \rightarrow \exists r \in (0, 1) \mid P(r) = 0$

Las posibles raíces son: $r = 1/2, 1/3, 1/6, 2/3$

Hacemos la prueba con $r = 1/2$

	6	-23	30	-10	-16	8
1/2		3	-10	10	0	-8
	6	-20	20	0	-16	0

Luego, $r = 1/2$ es una raíz de $P(x) = 0$, y por el teorema del factor:

$$P(x) = (x - 1/2)(6x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 16) = (2x - 1)(3x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 8) \quad (1)$$

Haciendo la prueba con $r = 1/3$ y $r = 2/3$ en $Q(x) = 3x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 8$, encontramos que ninguna es raíz de $Q(x) = 0$.

Como $Q(0) = -8$ y $Q(-1) = 15 \rightarrow Q(0) \cdot Q(-1) < 0 \rightarrow \exists r \in (-1, 0) \mid Q(r) = 0$

Las posibles raíces racionales en $\langle -1, 0 \rangle$ son: $-2/3$, $-1/3$, $-1/2$

Hacemos la prueba con $r = -2/3$

-2/3	3	-10	10	0	-8
		-2	8	-12	8
	3	-12	18	-12	0

Luego, $r = -2/3$ es una raíz o $x + 2/3$ es un factor de $Q(x)$.

$$\rightarrow Q(x) = (x + 2/3)(3x^3 - 12x^2 + 18x - 12) = (3x + 2)(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$$

En (1): $P(x) = (2x - 1)(3x + 2)(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$ (2)

Siendo $Q_1(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ un polinomio mónico ($a_0 = 1$) de grado impar, debe tener por lo menos una raíz real, entera y positiva (los signos de los coeficientes van alternados). Entonces, hacemos la prueba con $r = 2$:

2	1	-4	6	-4
		2	-4	4
	1	-2	2	0

$$\rightarrow Q_1(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2); \text{ si } x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

Luego, en (2): $P(x) = (2x - 1)(3x + 2)(x - 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$

$$\therefore \{x \in \mathbb{C} | P(x) = 0\} = \{-2/3, 1/2, 2, 1-i, 1+i\}$$

EJEMPLO 4. Hallar las raíces del polinomio $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 15x + 3$

Solución. Divisores de $a_n = 3$: $p = \pm\{1, 3\}$

Divisores de $a_0 = 5$: $q = \pm\{1, 2, 3, 6\}$

Como los signos de los coeficientes de $P(x)$ son positivos, las raíces reales de $P(x) = 0$ deberán ser negativas.

Entonces, las probables raíces racionales son: $\frac{p}{q} = -\{1, 1/2, 1/3, 1/6, 3, 3/2\}$

$$P(0)=3 \text{ y } P(-1)=8 \rightarrow P(0) \cdot P(-1) > 0$$

Por el Teorema 10.10, ninguna raíz o un número par de ellas están en $\langle -1, 0 \rangle$

Usando la división sintética hacemos la prueba con $r = -1/2$ y $r = -1/3$

-1/2	3	5	19	15	3
		-3	-1	-9	-3
	6	2	18	6	0
-1/3		-2	0	-6	
	6	0	18	0	

$$\rightarrow P(x) = (x + 1/2)(x + 1/3)(6x^2 + 18) = (2x + 1)(3x + 1)(x^2 + 3)$$

$$\therefore \{x \in \mathbb{C} | P(x) = 0\} = \{-1/2, -1/3, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$$

10.9 ACOTACION DE RAICES REALES

Una importante cuestión en el estudio de las raíces reales de un polinomio es la acotación de las mismas, es decir, la determinación de un intervalo en donde se encuentran tales raíces.

Ilustraremos con un ejemplo el procedimiento a seguir para determinar dicho intervalo.

EJEMPLO 5. Dado el polinomio $P(x)=12x^3-8x^2-3x+2$, hallar el intervalo $\langle m, M \rangle$ tal que $m < r < M$, para toda raíz real r de $P(x)$.

Solución. El método a seguir es el de las divisiones sintéticas sucesivas.

Se comienza dividiendo $P(x)$ entre $x-1$, luego entre $x-2$, $x-3$, etc, hasta obtener un residuo positivo o cero.

Veamos que información arroja la división entre $x-1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & -8 & -3 & 2 \\ 1 & & 12 & 4 & 1 \\ \hline & 12 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\rightarrow P(x) = (x-1)(12x^2+4x+1)+3 \quad (1)$$

En seguida, dividimos el cociente $Q(x)=12x^2+4x+1$ entre $x-1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 12 & 4 & 1 \\ 1 & & 12 & 16 \\ \hline & 12 & 16 & 17 \end{array}$$

$$\rightarrow Q(x) = (x-1)(12x+16)+17 = (x-1)[12(x-1)+28]+17$$

$$\rightarrow Q(x) = 12(x-1)^2+28(x-1)+17$$

Sustituyendo en (1) obtenemos: $P(x)=12(x-1)^3+28(x-1)^2+17(x-1)+3$ (2)

En (2) se observa que todos los coeficientes de los binomios $(x-1)$ son positivos, entonces $P(x) > 0$, $\forall x \geq 1$. Luego, las raíces reales positivas de $P(x)$ no pueden ser mayores que 1. Es decir, $M=1$ es una cota superior de las raíces reales y positivas de $P(x)$.

Para determinar una cota inferior de las raíces reales negativas, hacemos la sustitución: $x=-y$ $\rightarrow P(-y) = 12(-y)^3-8(-y)^2-3(-y)+2 = -12y^3-8y^2+3y+2$

Interesa que el coeficiente de y^3 sea positivo, para ello hacemos:

$$\rightarrow F(y) = -P(-y) = 12y^3+8y^2-3y-2$$

En este caso corresponde calcular una cota superior de las raíces reales de $F(y)$. Comenzaremos dividiendo $F(y)$ entre $y-1$, luego entre $y-2$, $y-3$, etc, hasta obtener un residuo positivo o cero.

	12	8	-3	-2
1		12	20	17
	12	20	17	15

$$F(y) = (y-1)(12y^2+20y+17)+15$$

Como el resto es positivo, es conveniente continuar la división por $y-1$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} F(y) &= (y-1)[12(y-1)^2+44(y-1)+49]+15 \\ &= 12(y-1)^3+44(y-1)^2+49(y-1)+15 \end{aligned}$$

Donde se observa que: $F(y) > 0$, $\forall y > 1$. Como $F(y) = -P(-y) \rightarrow P(-y) < 0$, $\forall y > 1$
 Pero: $x = -y \rightarrow P(x) < 0$, $\forall x < -1$

Luego, las raíces negativas no deben ser menores que -1 , es decir, $m = -1$ es una cota inferior de las raíces reales negativas de $P(x)$.

Por tanto, el intervalo buscado es $<-1, 1>$.

En efecto, las raíces reales de $P(x) = 0$ son: $-1/2, 1/2, 2/3$ y todas satisfacen la propiedad:

$$-1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$$

Precisamos en este punto, lo que son las cotas superior e inferior de un conjunto.

DEFINICION. i) Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está **acotado superiormente** si existe un número $M \in \mathbb{R}$, llamado **cota superior**, con la propiedad de que:

$$a \leq M, \forall a \in A$$

ii) Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está **acotado inferiormente**, si existe un número $m \in \mathbb{R}$, llamado **cota inferior**, con la propiedad de que:

$$m \leq a, \forall a \in A$$

Existen varios criterios para determinar las cotas de las raíces reales de un polinomio. El criterio elegido en el ejemplo 5 es el más sencillo de aplicar y, además, el que proporciona la mejor cota.

TEOREMA 10.11 Dado un polinomio con coeficientes reales:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n > 0, \quad a_0 \neq 0$$

Si c es un número real positivo, tal que la división de $P(x)$ entre $x-c$ proporcionará un cociente con coeficientes no negativos b_j y residuo R , no negativo, tales que:

$$P(x) = a_0(x-c)^n + b_1(x-c)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(x-c) + R$$

entonces c es una cota superior de las raíces reales positivas de $P(x)$

Demostración. En efecto, por el método de la división sintética se tiene:

	a_0	a_1	$a_2 \dots a_{n-1}$	a_n
c		ca_0	cb_1	cb_{n-2}
	a_0	b_1	b_2	b_{n-1}
				$b_n = R$

donde $a_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y $R=b_n$ son números positivos.

Si designamos por $Q_1(x)$ el cociente, entonces:

$$Q_1(x) = a_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

de modo que: $P(x) = (x-c)Q_1(x) + R$ (1)

Dividiendo nuevamente $Q_1(x)$ entre $(x-c)$, se halla el cociente Q_2 y el residuo R_2 , entonces: $Q_1(x) = (x-c)Q_2(x) + R_2$

Por razonamiento inductivo, en la última división se tiene:

$$Q_{n-1}(x) = (x-c)a_0 + R_n$$

Sustituyendo estas igualdades sucesivamente en (1) obtenemos:

$$P(x) = a_0(x-c)^n + b_1(x-c)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(x-c) + R, \quad b_j \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Si los coeficientes b_j y R son todos positivos, se cumple que $P(x) > 0, \forall x > c$; luego, si $r \in \mathbb{R}$ es una raíz de $P(x)=0$, entonces $r \leq c$, es decir, c es una cota superior de las raíces reales positivas de $P(x)$, con lo queda demostrado el teorema.

TEOREMA 10.12 Dado un polinomio con coeficientes reales:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 > 0, \quad a_n \neq 0$$

Si c es un número real positivo tal que la división de $P(-x)$ entre $x-c$ proporciona un cociente con coeficientes positivos y un residuo positivo, entonces $-c$ es una cota inferior de las raíces negativas de $P(x)$.

La demostración de este teorema es una aplicación directa del teorema 10.11. Los dos teoremas anteriores se traducen en sendos criterios que permiten determinar las cotas superiores e inferiores de las raíces de los polinomios con coeficientes reales.

Criterio 1. Si c es un número real positivo tal que al efectuar la división sintética del polinomio $P(x)$, con coeficientes reales, entre el binomio $x-c$, todos los números que aparecen en la tercera fila son positivos, entonces c es una cota superior de las raíces positivas de $P(x)$.

Criterio 2. Si c es un número real positivo tal que al efectuar la división sintética del polinomio $P(x)$, con coeficientes reales, entre el binomio $x-c$, todos los números que aparecen en la tercera fila son positivos, entonces $-c$ es una cota inferior de las raíces negativas de $P(x)$.

EJEMPLO 6. Dada la ecuación: $18x^5 - 57x^4 + 125x^3 - 87x^2 - 43x + 20 = 0$

- a) Hallar la cota superior positiva y la cota inferior negativa.
 b) Presente el cuadro correspondiente al número de raíces positivas, negativas y complejas.
 c) Hallar todas las raíces de la ecuación.

Solución. a) Sea $P(x) = 18x^5 - 57x^4 + 125x^3 - 87x^2 - 43x + 20$

$$\rightarrow P(-x) = -18x^5 - 57x^4 - 125x^3 - 87x^2 + 43x + 20$$

$$\rightarrow P(y) = 18y^5 + 57y^4 + 125y^3 + 87y^2 - 43y - 20$$

Cota superior positiva: En primer lugar, tomemos $c=1$

	18	-57	125	-87	-43	20
1		18	-39	86	-1	-44
	18	-39	86	-1	-44	-24

El residuo $R=-14$ es un número negativo, entonces corresponde tomar un $c > 1$, que puede ser $c=2,3$, pero ninguno de estos sirve (verificar). Luego, si $c=4$

	18	-57	125	-87	-43	20
4		72	60	740	2512	9876
	18	15	185	653	2469	9896

El residuo $R=9896$ y los demás coeficientes son todos positivos. Luego, $c=4$ es una cota superior de las raíces reales positivas.

Cota inferior negativa. Basta hallar la cota superior de $P(y)$.

Probemos con $y=1$

	18	57	125	87	-43	-20
1		18	75	200	287	244
	18	75	200	287	244	224

El resto $R=224$ y los demás coeficientes resultaron positivos. Luego, $y=1$ es una cota superior de $P(y)$; pero como $y=-x \rightarrow m=x=-1$ es una cota inferior negativa de $P(x)$.

Hemos hallado así un intervalo $<-1,4>$ en donde deben estar ubicadas todas las raíces de $P(x)=0$.

b) Por la regla de Descartes, las variaciones de signo son:

$$P(x) = \underbrace{18x^3}_{+} - \underbrace{57x^1}_{-} + \underbrace{125x^3}_{+} - 87x^2 - \underbrace{43x}_{-} + 20$$

4 variaciones $\rightarrow$ Raíces reales (+): 4, 2 o 0

$$P(x) = -18x^3 - 57x^1 - 125x^3 - \underbrace{87x^2}_{+} + 43x + 20$$

1 variación $\rightarrow$ Raíces reales (-): 1

+	-	C
4	1	0
2	1	2
0	1	4

c) Divisores de $a_n = 20$: $p = \pm(1, 2, 4, 5, 10, 20)$

Divisores de $a_0 = 18$: $q = \pm(1, 2, 3, 6, 9, 18)$

Probables raíces racionales: $\frac{p}{q} = \pm(1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/18, 2, 2/3, 2/9, 4/3, 4/9, 5/2, 5/3, 5/6, 5/9, 5/18, 10/9, 20/9)$

$$P(0) = 20, \quad P(1) = -24, \quad P(2) = 250, \quad P(-1) = -224$$

Por el teorema del valor intermedio: $P(0) \cdot P(1) < 0 \rightarrow \exists r_1 \in (0,1) \mid P(r_1) = 0$

$$P(1) \cdot P(2) < 0 \rightarrow \exists r_2 \in (1,2) \mid P(r_2) = 0$$

$$P(-1) \cdot P(0) < 0 \rightarrow \exists r_3 \in (-1,0) \mid P(r_3) = 0$$

Por el proceso de la división sintética verificar que con: $x = 1/3 \in (0,1)$, $x = 4/3 \in (1,2)$, $x = -1/2 \in (-1,0)$, los restos respectivos son ceros.

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } P(x) &= (x - 1/3)(x - 4/3)(x + 1/2)(18x^2 - 36x + 90) \\ &= (3x - 1)(3x - 4)(2x + 1)(x^2 - 2x + 5) \\ \therefore \{x \in \mathbb{C} \mid P(x) = 0\} &= \{-1/2, 1/3, 4/3, 1-2i, 1+2i\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 7. Dada la ecuación $12x^6 + 32x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 32x^2 + 3x - 5 = 0$

a) Aplicando la regla de los signos de Descartes, señale cuáles son todas las posibilidades de las raíces positivas, negativas y complejas.

b) Factorizar la ecuación y de allí, hallar las raíces.

Solución. a) Sea $P(x) = 12x^6 + 32x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 32x^2 + 3x - 5$

$$\rightarrow P(-x) = \underbrace{12x^6}_{+} - \underbrace{32x^5}_{-} + \underbrace{3x^4}_{+} - \underbrace{7x^3}_{-} + \underbrace{32x^2}_{+} - \underbrace{3x}_{-} - 5$$

Una variación de $P(x) \rightarrow$ Raíces (+): 1

5 variaciones en $P(-x) \rightarrow$ Raíces (-): 5, 3 o 1

Luego, todas las posibilidades de las raíces positivas negativas y complejas se dan en tabla adjunta.

+	-	C
1	5	0
1	3	2
1	1	4

b) Divisores de $a_n = 5$: $p = \pm(1, 5)$

Divisores de $a_0 = 12$: $q = \pm(1, 2, 3, 4, 6, 12)$

Luego, el conjunto de las posibles raíces racionales de la ecuación es:

$$\frac{p}{q} = \pm \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12} \right\}$$

$$c) P(0)=-5, P(1)=84 \rightarrow P(0) \cdot P(1) < 0 \rightarrow \exists r \in (0,1) \mid P(r)=0$$

Como $P(-1)=0$, una raíz positiva en $x \in (0,1)$ puede ser: $1/3, 1/2, 1/4, 1/6$

Por el método de la división sintética probamos con $x=1/3$ y $x=-1$

	12	32	3	7	32	3	-5
1/3		4	12	5	4	12	5
	12	36	15	12	36	15	0
-1		-12	-24	9	-21	-15	
	12	24	-9	21	15	0	

$$\begin{aligned} + P(x) &= (x-1/3)(x+1)(12x^3+24x^2-9x^2+21x+15) \\ &= (3x-1)(x+1)(4x^3+8x^2-3x^2+7x+5) \end{aligned} \quad (1)$$

Dado que en el polinomio $Q(x)=4x^3+8x^2-3x^2+7x+5$, $a_0=5$, las otras raíces racionales y negativas de $P(x)$ podrían ser: $-1/2, -1/4, -5/2, -5/4$

Verificar que con $x=-1/2$ y $x=-5/2$, los respectivos residuos son ceros.

$$+ Q(x) = (x+1/2)(x+5/2)(4x^2-4x+4) = (2x+1)(2x+5)(x^2-x+1)$$

Luego, en (1): $P(x) = (3x-1)(x+1)(2x+1)(2x+5)(x^2-x+1)$

$$\therefore \{x \in \mathbb{C} \mid P(x)=0\} = \{-5/2, -1, -1/2, 1/3, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

EJEMPLO 8. Dada la ecuación $9x^3-15x^2-29x^2+59x^2-28x+4=0$

- Hallar el intervalo $\langle m, M \rangle$ donde deben estar ubicadas las raíces de la ecuación.
- Señalar las posibilidades del número de raíces positivas, negativas y complejas.
- Factorizar la ecuación y hallar sus raíces.

Solución. a) Sea: $P(x) = 9x^3-15x^2-29x^2+59x^2-28x+4$

$$+ P(-x) = -9x^3-15x^2+29x^2+59x^2+28x+4$$

$$+ P(y) = 9y^3+15y^2-29y^2-59y^2-28y-4$$

Cota superior positiva: Las pruebas con $c=1$ y $c=2$ no sirven (verificar), entonces, corresponde tomar $c=3$

	9	-15	-29	59	-28	4
3		27	36	21	240	636
	9	12	7	80	212	640

Siendo los coeficientes positivos y el residuo $R=640$ positivo, la cota superior positiva es $c=M=3$

Cota inferior negativa. Las pruebas con $c=1$ y $c=2$ no sirven (verificar)

Entonces para $c=3$ en $P(y)$ tendremos:

	9	15	-29	-59	-28	-4
3		27	126	291	696	2004
	9	42	97	232	668	2000

Como en la tercera fila, todos los números son positivos, entonces una cota superior positiva para $P(y)$ es $c=3$, pero como $y=-x \rightarrow m=c=3$ es una cota inferior negativa para $P(x)=0$. Por tanto: $x \in \langle -3, 3 \rangle$.

b) Vemos que en $P(x)$ hay 4 variaciones de signo y en $P(-x)$ una variación de signo.

Entonces: Número de raíces reales positivas = 4, 2 o 0

Número de raíces reales negativas = 1

El cuadro adjunto muestra todas las posibilidades del número de raíces positivas, negativas y complejas.

+	-	C
4	1	0
2	1	2
0	1	4

c) Divisores de $a_n=4$: $p = \pm(1, 2, 4)$

Divisores de $a_0=9$: $q = \pm(1, 3, 9)$

Probables raíces racionales: $\frac{p}{q} = \pm \{1, 1/3, 1/9, 2, 2/3, 2/9, 4/3, 4/9\}$

Como $P(1)=P(2)=0 \rightarrow r=1$ y $r=2$ son raíces de $P(x)$, luego, por el proceso de la división sintética se deduce que:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(9x^3+12x^2-11x+2) \quad (1)$$

En el polinomio $Q(x)=9x^3+12x^2-11x+2$, $a_0=9$ y $a_n=2$. Luego, las otras posibles raíces de $P(x)$ serían: $\pm(1/3, 1/9, 2/3)$

Probando dos veces con $1/3$ mediante la división sintética, se deduce que:

$$Q(x) = (x-1/3)(x-1/3)(9x+18) = (3x-1)^2(x+2)$$

Sustituyendo en (1): $P(x) = (x-1)(x-2)(3x-1)^2(x+2)$

$$\therefore \{x \in \mathbb{Q} | P(x)=0\} = \{-2, 1/3, 1/3, 1, 2\}$$

EJERCICIOS: Grupo 66

En los ejercicios del 1 al 10, se dan los polinomios $P(x)$, para los cuales se pide determinar: a) El número de raíces positivas, negativas y complejas b) Las posibles raíces racionales. c) El conjunto solución de $P(x)=0$.

1. $P(x)=6x^5-5x^4+4x^3-4x^2-2x+1$

4. $P(x)=12x^5-40x^4-48x^3+57x^2+20x-3$

2. $P(x)=x^5-2x^4-4x^3+14x^2-33x^2+60x-36$

5. $4x^5+21x^4-24x^3-6x^2+5 = P(x)$

3. $P(x)=2x^5-7x^4-35x^3+13x^2+3$

6. $P(x)=x^5-3x^4+4x^3-6x^2+3$

7. $P(x) = 35x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x$

9. $P(x) = 9x^5 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30$

8. $P(x) = 2x^5 + 3x^3 - 10x^2 - 12x + 8$

10. $P(x) = 4x^5 - 16x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 13x - 3$

En los ejercicios siguientes se dan la ecuación y una de sus raíces. Hallar las demás raíces.

11. $3x^6 - 19x^5 + 45x^4 - 49x^3 + 18x^2 + 10x - 4 = 0$, $x = 1 - i$

12. $6x^6 + 11x^5 - 34x^4 - 107x^3 - 32x^2 + 46x + 20 = 0$, $x = -2 + i$

13. $3x^5 - 14x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 10x - 4 = 0$, $x = 1 - i\sqrt{3}$

14. Descomponer el polinomio $P(x) = 12x^5 + 4x^4 + 105x^3 + 35x^2 - 27x - 9$ en sus factores lineales, sabiendo que una de las raíces de $P(x) = 0$ es $3i$.

15. Dado el polinomio $P(x) = 8x^3 - 14x^2 - 79x + 105$, probar por dos métodos distintos y sin resolver la ecuación $P(x) = 0$, que todas sus raíces son simples (Sug. Tabular $P(x)$ en $x \in [-3, 4]$; como primer método aplique el T.V.I.; como segundo método aplique la regla de Descartes)

16. Dada la ecuación: $10x^8 - 8x^7 - 13x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 15 = 0$

a) Aplicar la regla de los signos de Descartes y tabular el conjunto de posibles raíces racionales.

b) Usando el T.V.I. garantizar la existencia de raíces positivas en $\langle 0, 1 \rangle$ y $\langle 1, 2 \rangle$. Como afecta esto a la tabulación dada por a).

c) Se sabe que al dividir (en forma sintética) un polinomio entre $x - r$, con $r < 0$, los coeficientes del cociente, incluyendo el residuo, tienen signos alternados, entonces no hay raíces negativas menores que r . Aplicar este criterio dado con $r = -1$. Interpretar el resultado obtenido y explicar como afecta al conjunto de posibles raíces racionales.

En los ejercicios siguientes, se dan las ecuaciones $P(x) = 0$, para las cuales se pide determinar: a) El número de raíces positivas, negativas y complejas b) Todas las posibles raíces racionales de la ecuación. c) Las cotas superior positiva e inferior negativa. d) El conjunto solución de la ecuación.

17. $12x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 14x^2 - 34x + 12 = 0$

22. $x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24 = 0$

18. $12x^5 - 44x^4 + 37x^3 + 11x - 10 = 0$

23. $12x^6 - 28x^5 + 21x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 13x - 6 = 0$

19. $8x^5 - 62x^4 + 115x^3 - 28x^2 + 42x - 135 = 0$

24. $6x^5 + x^4 + 2x^3 + 41x^2 + 22x - 12 = 0$

20. $6x^5 - 19x^4 + 20x^3 - 12x^2 - x + 2 = 0$

25. $8x^5 - 12x^4 - 58x^3 + 75x^2 + 50 = 0$

21. $24x^6 - 74x^5 + 133x^4 - 145x^3 + 81x^2 - 21x + 2 = 0$



10.10 RELACION ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES

TEOREMA 10.13 Si $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las n raíces de la ecuación mónica de grado n :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

entonces las raíces y los coeficientes están relacionados por las siguientes igualdades:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -a_1 \quad (\text{Suma de las raíces})$$

$$S_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = a_2 \quad (\text{Suma de los productos de las raíces tomados 2 a 2})$$

$$S_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -a_3 \quad (\text{Suma de los productos de las raíces tomadas 3 a 3})$$

$\vdots$

$$S_n = r_1 r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^n a_n$$

Demostración. En efecto dado que:

$$\begin{aligned} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n &= (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) \\ &= x^n - (r_1 + r_2 + \dots + r_n) x^{n-1} + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n) x^{n-2} + \dots \\ &= x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n S_n \end{aligned}$$

Identificando coeficientes de potencias iguales de x , se tiene:

$$a_1 = -S_1 \rightarrow S_1 = -a_1 \leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i = -a_1$$

$$a_2 = S_2 \rightarrow S_2 = a_2 \leftrightarrow \sum_{i < j}^n r_i r_j = a_2$$

$$a_3 = -S_3 \rightarrow S_3 = -a_3 \leftrightarrow \sum_{i < j < k}^n r_i r_j r_k = -a_3$$

$\vdots$

$$a_n = (-1)^n S_n \rightarrow S_n = (-1)^n a_n \leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i = (-1)^n a_n$$

Nota

Si el coeficiente de x^n es a_0 , entonces la ecuación se escribe:

$$x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

Entonces: $S_1 = -\frac{a_1}{a_0}$, $S_2 = \frac{a_2}{a_0}$, $S_3 = -\frac{a_3}{a_0}$, $S_n = (-1)^n \left(\frac{a_n}{a_0}\right)$

EJEMPLO 1. Dado el polinomio $P(x) = 24x^3 + 46x^2 + 9x - 9$, resolver la ecuación $P(x) = 0$, sabiendo que una de las raíces es el doble de la otra.

Solución. Sean las raíces: a , $2a$, b

Entonces, según el teorema 10.13, tenemos:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0} \rightarrow a+2a+b = -\frac{46}{24} \rightarrow 3a+b = -\frac{23}{12} \quad (1)$$

$$S_2 = \frac{a_2}{a_0} \rightarrow 2a^2+3ab = \frac{9}{24} \rightarrow a(2a+3b) = \frac{3}{8} \quad (2)$$

$$S_3 = (-1)^3 \frac{a_3}{a_0} \rightarrow 2a^2b = -\frac{9}{24} \rightarrow 2a^2b = \frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\text{De (1) y (2) obtenemos: } 56a^2+46a+3=0 \leftrightarrow a_1=-3/4 \text{ o } a_2=-1/14$$

$$\leftrightarrow b_1=1/3 \text{ o } b_2=-143/84$$

Se encontrará por tanteos que los valores de $a_2=-1/14$ y $b_2=-143/84$ no satisfacen (3).
 $\therefore C.S = \{-3/4, -3/2, 1/3\}$

EJEMPLO 2. Expresar por extensión el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - (3k+4)x^2 + (k+1)^2 = 0, k \in \mathbb{R}\}, \text{ sabiendo que sus elementos}$$

están en progresión aritmética.

Solución. Sean los elementos de A: $a-3r$, $a-r$, $a+r$, $a+3r$

Por las relaciones entre las raíces y los coeficientes tenemos:

$$\begin{aligned} \text{a) } (a-3r)+(a-r)+(a+r)+(a+3r) &= -\frac{a_1}{a_0} \rightarrow 4a = -\frac{0}{1} \rightarrow a=0 \\ &\rightarrow A = \{-3r, -r, r, 3r\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-3r)(-r)+(-3r)(r)+(-3r)(3r)+(-r)(r)+(-r)(3r)+(r)(3r) &= \frac{a_2}{a_0} \\ &\rightarrow -10r^2 = -(3k+4) \rightarrow 10r^2 = 3k+4 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{c) } (-3r)(-r)(r)(3r) = (-1)^4 \frac{a_3}{a_0} \rightarrow 9r^4 = (k+1)^2 \rightarrow r^2 = \pm \left(\frac{k+1}{3}\right) \quad (3)$$

$$\text{De (2) y (3) obtenemos: } (k=2 \wedge r=\pm 1) \vee (k=-22/19 \wedge r=\pm 1/\sqrt{19})$$

$$\text{Por tanto, en (1): } A = \{-3, -1, 1, 3\} \text{ o } A = \{-3/\sqrt{19}, -1/\sqrt{19}, 1/\sqrt{19}, 3/\sqrt{19}\}$$

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación $3x^3+kx^2-7x+3=0$ y hallar el valor de k si las raíces, en cierto orden, están en progresión geométrica.

Solución. Sean las raíces en P.G.: $\frac{a}{r} : a : ar$

Por las relaciones entre raíces y coeficientes se tiene:

$$\text{a) } \frac{a}{r} + a + ar = -\frac{k}{3} \rightarrow a\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = -\frac{k}{3} \quad (1)$$

$$\text{b) } \left(\frac{a}{r}\right)(a) + \left(\frac{a}{r}\right)(ar) + (a)(ar) = -\frac{7}{3} \rightarrow a^2\left(\frac{1+r+r^2}{r}\right) = -\frac{7}{3} \quad (2)$$

$$\text{c) } \left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1 \rightarrow a^3 = -1 \rightarrow a = -1.$$

Sustituyendo $a=-1$ en (1) y (2), se obtiene $k=-7$

$$\text{Luego, en (1): } 3r^2+10r+3=0 \leftrightarrow r=-3 \text{ o } r=-1/3 \rightarrow C.S = \{1/3, -1, 3\}$$

EJEMPLO 4. Dada la ecuación x^3+px+q cuyas raíces son a, b y c , hallar:

$$a^3+b^3+c^3.$$

Solución: Según las relaciones entre coeficientes y raíces se tiene:

$$a+b+c=0, \quad ab+bc+ac=p, \quad abc=-q$$

$$\text{Si } x_1=a, \quad x_2=b, \quad x_3=c \rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i = a+b+c=0$$

$$\text{Como: } a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) \rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i^2 = (0)^2 - 2(p) = -2p$$

$$\text{Si } x^2=-px-q \rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i^3 = -p \sum_{i=1}^3 x_i - \sum_{i=1}^3 q = -p(0) - 3q = -3q$$

$$\begin{aligned} x^2 &= -px - q \rightarrow x^3 = -px^2 - qx \rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i^3 = -p \sum_{i=1}^3 x_i^2 - q \sum_{i=1}^3 x_i \\ &\rightarrow a^3+b^3+c^3 = -p(-3q) - q(2p) = 5pq \end{aligned}$$

Nota

Para un polinomio mónico: $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \psi$ cuyas raíces son a, b, c y d , se cumplen las siguientes relaciones:

$$a + b + c + d = \alpha$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = \beta$$

$$abc+abd+acd+bcd = \gamma$$

$$abcd = \psi$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{\psi}$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \alpha^2 - 2\beta$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^4 = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\psi$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^5 = \alpha^5 - 5\alpha^3\beta + 5\alpha\beta^2 - 5\beta\gamma - 5\alpha\psi$$

EJEMPLO 5. Hallar cuatro números cuya suma es 2, la suma de sus cuadrados es 30, la suma de sus cubos es 44 y la suma de las cuartas potencias es 354.

Solución Sean a, b, c y d los números buscados y que las raíces de la ecuación:

$$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \psi = 0 \quad (1)$$

Según las relaciones entre coeficientes y raíces tenemos:

$$a) \quad a+b+c+d = \alpha \rightarrow \alpha=2$$

$$c) \quad abc+abd+acd+bcd = \gamma$$

$$b) \quad ab+ac+ad+bc+bd+cd = \beta$$

$$d) \quad abcd = \psi$$

$$\text{Si } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \alpha^2 - 2\beta \rightarrow 30 = (2)^2 - 2\beta \rightarrow \beta = -13$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma \rightarrow 44 = 8 + 78 + 3\gamma \rightarrow \gamma = -14$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\psi \rightarrow 354 = 16 + 208 - 112 + 338 - 4\psi \rightarrow \psi = 24$$

Luego, en (1): $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$

Por el método de la división sintética: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=0$

Por tanto, los números son: $-3, -1, 2$ y 4

EJEMPLO 6. Dada la ecuación $x^3+2x^2-2x+1=0$ cuyas raíces son a, b y c ; hallar otra ecuación entera que tenga como raíces: a^3+1, b^3+1 y c^3+1 .

Solución. Por el teorema 10.13: $a+b+c = -2$ (1)

$$ab+ac+bc = -2 \quad (2)$$

$$abc = -1 \quad (3)$$

Sea la ecuación buscada: $y^3-Ay^2+By-C = 0$

donde: $A = (a^3+1)+(b^3+1)+(c^3+1) = a^3+b^3+c^3+3$

$$B = (a^3+1)(b^3+1)+(a^3+1)(c^3+1)+(b^3+1)(c^3+1) = (ab)^3+(ac)^3+(bc)^3+2(a^3+b^3+c^3)+3$$

$$C = (a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) = (abc)^3+(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3+(a^3+b^3+c^3)+1$$

Según las ecuaciones (1), (2) y (3) se tiene:

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) \rightarrow \Sigma x^2 = (-2)^2 - 2(-2) = 8$$

$$x^3+2x^2-2x+1=0 \rightarrow \Sigma x^3 = -2\Sigma x^2 + 2\Sigma x - 3 = -2(8) + 2(-2) - 3 = -23$$

$$\text{Como } abc = -1 \rightarrow ab = -\frac{1}{c}, \quad bc = -\frac{1}{a}, \quad ac = -\frac{1}{b} \quad (4)$$

$$\text{Si } x^3+2x^2-2x+1=0 \rightarrow \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + 1 = 0 \rightarrow \Sigma(1/x^3) = 2\Sigma(1/x^2) - 2\Sigma(1/x) - 3 \quad (5)$$

$$\text{Pero: } \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{c+a+b}{abc}\right) = (2)^2 - 2\left(\frac{-2}{-1}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Luego, en (5): } \Sigma(1/x^3) = 2(0) - 2(2) - 3 = -7$$

Finalmente, sustituyendo en A, B y C, se tiene: $A = -23+3 = -20$

$$B = \left(-\frac{1}{c}\right)^3 + \left(-\frac{1}{b}\right)^3 + \left(-\frac{1}{a}\right)^3 + 2(a^3+b^3+c^3)+3 = -(-7) + 2(-23)+3 = -36$$

$$C = (-1) + (7) + (-23) + 1 = -16$$

Por tanto, la ecuación buscada es: $y^3+20y^2-36y+16=0$

EJEMPLO 7. Sean a, b, c y d cuatro números no nulos cuya suma es cero. Demostrar que: $6(a^3+b^3+c^3+d^3)=5(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^3+b^3+c^3+d^3)$

Demostración. En efecto, sea la ecuación: $x^4-\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+\psi = 0$, con raíces: a, b, c y d . De las relaciones entre coeficientes y raíces obtenemos: $a+b+c+d = \alpha \rightarrow \alpha=0$ (condición del problema)

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = \beta, \quad abc+abd+acd+bcd = \gamma, \quad abcd = \psi$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} &= \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Psi}{\Psi} ; \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = \Sigma(x^2) = a^2-2\beta \rightarrow \Sigma x^2 = -2\beta \\
 x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \psi &= 0 \rightarrow x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma + \frac{\psi}{x} = 0 \rightarrow \Sigma x^3 = \alpha \Sigma x^2 - \beta \Sigma x + \gamma + \psi \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\rightarrow \Sigma x^3 = 0(-2\beta) - \beta(0) + 4\gamma - \psi\left(\frac{\Psi}{\Psi}\right) \rightarrow \Sigma x^3 = 3\gamma \\
 x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \psi &= 0 \rightarrow \Sigma x^4 = \alpha \Sigma x^3 - \beta \Sigma x^2 + \gamma \Sigma x - \psi = 0(3\gamma) - \beta(-2\beta) + \gamma(0) - \psi = 2\beta^2 - \psi \\
 x^5 - \alpha x^4 + \beta x^3 - \gamma x^2 + \psi x &= 0 \rightarrow \Sigma x^5 = \alpha \Sigma x^4 - \beta \Sigma x^3 + \gamma \Sigma x^2 - \psi \Sigma x \\
 &\rightarrow \Sigma x^5 = 0(2\beta^2 - \psi) - \beta(3\gamma) + \gamma(-2\beta) - \psi(0) = -5\beta\gamma \\
 + 6\Sigma x^5 &= 6(-5\beta\gamma) = 5(-2\beta)(3\gamma) \rightarrow 6\Sigma x^5 = 5(\Sigma x^2)(\Sigma x^3) \\
 \therefore 6(a^3+b^3+c^3+d^3) &= 5(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^3+b^3+c^3+d^3)
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. Dada la ecuación $x^3+px^2+qx+r=0$, cuyas raíces son a, b y c , hallar el valor de la expresión:

$$E = \frac{1}{(a-p)^2(b-p)(c-p)} + \frac{1}{(b-p)^2(a-p)(c-p)} + \frac{1}{(c-p)^2(a-p)(b-p)}$$

Solución.
$$E = \frac{(b-p)(c-p) + (a-p)(c-p) + (a-p)(b-p)}{(a-p)^2(b-p)^2(c-p)^2}$$

$$= \frac{3p^2+bc-p(bc+ac-p(a+c))+ab-p(a+b)}{[abc-p(ab+bc+ac)+p^2(a+b+c)-p^3]^2} \quad (1)$$

Por las relaciones entre coeficientes y raíces se tiene:

$$a+b+c = -p \rightarrow b+c = -(p+a) ; \quad ab+ac+bc = q$$

$$abc = -r \rightarrow bc = -\frac{r}{a} ; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = -\frac{q}{r}$$

Luego, en (1):
$$E = \frac{3p^2 - \frac{r}{a} + p(p+a) - \frac{r}{b} + p(p+b) - \frac{r}{c} + p(p+c)}{[-r-p(q)+p^2(-p)-p^3]^2}$$

$$E = \frac{3p^2 - r\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + p(3p+a+b+c)}{(-r-pq-2p^3)^2} = \frac{3p^2 - r(-q/r) + p(3p-p)}{(r+pq+2p^3)^2}$$

$$\therefore E = \frac{5p^2+q}{(r+pq+2p^3)^2}$$

EJEMPLO 9. Hallar los valores reales de p y q para los cuales las ecuaciones: $x^3+px^2+18=0$ y $x^3+qx+12=0$ tienen dos raíces comunes y hallar dichas raíces.

Solución. Sean: a, b y c las raíces de $x^3+px^2+18=0$

a, b y d las raíces de $x^3+qx+12=0$

Por las relaciones entre coeficientes y raíces en ambas ecuaciones se tiene:

$$a+b+c = -p \quad a+b+d = 0 \rightarrow c-d = -p \quad (1)$$

$$ab+ac+bc=0 \wedge ab+ad+bd=q \quad ; \quad abc=18 \wedge abd=12 \rightarrow c = (3/2)d \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $d=-2p$, $c=-3p$

$$\text{Si } a+b+d=0 \rightarrow a+b=-d \rightarrow a+b=2p \quad (3)$$

$$abc = 18 \rightarrow ab = \frac{18}{c} = \frac{18}{-3p} \rightarrow ab = -\frac{6}{p} \quad (4)$$

$$\text{Si } ab+bc+ac=0 \rightarrow ab+c(a+b)=0 \rightarrow -\frac{6}{p} + (-3p)(2p)=0, \text{ de donde: } p=-1$$

$$\text{Entonces: } d=2, c=3. \text{ En (3): } a+b=-2 \wedge ab=6 \rightarrow y^2+2y+6=0 \leftrightarrow y=-1 \pm \sqrt{1-6}$$

$$\rightarrow a=-1+i\sqrt{5}, b=-1-i\sqrt{5}$$

$$q=ab+ad+bd \rightarrow q = 6+d(a+b) = 6+2(-2) = 2$$

$$\therefore p=-1, q=2, a=-1+i\sqrt{5}, b=-1-i\sqrt{5}, c=3, d=2$$

EJEMPLO 10. Usando las relaciones entre coeficientes y raíces, resolver la ecuación $z^3-(8+i)z^2+4(6+i)z-24+6i=0$, sabiendo que el afijo de una de sus raíces se halla sobre la bisectriz del primer cuadrante.

Solución. Sean las raíces: $z_1=x+xi$, $z_2=a+bi$, $z_3=c+di$, donde el afijo de z_1 está sobre la bisectriz del primer cuadrante.

$$a) x + xi + a + bi + c + di = 8+i \leftrightarrow \begin{cases} x+a+c = 8 \\ x+b+d = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$b) (x+xi)(a+bi)+(x+xi)(c+di)+(a+bi)(c+di) = 24+4i$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} ax-bx+cx-dx+ac-bd = 24 \\ ax+bx+cx+dx+ad+bc = 4 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

$$c) (x+xi)(a+bi)(c+di) = 24-6i \leftrightarrow \begin{cases} acx-bcx-adx-bdx = 24 \\ adx-bdx+acx+bcx = -6 \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

$$\text{Restando (1)-(2): } a-b+c-d=7. \text{ En (3): } x(a-b+c-d)+ac-bd=24 \rightarrow 7x+ac-bd=24$$

$$\rightarrow ac-bd=24-7x$$

$$\text{Sumando (5)+(6): } 2acx-2bdx=18 \rightarrow x(ac-bd)=9 \rightarrow x(24-7x)=9$$

$$\text{de donde: } 7x^2-24x+9=0 \leftrightarrow x=3 \text{ o } x=3/7. \text{ Luego: } z_1=3+3i \text{ o } z_1=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}i$$

Por el proceso de la división sintética, se tiene:

1	-8-i	24+4i	-24+6i
3+3i	3+3i	-21-9i	24-6i
1	-5+2i	3-5i	0

$$\text{Para } z_1 = \frac{3}{7} + \frac{3}{7}i, R = P\left(\frac{3}{7} + \frac{3}{7}i\right) \neq 0$$

$$\rightarrow z^2+(-5+2i)z+(3-5i)=0 \leftrightarrow z = \frac{5-2i \pm \sqrt{(5-2i)^2-4(3-5i)}}{2} = \frac{5-2i \pm 3}{2}$$

$$\leftrightarrow z = 4-i \text{ o } z = 1-i$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{3+3i, 4-i, 1-i\}$$

EJEMPLO 11. Las raíces de $x^6+4x^5-2x^4+3x^3-3x^2+2=0$ son a_i , $1 \leq i \leq 6$. Usando solamente relaciones entre coeficientes y raíces, hallar:

$$S = \sum_{k=1}^6 \left[\sum_{i=1}^6 \left(\frac{a_k^2}{a_i} + \frac{a_i^2}{a_k} \right) \right]$$

Solución. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = -4$

$$a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\dots+a_5a_6 = -2$$

$$a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_2a_5+\dots+a_5a_6a_3 = 0$$

$$a_1a_2a_3a_4+a_1a_2a_3a_5+a_1a_2a_3a_6+\dots+a_5a_6a_3a_4 = 3$$

$$a_1a_2a_3a_4a_5+a_1a_2a_3a_4a_6+a_1a_2a_3a_5a_6+\dots+a_2a_3a_4a_5a_6 = 3$$

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 2$$

$$+ \sum_{k=1}^6 \left[\sum_{i=1}^6 \left(\frac{a_k^2}{a_i} + \frac{a_i^2}{a_k} \right) \right] = \sum_{k=1}^6 \left[a_k^2 \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1}{a_i} \right) + \frac{1}{a_k} \sum_{i=1}^6 (a_i^2) \right]$$

$$+ S = \sum_{k=1}^6 \left[a_k^2 \left(\frac{a_1a_2a_3a_4a_5+a_1a_2a_3a_4a_6+a_1a_2a_3a_5a_6+\dots}{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} \right) + \frac{1}{a_k} \left((a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2 - 2(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\dots) \right) \right]$$

$$+ S = \sum_{k=1}^6 \left[a_k^2 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{a_k} \left((-4)^2 - 2(-2) \right) \right] = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^6 a_k^2 + 20 \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{a_k} \right)$$

$$\therefore S = \frac{3}{2}(20) + 20\left(\frac{3}{2}\right) = 60$$

EJERCICIOS: Grupo 67

1. Resolver la ecuación $2x^3-x^2-22x-24=0$, estando dos de sus raíces en la razón 3:4.
2. Resolver la ecuación $x^3-8x^2+14x-15=0$ si las raíces, en cierto orden están en progresión aritmética.
3. Resolver la ecuación $x^3-9x^2+kx-24=0$ sabiendo que sus raíces, en cierto orden, están en progresión aritmética.
4. Probar que las raíces del polinomio $P(x)=x^3-3kx^2+(3k^2-a^3)x-k(k^2-r^2)$ están en progresión aritmética..
5. Probar que las raíces del polinomio $P(x)=x^3-abx^2+a^2bx-a^3$ están en P.G.
6. Resolver la ecuación $54x^3-39x^2-26x+16=0$, estando las raíces en P.G.
7. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3-px^2+qx-r=0$, hallar el valor

de: a) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

b) $\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2d^2} + \frac{1}{a^2b^2}$

8. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3+qx+r=0$, hallar el valor de:
 $E = a^3+b^3+c^3$.
9. Si $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 6x^3-11x^2-3x+2=0\}=\{a,b,c\}$, hallar el valor de: $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ y
 $E = a^2+b^2+c^2$.
10. Si $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x^3+px+q=0\}=\{a,b,c\}$, hallar el valor de:
- $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$
 - $(b+c)^{-1}+(c+a)^{-1}+(a+b)^{-1}$
 - $(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)$
 - $(a+b)^3(a+c)^3(b+c)^3$
 - $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$
 - $a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3$
11. Demostrar que si el cuadrado de una de las raíces de la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$ es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos, entonces: $a^2(a^2-2b)=2(a^3-2ab+2c)^2$.
12. Se sabe que el polinomio $P(x)=x^5-56x+15$ tiene dos raíces cuyo producto es la unidad. Hallar todas sus raíces.
13. Resolver las ecuaciones $x^3+8x^2+20x+16=0$ y $x^3-2x^2-5x+6=0$ sabiendo que ambas tienen una solución común.
14. Dada la ecuación: $5x^6-35x^5-15x^4+185x^3+90x^2+70x+60=0$.
- Hallar la cota superior positiva y la cota inferior negativa.
 - Cuál es el máximo de raíces positivas y negativas que puede tener la ecuación.
 - Cuál es la suma y el producto de las raíces de la ecuación.
 - Cuál es la suma de las raíces tomadas de 5 en 5 factores.
15. Si $A=\{x \in \mathbb{R} \mid 8x^4-30x^3+35x^2-15x+2=0\}=\{a,b,c,d\}$, hallar el valor de:
- $E = a+b+c+d+a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$
 - Resolver la ecuación.
16. Dada la ecuación $x^3+6x^2-2x+4=0$ cuyas raíces son a, b, c . Sin resolver la ecuación, hallar una ecuación de raíces:
- a^2-1 , b^2-1 , c^2-1
 - $a(b+c)$, $b(a+c)$, $c(a+b)$
17. Hallar m , si existe, para que las raíces del polinomio:
 $P(x)=9x^3-9mx^2+(m-1)^2$ formen una progresión aritmética.
18. Demostrar que si $x^3+3px+q=0$ tiene una raíz doble, entonces: $q^2+4p^3=0$.



RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 1. Pag. 17

1. (c) ; 2. a) $r \rightarrow (q \rightarrow p)$, b) $(q \rightarrow p) \Delta (\neg r)$, c) $(p \leftrightarrow q) (r \rightarrow p)$
 3. VVVV ; 4. VFV ; 5. (b) ; 6. Todos ; 7. Ninguno ; 8. FVVV ; 9. Sólo A y B
 10. Sólo C ; 11. Sólo A ; 12. FFF ; 13. F ; 14. V ; 15. VVFF ; 16. F
 17. a) V, b) V ; 18. $V(A)=V$, $V(B)=V \text{ o } F$, $V(C)=V$; 19. VFF ; 20. Sólo A y C

GRUPO 2. Pag. 25

- Contingente: 1,6,9 y 12. Contradicción: 2 y 7. Tautología: 3,4,5,8,10,11.
 13. Todas ; 14. Sólo 2 y 3 ; 15. a) ; 16. Contradicción ; 17. Sólo c y d ;
 18. Contingencia: VVFFVVVV ; 19. a) $A \rightarrow C \neq B$, b) $A \rightarrow B \neq C$; 20. $A \rightarrow K$, $B \neq C \rightarrow K$; 21. a) $M \rightarrow L$, b) $M \neq L$; 22. a) VVFFVVVF, b) FVVV, c) VVVVVVVF, d) VFFF.

GRUPO 3. Pag. 32

Son válidas: 1,2,3,6,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19 y 20

Son falacias: 4,5,7 y 15

GRUPO 4. Pag. 41

1. $P \equiv p \rightarrow q$; 2. $\neg(q \wedge p) \vee r$; 3. a) $p \vee q$, b) q , c) $p \vee \neg q$, d) $(p \wedge r) \rightarrow q$
 e) $\neg q$, f) $p \wedge q$, g) $p \wedge q$; 5. $B \equiv C$; 6. Todas ; 7. $\neg q$; 8. Tautología
 9. $p \wedge q$; 12. $p \wedge q$; 13. $p \neq q$; 14. $p \Delta q$; 15. $t \equiv p$; 16. $P \equiv p \wedge q$, $Q \equiv p \Delta q$;
 18. b) y c).

GRUPO 5. Pag. 56

1. a) $\neg p$, b) $p \leftrightarrow q$, c) $p \wedge q$, d) $\neg(p \rightarrow q)$, e) $\neg p \wedge q$, f) $p \wedge q$, g) $p \wedge r$, h) p
 2. a) $\neg p \rightarrow \left[\begin{smallmatrix} q \\ r \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$, b) $\neg \left[\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$; c) $\neg \left[\begin{smallmatrix} p \\ \neg q \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$, d) $\neg \left[\begin{smallmatrix} p \rightarrow \neg q \\ q \rightarrow \neg p \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$
 e) $\neg p \rightarrow$, f) $\neg \left[\begin{smallmatrix} \neg r \\ p \end{smallmatrix} \right] \rightarrow q \rightarrow$; 3. a) $\neg \left[\begin{smallmatrix} s \\ p \rightarrow r \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$, b) $\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow$
 c) $\neg \left[\begin{smallmatrix} p \\ \neg q \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$, d) $\neg p \rightarrow q \rightarrow$, e) $\neg p \rightarrow \neg q \rightarrow$; 4. \$2.4 y \$6 ;
 7. $A \rightarrow \left[\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right] \rightarrow B$; 8. $\neg p \rightarrow q \rightarrow$, 9. \$30 ; 10. $A \rightarrow p \rightarrow B$; 11. $P \equiv p$,
 $Q \equiv p \wedge q \rightarrow P \rightarrow Q \equiv \neg \left[\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$; 12. a) V , b) F ; 13. $\neg r \rightarrow \left[\begin{smallmatrix} p \\ \neg q \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$

14. V ; 15. $x=p$; 16. $\bullet \left[\begin{array}{c} P \\ \neg q \end{array} \right] \neg r \bullet$; 17. $\bullet \neg q \bullet$

GRUPO 6. Pag.78

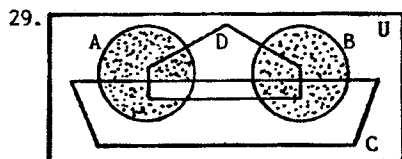
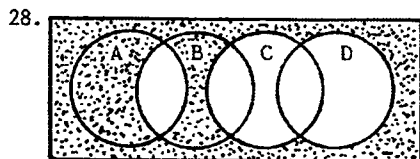
1. $A=\{-2,-1,4\}$, $B=\{5\}$, $C=\{-1,-2,5,-8,11\}$, $D=\{1,4,9,16\}$;
 2. $A=\{3n-5 | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$, $B=\{4n-11 | n \in \mathbb{N}\}$, $C=\{\frac{3}{2n+1} | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$
 $D=\{\frac{2}{3n-1} | n \in \mathbb{N}\}$, $E=\{\frac{1}{2}(3n-5) | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$, $F=\{\frac{n^2+2}{n} | n \in \mathbb{N} | 3 \leq n \leq 7\}$
 3. $A=\{2n^2-3n+1 | n \in \mathbb{N}\}$, $B=\{n^2-2n+3 | n \in \mathbb{N}\}$, $C=\{3n^2-5 | n \in \mathbb{N}\}$, $D=\{4n^2+6 | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}$
 $E=\{x | x=(-1)^n(\frac{3n-2}{n}), n \in \mathbb{N}\}$, $F=\{x | x=10^n-5, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 8\}$; 4. $\{4n^2+3 | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$
 5. $A=\phi$, $B=C=D=\{\pi, \sqrt{3}, 6, -2/3, -1/5\}$; 6. $A=\{-5, 2, 1/5, \sqrt{5}, 0, \sqrt{3}\}$, $B=\{\sqrt{-2}, 1+i\}$, $D=\phi$
 $E=B$; 7. Son verdaderas: B, D y E, falsos: A, C y F ; 8. Todas ; 9. 5
 10. a) $[\exists x \in \mathbb{N} | P(x)] \rightarrow [\forall y \in \mathbb{T} | g(x)]$, b) "Algunos números son impares y algunos triángulos no son equiláteros" ; 11. FFFF ; 12. a) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z} | a < b \wedge b < a$
 b) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n, \epsilon \in \mathbb{N} | n > n, \wedge n < a$, c) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} | ab \neq 0 \leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$, d) $\exists r \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, br$ es par y $(b+1)r$ es impar, e) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z} | (y > x) \vee (x \geq y+1)$
 13. a) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n, (n > n_0) \rightarrow |a| < \epsilon$, $\exists \epsilon > 0, \forall n_0, \exists n_1, (n > n_0) \wedge |a| \geq \epsilon$
 b) $\forall \epsilon > 0, \exists y > 0 \forall x, (a-y < x < a+y) \rightarrow (L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon)$
 $\exists \epsilon > 0, \forall y > 0 \exists x, (a-y < x < a+y) \wedge (L+\epsilon \leq f(x) \leq L-\epsilon)$; 14. FFFV ; 15. a) y b)
 16. V ; 17. F ; 18. V ; 19. $V(s)=V, V(t)=V, V(v)=F$; 20. V ; 21. FVFF ; 22. F
 23. a) V, b) F

GRUPO 7. Pag.88

1. Tres ; 2. VVFVV ; 3. 38 ; 4. a) $A=B$, b) $C \neq D$; 5. a) VVFFF, b) FVFV,
 c) FFFVF, d) VFVV ; 6. FVVF.

GRUPO 8. Pag.108

1. a) $\{6,8,10\}$, b) $\{1,4,9\}$, c) $\{3,4,5,7\}$, d) $\{4,9\}$; 2. $\{5\}$; 3. a) $\{a\}$, ϕ
 b) ϕ , c) E ; 4. a) $\{1\}$, b) $\{0,1,4\}$, c) ϕ , d) $\{1,4\}$; 5. 5 ; 6. Todas ; 7. B-C
 8. 4 ; 9. c) ; 10. $\{8\}$; 11. Todas ; 12. 4 ; 13. a) ; 14. 2 y 3 ; 16. a y d
 17. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,c,d\}$; 19. $\{\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}, 2i\}$; 20. $\{-6, -3, 0\}$; 21. $\{-9, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}, \pi, 3i\}$; 22. Sombrear las zonas: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $D=\{1,2,3,4,5\}$,
 $E=\{3,4\}$; 23. Sombrear: $\{4\}=I$; 24. 5, 6 y 7 ; 25. c) ; 26. d) ; 27. c)



30. $a \vee b$; 32. 16 ; 33. $B \cap C'$; 34. 1 y 3 ; 35. a) C , b) $B \cup C$; 36. A' ;
 37. $\emptyset$; 38. $\{\{\emptyset\}, \{3\}, \{\emptyset\}\}$; 39. $A \cap B$; 40. C' ; 41. $B \cup C$; 42. $A \cup B \cup C$; 43. A
 44. $A \cup (B \cup D)$; 59. Sombrear $I \cup N = \{1, 4\}$

GRUPO 9. Pag.122

1. 34 ; 2. 52 ; 3. 29 ; 4. 65 ; 7. a) 45 , b) 60 , c) 75 , d) 45 ; 8. 12
 9. 6 ; 10. 28 ; 11. 10 ; 12. a) 160 , b) 496 ; 13. a) 35% , b) 3% ; 14a. 105
 14. b) 35 ; 15. a) 36, b) 17 ; 16. a) 240 , b) 120 ; 17. a) 60 , b) 32

GRUPO 10. Pag.132

1. a) $\{(-20, -5)\}$, b) $\{(2, -3)\}$, c) $\{(-1, 2)\}$, d) $\{(3, 2), (-2, -3)\}$;
 2. $\{(1, 2), (3, 2)\}$; 3. $n(P)=6$; 4. $a \vee b$; 5. $a, c \vee d$; 6. $\{(3, 1)\}$; 7. $b \vee c$
 8. Todas ; 9. Todas

GRUPO 11. Pag.151

1. 19 ; 2. 14 ; 3. $5/6$; 4. 10 ; 5. Todas ; 6. 7 ; 8. $B=\{4, 6, 7\}$; 10. 6
 12. $a \vee c$; 13. $m=3$, $p=2$, $q=3$; 14. FVV ; 15. Todas ; 16. $a \vee c$; 17. Todas
 18. $b \vee c$; 19. Satisface para $x=3$, $y=4$, $z=2$; 21. Todas ; 22. Sólo a ; 23.
 VVVF ; 24. $b \vee c$; 25. VVVF

GRUPO 13. Pag.171

1. FFV ; 2. 9 ; 3. $\frac{1}{2}(3x+7)$; 4. $9\sqrt{6}+1$; 5. h ; 6. 1 ; 7. 37
 8. 1 ; 9. 2 ; 10. 17 ; 11. 0 ; 12. $10/3$

GRUPO 12. Pag.159

1. $a \vee c$; 2. $a, c \vee d$; 3. 2 ; 4. $R_2 \vee R_3$; 5. $16/9$; 6. $2/3$; 7. $1-f(p)+f(p)f(q)$;
 8. $b \vee c$; 9. $(x+h)^2$; 10. Ninguna ; 11. $a \vee b$; 12. 7 ; 13. $a, b \vee c$;
 14. 25 ; 15. $\{1, 4, 15, 34\}$.

GRUPO 14. Pag.179

1. VVV ; 2. VFVV ; 3. FVV ; 4. VVF ; 5. FFF ; 6. VFV ; 7. FVFV ; 8. $x=1$
 9. 24 ; 10. c^2 ; 11. VVV ; 12. $a \vee c$; 13. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; 14. $a, b \vee c$; 15. 2
 16. Todas ; 17. -1 ; 18. 5 ; 19. $1/2$; 20. c ; 21. Todas ; 22. (a, b) ; 23. t
 24. $x=4$; 25. a ; 26. $x=1$

GRUPO 15. Pag.196

1. $2xy^2-5x^3$; 2. $3x^4-6x^2-2$; 3. $5xy+4y^2$; 4. $a-b$; 5. $2x^3+x^2-18x-9$; 6.
 $3x^3-3x^2-2x$; 21. a) $x=1$, b) $x=5$, c) $x=2n/(a-b)$, d) $x=a+b$, e) $x=a+b$, f)
 $x=17a$, g) $x=a-b$, h) $x=m-n$

GRUPO 16. Pag. 201

1. ax^2 ; 2. 3^{n-m} ; 3. $1/10$; 4. 64 ; 5. 2700 ; 6. 4 ; 7. 5 ; 8. $7/8$; 9. 1
10. 6 ; 11. x^{10} ; 12. x^2 ; 13. a) x^6-y^6 , b) x^6-8x^4+4 , c) x^6-84 ; 17. $E=0$;
18. $E=12$; 19. $E=0$; 23. a) x^6-64a^2 , b) x^6-1 ; 24. $\frac{m}{4}(m^2+3n^2)$; 31. $8ab$

GRUPO 17. Pag. 207

1. $5\sqrt{2}-20\sqrt{5}$; 2. $2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$; 3. $8\sqrt{5}-\sqrt{3}$; 4. $\sqrt{3}$; 5. $2\sqrt{a-b}$; 6. $(\frac{b}{a})\sqrt{a}$; 7.
 $12\sqrt{6}+10\sqrt{5}$; 8. $\sqrt{5}(a+b)(a-b)^2$; 9. 2 ; 10. $4+3\sqrt{5}$; 11. 78

GRUPO 18. Pag. 209

1. $2+\sqrt{6}$; 2. $\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})$; 3. $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}-5)$; 4. $5+\sqrt{7}$; 5. 47 ; 6. $\frac{1}{x}(a+\sqrt{a^2-x^2})$; 7.
 $\frac{1}{6}(9+\sqrt{15})$; 8. $\frac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}$; 9. $4x\sqrt{x^2-1}$; 10. $\frac{1}{51}(3-2\sqrt{15})$; 11. $\frac{4}{5}(5+\sqrt{10})$
12. $\frac{1}{4}(2+\sqrt{10}-\sqrt{6})$; 13. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$; 14. $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15})$; 15. $-(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$
16. $\frac{1}{2}(1-\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})$; 17. $4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$; 18. $\frac{1}{11}(4\sqrt{5}+5)$; 19. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; 20. $2-\sqrt{3}$
21. a) $\frac{1}{x}(1+\sqrt{1-x^2})$, b) $\sqrt[3]{3}-1$; 22. $10+4\sqrt{5}$; 23. $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+9)$; 24. 1 ; 25. $E=2n$
26. b ; 27. $E=1$; 28. 289 ; 29. 12

GRUPO 19. Pag. 212

1. $2m\sqrt[3]{a^2m^2n^2}$; 2. $x\sqrt[3]{x^2}$; 3. $\frac{1}{x}(\sqrt[3]{x^3y^3})$; 4. x ; 5. $n-1\sqrt{x}$; 6. $\sqrt{x}$; 7. a^6
8. a^n ; 9. $\sqrt[7]{8}$; 10. F ; 11. V ; 12. V ; 13. $-3\sqrt[3]{a^2b}$; 14. $\sqrt{x+y}$

GRUPO 20. Pag. 220

1. $k=-2$; 2. $m=2$, $m=-10/9$, $A=\{7\}$, $A=\{-7/3\}$; 3. a) $\frac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$, b) $\frac{b}{c}(3ac-b^2)$
4. $10/3$; 5. $m=2$; 6. -4 ; 7. $m=5$; 8. $k=9/2$; 9. $\left\{\frac{1}{k}, \frac{k}{3-k^2}\right\}$; 10. $k=\pm\sqrt{c-q}$
11. $\frac{3a^2+1}{2|a|}$; 12. 16 ; 13. $\frac{bc}{a}(3ac-b^2)$; 14. $m = \frac{a-b}{a+b}$; 15. $\frac{2a}{a^2-b^2}$; 16. 5 ;
17. $22/5$; 18. $2\sqrt{3}-3$; 19. $3x^2+8x-16$; 20. $a^2c^2x^2+(2a^2c^2-b^2)x+a^2c^2=0$; 21.
 $x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$; 22. $x^2-4mnx-(m^2-n^2)=0$; 23. $B=\{x \in \mathbb{R} | n^2x^2-9(m-3)x+n=0, n \neq 0\}$; 24. $acx^2+2b(2c+a)x+(2c+a)^2=0$; 25. $k=a(c-a)$, $b=c(a-2c)$; 27.
 $acx^2+2b(a+c)x+(a+c)^2=0$; 29. $(a+b+c)x^2+2(c-a)x+(a+b+c)=0$; 30. $x^2-2(a+b)x+2ab=0$.

GRUPO 21. Pag. 223

1. $\{-2, 2, -3, 3\}$; 2. $\{1, -3, 3 \pm 2\sqrt{3}\}$; 3. $\{0, -3, 1, -4\}$; 4. $\{-3, 2\}$; 7. $\{3/2, 2\}$

5. $\{4, -7/2, \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{65})\}$; 6. $\{-3/2, -1/6\}$; 8. $\{-2, -2, \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{10})\}$; 9. $\{9/13, 4/13\}$
 10. $\{2/13\}$; 11. $\{-6, -2, 1, 3\}$; 12. $\{-1/2, 2\}$; 13. $\{-2a, a, 4a\}$; 14. $\{-9/2, 3, \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{65})\}$; 15. $\{-4a, 0, 3a, 7a\}$; 16. $\left\{\pm \frac{9\sqrt{3}}{32}, \pm \frac{4\sqrt{6}}{27}\right\}$; 17. $\{4/9, 1/4\}$; 18.
 $\{-2, -2, -2 \pm \sqrt{15}\}$; 19. $\{1/a, a^3\}$; 20. $\{b^2/40, 9a^3/b\}$

GRUPO 22. Pag. 234

1. VVV; 2. b); 3. VVVV; 4. Todas; 5. a) y d); 10. VFV;
 11. $R-r < d < R+r$; 12. VVVV; 13. FVVV; 14. VVVV; 26. F

GRUPO 23. Pag. 244

1. $x \geq 2$; 2. $x < 3$; 3. $2 < x < 8$; $-4 < x < 4$; 5. $1/3 < x < 3$; 6. $-1 \leq x \leq 5/4$; 7. $x < -1$ o $x > 2$; 8. $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}) < x < \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$; 9. $\{3/2\}$; 10. $R - \{4/3\}$; 11. $x < -6/5$ o $x > 1$;
 12. $x < -3$; 13. $-7 \leq x < 4$; 14. $-6 < x < -1$; 15. $x > 3$; 16. $x < 10$ o $x > 2$; 17. $-1 < x < 1$
 18. $9 < x < 15$; 19. $\{x \in R \mid 2 \leq x \leq 5\} \cup \{-1\}$; 20. $\{x \in R \mid x \leq 5\}$; 21. $\{z \in R \mid z < -2$ o $z > 3\}$
 22. $\{x \in R \mid x \geq 5/6\}$; 23. $\{x \in R \mid x \geq -1\}$; 24. $\{x \in R \mid x \leq 1\}$; 25. $k = -2$; 26. $s = 6$; 27.
 $k = 9/13$; 28. $\{-7, -6, -5, 3, 4, 5, 6, 7\}$; 29. $t = 144/32$; 30. $m = n = 55$; 31. $-5/3 < m < 1$
 32. $A \setminus B = \{5, 6, 7\} \cap S \subset 18$; 33. $-4 < m < 4$

GRUPO 24. Pag. 253

1. $[16, +\infty)$; 2. $< -7, 4$; 3. $< -\infty, -5 \rangle \cup [5, +\infty)$; 4. Ninguna; 5. Sólo b); 6. 2
 7. 2; 9. $m = 3/5$, $M = 4/5$; 10. $M = 3$; 11. $M = -5/3$; 12. $16/3$; 13. $m = 2.1$, $M = 9/4$
 14. $M = 30$; 15. $m = -6$; 17. $\{x \in N \mid x > 3\}$; 18. a) $\emptyset$, b) $[-1, 7)$, c) $< -10, 8)$, d)
 $< -\infty, -10 \rangle \cup [8, +\infty)$; 19. $< -\infty, -4 \rangle \cup < -5/3, 4 \rangle \cup < 6, +\infty)$; 20. $M = < -1/2, 9/2 \rangle$,
 $N = < -\infty, -10 \rangle \cup [-7, 6 \rangle \cup < 17, +\infty)$, $P = < -\infty, 1/4 \rangle \cup < 5/4, +\infty)$, $T = < -1/2, 9/2 \rangle$; 21.
 $< -9, -1 \rangle \cup < 5, 9 \rangle$; 22. $A = [-3, 14)$, $B = < -\infty, -1/4 \rangle \cup [5/3, +\infty)$, $C = R$, $D = < -\infty, 3/4 \rangle \cup [14,$
 $+\infty)$; 23. $< -\infty, -4 \rangle \cup [-2/3, 1] \cup [2, +\infty)$; 24. a) $[-9, -1/3] \cup < 1, 6)$, b) $[3, +\infty)$
 c) $< -\infty, -9 \rangle \cup [3, +\infty)$, d) $\emptyset$; 25. $A = [-4, -2/3] \cup < 8/3, +\infty)$; 26. $< -\sqrt{5}, \sqrt{5}$; 27.
 $< -\infty, -3 \rangle \cup < -2, 0 \rangle \cup < 1, +\infty)$; 28. $D = [1/2, 3)$; 29. $t = 1/2$; 31. $[-1, 3] \cup [6, +\infty) -$
 $\{2, 5/2\}$.

GRUPO 25. Pag. 264

1. $< -3, 1 \rangle$; 2. $[-3/2, 1/2 \rangle$; 3. $< -3, -1 \rangle \cup < 2, 5 \rangle$; 4. $< -\infty, -2 \rangle \cup [4, +\infty) \cup \{1\}$;
 5. $< -3, -1 \rangle \cup < 2, 3 \rangle$; 6. $< -\infty, -3 \rangle \cup < -1, 1/2 \rangle$; 7. $< -\infty, -4 \rangle \cup < 1, +\infty)$; 8. $[1, 2]$
 $[4, +\infty) \cup \{-1\}$; 9. $< -\infty, 2 \rangle$; 10. $< -1, 0 \rangle \cup < 2, 4 \rangle$; 11. $< -\infty, -1/2 \rangle \cup < 1, 2 \rangle \cup < 3, +\infty)$
 12. $< -\infty, -3/2 \rangle \cup < 0, 7/6 \rangle \cup < 2, +\infty)$; 13. $< -\infty, -4/3 \rangle$; 14. $[-2, -1/2 \rangle \cup < 0, 3] \cup [4, +\infty)$
 $\cup \{-3\} \cup \{-2\}$; 15. $[-1, 3] \cup < 4, +\infty)$; 16. $[-2a, a] \cup < a, 3a]$; 17. $[-3, 1] \cup \{2\}$; 18
 $< -\infty, -3 \rangle \cup [-2, 1] \cup \{2\}$; 19. $(x-3)(x-2)(x+2)^2 > 0$; 24. $< -\infty, -2 \rangle \cup < -2, 0 \rangle$

20. $\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3} \geq 0$; 21. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x-8} > 0$; 23. $[-2, -1] \cup [-1/3, 1] \cup \{2\} \cup \langle 4, +\infty \rangle$

GRUPO 26. Pag.266

1. $\{2\}$; 2. $\{0, \pm 2\}$; 3. $\{-4, 5\}$; 4. $\{9\}$; 5. $\{-10a/3\}$; 6. $\{a/4\}$; 7. $\{-4, 0\}$
8. $\{-5/2, 6\}$; 9. $\{3/5\}$; 10. $\{4\}$; 11. $\{-10a/3\}$; 12. $\{-10/3, 4\}$; 13. $\{6\}$
14. $\{3/2, 12\}$; 15. $\{10\}$; 16. $\{-3, 5\}$; 17. $\{7\}$; 18. $\{5\}$; 19. $\{5\}$; 20.
 $\{1/2, 5\}$; 21. $\{\{4\}, \{1\}, A, \emptyset\}$; 22. $-13/3$; 23. 65

GRUPO 27. Pag.274

1. $[2, 3] \cup \langle 6, +\infty \rangle$; 2. $\langle 3, 4 \rangle$; 3. $[1, 2]$; 4. $\langle -5, -4 \rangle \cup [3, 5]$; 5. $\langle -\infty, 1 \rangle$; 6.
 $[-2, 1]$; 7. $[1, 2]$; 8. $\langle -\infty, -3 \rangle$; 9. $\langle 2, 4 \rangle$; 10. $\langle -2, 1 \rangle \cup [3, 5]$; 11. $[-6, 3]$
12. $\langle -2, -1/2 \rangle$; 13. $\langle -\infty, -4 \rangle \cup [0, 1/2]$; 14. $[-2, 2] \cup [4, +\infty]$; 15. $[-6, 3]$; 16.
 $[-5, -3] \cup \{5\}$; 17. $[2, 3]$; 18. $[-1, 0] \cup [1, 4]$; 19. $[-3, 2] \cup [3, 5]$; 20.
 $\langle -\infty, -3 \rangle \cup [4, 5]$; 21. $[-4, -1] \cup \{2\}$; 22. $\langle -2\sqrt{2}, -2 \rangle \cup [1, 2\sqrt{2}]$; 23. $\langle -5, -2 \rangle$
 $[4, 5]$; 24. $[-2, 0] \cup [4, 5]$; 25. $[2, 5/2]$; 26. $\langle -\infty, -2 \rangle \cup [-1/3, 3/4] \cup \langle 5, +\infty \rangle$
27. $m = -2$; 28. $m = \pm 3$; 29. $m \in \langle 3 - 2\sqrt{10}, 2\sqrt{10} - 4 \rangle$; 30. $[-1, 3] \cup [10, 12] - \{1\}$; 31.
 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$; 32. $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, A, \emptyset\}$; 33. $\langle -6, -4 \rangle \cup [-1, 2] \cup [3, +\infty]$
34. $m \in \langle -5, 1 \rangle$; 35. a) $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \{3\}$, b) $\langle 1, +\infty \rangle - \{3\}$; 36. a) $[-3, 0] \cup \langle 2, 5 \rangle$, b)
 $[-4, -1] \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle \cup [3, 4] \cup \langle 4, +\infty \rangle$

GRUPO 28. Pag.284

3. VFV ; 4. VFVV ; 6. VVFV ; 14. a) 5, b) 4, c) -7, d) 2 ; 15. $M = 4/7$; 16.
 $M = 15/16$; 17. $M = 13/11$; 18. $M = 3$; 19. $M = 3$; 20. $M = 21/11$; 21. $m = 18$

GRUPO 29. Pag.296

1. $\{-4/5, 6\}$; 2. $\{-4, 0, 2\}$; 3. $\{1/5, 3\}$; 4. $\{1, 2, 6, 7\}$; 5. $\{-9, 5\}$; 6.
 $\{-5, -1/3\}$; 7. $\{-1, 7/3\}$; 8. $\{-5/4, 1/4\}$; 9. $\{-5, 1/3, 11/3\}$; 10. $\{\pm\sqrt{2}, \pm 2\}$
11. $\{-7, -3, 1, 5\}$; 12. $\{-1/2, 2\}$; 13. $\{2/7, 8\}$; 14. $\{-4, 1+\sqrt{3}\}$; 15. $\{7/4, 16\}$
16. $\{-1, 7/3\}$; 17. $\{-5/2, 11/4\}$; 18. $\{3, 7\}$; 19. $51/5$; 20. $R = \{-2, 0\}$; 21.
 $[5, +\infty]$; 22. $\langle -\infty, 3/4 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$; 23. $\langle -\infty, 1/2 \rangle \cup [3, +\infty]$; 24. $\langle -\infty, -2 \rangle \cup [-1, 1]$
25. $[-1, 3]$; 26. $\langle 1, 5 \rangle - \{3\}$; 27. $\langle -2/3, 2 \rangle$; 28. $[-10, -2]$; 29. $\langle -6, 2 \rangle$; 30.
 $[-5, 3]$; 31. $\langle -1/2, -1/4 \rangle \cup \langle 2/5, 1/2 \rangle$; 32. $[-1, -1/2] \cup [1, +\infty]$; 33. $[-5, \sqrt{11}]$
34. $\langle -\infty, -8/3 \rangle \cup [2, +\infty]$; 35. $[-3, -1] \cup [1, 3]$; 36. $[\sqrt{3}-1, 2]$; 37. $\langle -\infty, 4 \rangle - \{-2\}$
38. $\langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 9/2, +\infty \rangle$; 39. $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3/2, +\infty \rangle$; 40. $\langle -\infty, 7 \rangle \cup [16, +\infty]$; 41.
 $\langle -1, 2-\sqrt{6} \rangle \cup [4, 5]$; 42. $\langle -2, -1/2 \rangle \cup [3/2, 2]$; 43. $\langle -\infty, 5 \rangle \cup \langle 9, +\infty \rangle$; 44. $\langle -\infty, -3 \rangle$
 $\cup [-1, 1]$; 45. $[-4, -3] \cup \langle 3, 5 \rangle$; 46. $\langle 3, 26/5 \rangle$; 47. $\langle -\infty, 1 \rangle \cup [3, +\infty]$; 48. $[-5, -1]$
49. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] - \{0\}$; 50. $\langle -\infty, 7/2 \rangle$; 51. $\langle 0, 2 \rangle$; 52. $\langle -5, -13/5 \rangle \cup [13/5, 5]$; 53.
 $[4, 7]$; 54. $[-3, -2] \cup [6, 9]$; 55. $\langle -\infty, -3 \rangle \cup [\frac{1}{2}(1+\sqrt{17}), 3] \cup [\frac{1}{2}(3+\sqrt{17}), +\infty]$

56. $[4, 9]$; 57. a) $A = [-4, +\infty)$, b) $A = [-5, -13/4]$, c) $A = [1, 3]$; 58. 3 ; 59. $m = -1/10$; 60. $\langle -\infty, -1 \rangle$; 61. $\langle 0, \sqrt{5}-2 \rangle$; 62. $\langle -2/3, 2 \rangle \cup [3, +\infty)$; 63. $\langle -3, -2 \rangle$; 64. $N = 1598/3$; 65. $[1, \sqrt{2}]$; 66. $\langle -\infty, -1 \rangle \cup [3, +\infty)$; 67. $\langle 0, 2 \rangle$; 68. $\langle -2, 3 \rangle - \{1, 2\}$; 69. $n = 6$; 70. $A = \{1, 2, 3\}$; 72. $\langle 2, 9 \rangle$; 73. $\langle 1, 5/2 \rangle$; 74. $\langle 3, 5 \rangle$; 75. $E = -8$

GRUPO 30. Pag.311

1. a) -4, b) 4 ; 2. $A = \{-1, 0, 1\}$; 4. $[-1, -1/2]$; 5. $\langle -9, -6 \rangle \cup [8, 11]$; 6. $\langle -5/3, -2/3 \rangle \cup [8/3, 11/3]$; 7. $\langle -6, -1 \rangle$; 8. $\langle 1-\sqrt{5}, -1 \rangle \cup [3, 1+\sqrt{5}]$; 9. $\{6, 13/2\}$; 10. $\{2, 5/2\}$; 11. $\langle 11/2, 8 \rangle$; 12. $\{1/2, 1\}$; 13. $\{-2, 10/3, 11/3, 4\}$; 17. $[-4, -3]$; 18. $\{0, 1\}$; 19. $\{3, 13/4, 7/2, 15/4\}$; 20. $[3, +\infty)$; 21. $\{-3, 3\}$; 22. c) ; 23. $\forall \forall \forall \forall$; 25. $\langle -2, 0 \rangle \cup [5/2, +\infty)$; 26. $\langle -\infty, -5 \rangle \cup [9, +\infty)$; 27. $\langle -\infty, 5/3 \rangle \cup [5, +\infty)$; 28. $[-3/4, 2]$; 29. $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -1, 3 \rangle$; 30. $\langle -3, -3/2 \rangle \cup \langle -1, 1/2 \rangle$; 31. $\{0, 2\}$; 32. $\langle 1-2\sqrt{5}, -3 \rangle \cup [3, 1+2\sqrt{5}]$; 33. $\langle -3, 0 \rangle \cup [1, 4]$; 34. $\langle -\infty, -3 \rangle \cup [4, +\infty)$; 35. $[-3, -2]$; 36. $\{0, 1\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2n-1, 2n \rangle)$; 37. $\forall \forall \forall \forall$; 38. $\langle -\infty, -4 \rangle \cup [-3, -2] \cup \langle -1, 7 \rangle$; 39. $A = [3, 4]$; 40. a) $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle \cup [5, +\infty)$, b) $\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle \cup [5, +\infty)$

GRUPO 31. Pag.330

1. $D=R$, $R=R$; 2. $D=R$, $R=R$; 3. $D=\langle -1, 5 \rangle$, $R=\langle 2, 6 \rangle$; 4. $D=[-2, 6]$, $R=[-9/2, 7/2]$; 5. $D=[-5, 3]$, $R=[-3, 1]$; 6. $D=[0, 4]$, $R=[-3, -1]$; 7. $D=[2, 5]$, $R=[0, 6]$; 8. $D=[-4, 4]$, $R=[0, 6]$; 9. $D=[-3, 5]$, $R=[-6, 6]$; 10. $D=R$, $R=[2, +\infty)$; 11. $D=R$, $R=[3, +\infty)$; 12. $D=R$, $R=\langle -\infty, 5 \rangle$; 13. $D=\langle -\infty, 4 \rangle$, $R=R$; 14. $D=\langle -\infty, 2 \rangle$, $R=[1, +\infty)$; 15. $D=\langle -\infty, 3 \rangle$, $R=\langle -\infty, 0 \rangle$; 16. $D=[-5/3, +\infty)$, $R=[-1, +\infty)$; 17. $D=\langle -\infty, 2 \rangle$, $R=\langle -\infty, 5 \rangle$; 18. $D=[-1, 5]$, $R=[-3, 1]$; 19. $D=[-3, 1]$, $R=[1, 7]$; 20. $D=R-\{1\}$, $R=R-\{2\}$; 21. $D=R$, $R=[1, +\infty)$; 22. $D=\langle -\infty, 1 \rangle \cup [3, +\infty)$, $R=[0, +\infty)$; 23. $D=R-\{1\}$, $R=R$; 24. $D=[-4, 4]$, $R=[-4, 4]$; 25. $D=[-6, 2]$, $R=[-1, 1]$; 26. $D=[-2, 2]$, $R=[-3, 1]$; 27. $D=\langle -\infty, -2 \rangle$, $R=[4, +\infty)$; 28. $D=R$, $R=\langle -\infty, 1 \rangle \cup [5, +\infty)$; 29. $D=R$, $R=[0, +\infty)$; 30. $D=[-5, 3]$, $R=[0, 3]$

GRUPO 32. Pag.336

26. $32u^2$; 27. $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$; 28. $\{(3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$; 29. $\{(3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

GRUPO 33. Pag.349

1. $D=[-5, 5]$, $R=[-5, 4]$; $D=[-5/3, 1]$, $R=[-3/2, 5/2]$; 3. $D=\langle 0, 4 \rangle$, $R=[-4, 5]$; 4. $D=[-5, 5]$, $R=[-3, 5]$; 5. $D=[-2, 4]$, $R=[-8, 8]$; $D=[0, 4]$, $R=[-4, 2]$; 7. $D=[-3, 1]$, $R=[1, 33/4]$; 8. $D=[-1, 1]$, $R=[-1, 1]$; 9. $D=[-1, 2]$, $R=R$; 10. $6\pi u^2$; 11. $a=5\sqrt{2}$; 12. $12u^2$; 23. $4u^2$; 24. $16u^2$; 25. $25\pi^2(\pi-1)$; 26. $16u^2$; 27. $32(3-2\sqrt{2})u^2$; 28. $(9/2)(\pi-2)u^2$; 29. $(9/2)(\pi\sqrt{3}-2)u^2$; 30. $24u^2$; 31. $2(3\pi-2)$; 32. $8u^2$; 33. $1u^2$; 34. $12u^2$; 35. $2(\pi+2)u^2$; 36b. $D=[0, +\infty)$, $R=R$; 37. $12u^2$

38. $14u^2$; 39. $(9\pi/2)u^2$; 40. $16u^2$; 41. $2(8-\pi)u^2$

GRUPO 34. Pag.358

1. $D=R-\{3\}$, $R=R-\{1\}$; 2. $D=R-\{4\}$, $R=R-\{1\}$; 3. $D=R-\{-3,3\}$, $R=$
 $<-\infty, 0] \cup <2, +\infty$; 4. $D=R-\{-1,1\}$, $R= <-\infty, 0] \cup <1, +\infty$; 5. $D=R-\{0,3\}$
 $R= <-\infty, -8/3] \cup <0, +\infty$; 6. $D=R-\{0\}$, $R= <0, +\infty$; 7. $D=R$, $R= <0, 2]$;
 8. $D=R-\{0\}$, $R= <-2, 0]$; 9. $D= [-3, 0] \cup [2, +\infty)$, $R=R$; 10. $D= <-\infty, 0]$, $R=R$; 11.
 $D= <-\infty, 1]$, $R=R$; 12. $D=R-\{-2,5\}$, $R=R$; 8. $R= <-2, 0]$ $<2, +\infty$

GRUPO 35. Pag.365

1. Si ; 2. No ; 3. Si ; 4. No ; 5. a ; 6. 8 ; 7. $f(x)=3x^2-4x-4$; 8. $[-30,30]$
 9. c ; 10. $D=R$, $R= [-1, +\infty)$; 11. $D=R$, $R= [3, +\infty)$; 12. $D= <-\infty, 1]$, $R= [0, +\infty)$; 13.
 $D=R$, $R= <-\infty, 6] \cup [6, +\infty)$; 14. $D= <-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$, $R=R$; 15. $D= [-4, 2]$, $R= [-1, 5]$
 16. $[0, 4]$; 17. $<-5, 20]$; 18. $[3, 4]$; 19. $[1+\sqrt{3}, 3]$; 20. $D= [-\sqrt{6}-2, -3] \cup [-1,$
 $\sqrt{6}-2]$, $R= [0, 5]$; 21. $D= [-2, 2]$, $R= [\sqrt{5}, 3]$; 22. $D= [-2, 2]$, $R= <-1, 7]$; 23. $D= [-2,$
 $-1/2] \cup <3/2, 3]$, $R= <2, 5]$; 24. $D= [-2, -1] \cup [1, 2]$, $R= [-1, 2]$; 25. $D= [\sqrt{7}, 3]$,
 $R= [-2, 0]$; 26. $D= [1, 4]$, $R= [-1, 3]$; 27. $D= <-1, 0] \cup [2, 4]$, $R= [-3, 5]$; 28. $D= <-4,$
 $-2] \cup [0, 1] \cup <1, 2]$, $R= [-1, 2] \cup <2, 7]$; 29. $D= [-1, 4] - \{3\}$, $R= [0, 4]$; 30. $D= <-1, 1]$
 $\cup <3, 5] - \{0, 4\}$, $R= <-2, 6] - \{1\}$

GRUPO 36. Pag.392

1. $<-\infty, -2] \cup [2, 5]$; 2. $[-3, 4] - \{5/2\}$; 3. $[1, 3]$; 4. $\{2, 3\}$; 5. $a \in <-4, 2(\sqrt{5}-3)>$
 6. $m \in <-\infty, -19/2] \cup [25/2, +\infty)$; 7. $\{0, 1, 3, 4, 5, \dots\}$; 8. $f(x)=(2x+1)^2 \rightarrow \min(f)=0$
 9. $k= -\frac{1}{8}(2\sqrt{5}+1)^2$; 10. $b= \frac{4}{\pi+4}$; 11. a) $A(x)= \frac{3x}{10}(20-x)$, b) $x=10$; 12. a)
 $U(x)=(120-x)(x-20)$, b) Si, $x=\$50$, c) $U_{\max}=\$2,100$; 13. $U(x)=(105-x)x-(80+$
 $63x)+80$, $\text{Max.Utilidad}=\$441$; 14. a) $p= \frac{40}{\pi+4}$, $C= \frac{10}{\pi+4}$, b) $S=(\frac{4}{\pi+4})S_T$; 15. $D=$
 $[2, 4] \cup <4, +\infty)$, $R= <-\infty, -1] \cup <1, +\infty) \cup \{0\}$; 16. $<-\infty, -3] \cup [-1/2, 0] \cup [1, 3]$; 17.
 $Rf= <-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$, $Rg= <6, +\infty)$; 18. $xe <-\infty, -2] \cup <-1, +\infty) - \{2\}$; 19. $ke <-4, 2\sqrt{5}-6]$
 20. a) $[2, +\infty)$, b) $[-18, 5]$, c) $[3/2, +\infty)$, d) $[1, +\infty)$; 21. $D= [-1, 1]$; 22. $R= [0, 5]$
 23. a) $D=R$, $R= \{0, 2\} \cup [3, +\infty)$, b) $D= [-3, +\infty)$, $R= <-2, 2]$; 24. $<2/9, 1]$; 25. $D=$
 $<-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$, $R= [0, +\infty)$; 26. $D=R-\{3\}$, $R= [-5, +\infty) - \{20\}$; 27. $D=R-\{-5, -1\}$,
 $R=R-\{-7, -3\}$; 28. $D=R-\{-5\}$, $R= [3, +\infty) - \{12\}$; 29. $D=R-\{-3, 2\}$, $R= <-5, +\infty)$; 30.
 $D=R-\{-2, 4\}$, $R= [-9/4, +\infty)$; 31. $D=R$, $R= [1, +\infty)$; 32. $D=R$, $R= [0, +\infty)$; 33. $D=R$,
 $R= [0, 1]$; 34. $D=R$, $R= [0, 1]$; 35. $D= <-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, $R= [-1, 0] \cup [1, 2]$; 37. $D=R$
 $R= [3, +\infty)$; 38. $D= [-1, -1/3]$, $R= [0, 1]$; 39. $D=Z$, $R= \{0\}$; 40. $D=R$, $R=R$; 44.
 $D= [-3, 4] - \{-1\}$, $R= <-4, 7]$; 45. $D= [-2, 4]$, $R= [-3, 4]$; 46. $D= [-4, 5]$, $R= [0, 9]$
 47. $D= <5, +\infty)$, $R= <-\infty, 0]$; 48. $D= <-5, 7]$, $R= <-2, 6]$; 49. $D= [-3, 8]$, $R= [-2, 7]$

50. $D=[-2,5]$, $R=[2,7>$; 51. $R=[-4,0] \cup [1,3] \cup [5,12>$; 52. $D=[-2,4]$, $R=[0,4]$

53. $D=[-7,5]$, $R=[-1,4> \cup \{5\}$; 54. a) $R=[-4/3, 10/3>$, b) $R=[0,3] \cup [15/4, 6]$

$$55. f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 2.5 \\ 2.5 & , 2.5 \leq x < 4.5 \\ x-2 & , 4.5 \leq x < 5 \\ 8-x & , 5 \leq x \leq 8 \end{cases} \quad 56. a) f(x) = \begin{cases} -x/2 & , x \leq -\infty, 0> \\ \lfloor x/2 \rfloor & , x \in [0,8] \\ -\frac{3}{4}(x-12) & , x \in [8, +\infty) \end{cases}$$

$$b) <-\infty, 8> \cup [12, 40/3>$$

57. a) par , b) No es par ni impar , c) par , d) impar , e) impar , f) No es par ni impar , g) impar , h) par ; 58. f es par ; 60. a) $T=2\pi/a$, b) $T=\pi$
c) $T=\pi/2$, d) $T=6\pi$, e) $T=8$

GRUPO 37. Pág.406

1. a) $1/2$, b) 0 , c) $3/2$; 3. $\{-1, 0, 1, 2\}$; 4. $\{2\}$; 5. $\{(0,4)\}$

$$6. (f+g)(x) = \begin{cases} x^2+3x+4, & x \in [0,2] \\ x^2-x+1, & x \in [2,3> \\ 5-x & , x \in [3,5] \end{cases} \quad 7. (f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}+x+1, & x \in [-2,1> \\ \sqrt{9-x^2}-x+3, & x \in [1,3] \end{cases}$$

$$8. (f+g)(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in [-2,2> \\ x-1 & , x \in [2,6> \end{cases} \quad 9. (f+g)(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \in [-3,0] \\ 5x-2, & x \in [0,2] \\ 2x+4, & x \in [2,5] \end{cases}$$

$$10. \text{Dom}(f-g)=[-1,0] ; 11. x \in [3, +\infty) ; 12. (f+g)(x) = \begin{cases} x^2-4x+5, & x \in [-3,-1] \\ x^2+1, & x \in [3,4> \end{cases}$$

$\text{Ran}(f+g)=[10,26]$; 13. $\text{Ran}(f+g)=[0, +\infty)$; 14. b) $[0,6]$, c) $[0,1] \cup [4,6]$

$$15. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-x^2+3}{\sqrt{9-x^2}}, \quad D=[-2,0] \cup [2,3> \quad 20. h_1(x) = \begin{cases} 0 & \\ \frac{3}{2}x+15, & x \in [2,6] \\ 6x-12, & x \in [6,8> \end{cases}$$

$$16. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{|x-1|}, & x \in [0,3> \setminus \{1\} \\ \frac{x^2-2x}{1-x}, & x \in [3,6] \\ \frac{x^2-2x}{x^2}, & x \in [6,8] \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} \frac{6}{x+10}, & x \in [2,6] \\ \frac{3}{2x-4}, & x \in [6,8> \end{cases}$$

$$17. (f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in [-3,-1> \setminus \{-2\} \\ 2x, & x=-2, x=-1 \\ x-x+6, & x \in [1,3] \end{cases} \quad 21. (f+g)(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in [-3,-1> \setminus \{-2\} \\ 2, & x=-2 \\ 1, & x=-1 \\ (x-2)^2, & x \in [0,2] \end{cases}$$

$$18. (f+g)(x) = \begin{cases} (x+5)^2-1, & x \in [-\infty, -3> \\ 4, & x \in [-3,3] \setminus \{-2,2\} \\ 3, & x \in \{-2,2\} \\ 6, & x \in [3,6> \\ 7, & x \in [6,9> \end{cases} \quad \text{Ran}(f+g) = [0,4> \quad 22. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} x^2-4, & x \in [-6,-2> \\ 2-x, & x \in [-2,0] \\ \frac{2}{x+2}, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ran}(f+g)=[-1, +\infty)$$

$$19. (f-g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}-1, & x \in [2,4] \\ x^2-14x+45, & x \in [6,8] \\ x^2-16x+58, & x \in [8,10] \end{cases} \quad 24. (f+g)(x) = \begin{cases} |x^2+1|+1, & x \in [-2,2] \\ 2, & x=2 \\ \frac{1}{x-1}, & x \in <2,4> \end{cases}$$

$$\text{Ran}(f-g) = [-6, -2] \cup [-1, \sqrt{2}-1]$$

$$\text{Ran}(f+g) = <1/3, 4]$$

GRUPO 38. Pag. 418

$$\begin{aligned} 1. R - \{-2, -1, 0\}; & 2. \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{5}); & 3. R - \{-2/3, 2/3\}; & 4. [3, 4]; & 5. 6; & 6. 1332 \\ 7. 555; & 8. <-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty); & 9. a=53; & 10. h(x)=x^2-3; & 11. -17/3; & 12. \\ 14/17; & 13. 2x; & 14. g(x) = \begin{cases} x+5, & x \geq -4 \\ -x-3, & x < -4 \end{cases}; & 15. f(x)=2x-1/3, & f(x)=1-2x; & 17. \\ <-\infty, -2] \cup <-\sqrt{2}, 1] \cup [2, +\infty); & 18. [-3, -3/2]; & 19. <-\infty, -\sqrt{3}] \cup <-1, 1] \cup [4, +\infty) \\ 20. (fog)(x) = \begin{cases} 2x^2-4x+3, & x \in <-19, -2> \\ 8x^2+1, & x \in <6, 10> \end{cases}; & 21. VVV; & 22. (fog)(x) = \begin{cases} 6x+2, & x < -3/2 \\ 2-9x, & x > 1 \end{cases} \\ 23. (fog)(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 1 \\ x^2+2, & -1 \leq x < 0 \\ 3-x^2, & x \geq 0 \end{cases} & 27. (fog)(x) = \begin{cases} \sqrt{5}-x, & x \in <1, \sqrt{5}> \\ 1, & x \in <4, 7> \\ \frac{1}{x^2-4}, & x \in [\sqrt{7}, 2\sqrt{3}] \end{cases} \\ 24. (fog)(x) = \begin{cases} -x^2+6x-6, & x \in <-\infty, 0] \\ x^2-3x, & x \in [0, 1] \\ -x^2+10x-22, & x \in <1, 2> \\ x^2-7x+10, & x \in [2, +\infty) \end{cases} & 28. (fog)(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-1}, & x \in [1, \sqrt{2}] \\ x^2, & x \in <\sqrt{2}, \sqrt{5}> \end{cases} \\ 25. (fog)(x) = \begin{cases} x^2+6x+7, & x \in [-5, -3] \\ 4x^2-4x-1, & x \in <-2, 1> \\ 16x^2+8x-1, & x=1 \end{cases} & 29. (g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-3, -2] \\ 0, & x \in <-2, -1] \\ 4, & x \in [1, 2] \end{cases} \\ 26. (fog)(x) = \begin{cases} 1, & x \in <-4, -3> \\ \frac{x+6}{6}, & x \in <-2, -1] \\ (\frac{3x+6}{x})^2, & x \in <-3, -2] \\ 5-x, & x \in [4, 5] \end{cases} & 30. (fof)(x) = \begin{cases} -4, & x=-1 \\ -(x+4), & x \in <-1, 0] \\ -4, & x=1 \\ -x, & x \in <1, 3> \\ -2, & x=3 \\ \sqrt{x+2}-2, & x \in [4, 9] \end{cases} \end{aligned}$$

GRUPO 39. Pag. 442

$$\begin{aligned} 1. n=6; & 2. a=11/27, n=1/12; & 3. -6; & 4. n=55/3; & 5. n=-1/2; & 6. \frac{1}{9a}(1-15a) \\ 7. n=4; & 8. <-4, -1> \cup <0, 2>; & 9. a=2, b=11; & 10. FFV; & 11. FFV; & 12. \nexists n; & 13 \\ 3-x^2, & x \in [0, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}]; & 14. VFFV; & 15. <-1, 1> - \{0\}; & 19. a) \text{Ran}(1) = \\ <-17/2, -17/4] \cup \{0\} \cup [29/4, 10] \cup \{22\}; & 20. f \text{ es inyectiva, } g \text{ no es inyectiva} \\ 21. a=2, b=3, (fog)(x) = \begin{cases} 4x+11, & x \in [-3, -1] \\ 7, & x \in [-1, 3] \end{cases}; & 22. 7; & 23. a) Df=Rf=R-\{2\}, b) \\ f=f^*, c) \text{ Si, porque para todo punto } P(a, b) \in f \text{ existe otro punto } Q(b, a) \in f^* \end{aligned}$$

que son simétricos respecto a la recta $y=x$. Verificar para $P(3,7) \rightarrow Q(7,3)$

d) Si, $x=2\pm\sqrt{5}$, corresponde a los vértices de ambas ramas de la hipérbola equilátera.

$$25. h^*(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{5-x}{3}} - 1, & x \in (-\infty, 2) \\ 1 - \sqrt{x-1}, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$$27a. f^*(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x}, & x \in [-3, 1] \\ 1 + \sqrt{4x-x^2}, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

$$28. f^*(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{2x-8}, & x \in [9/2, 6] \\ 2 + \sqrt{2x-8}, & x \in [4, 9/2] \end{cases}$$

$$29. f^*(x) = \begin{cases} -6 - \sqrt{x^2 - 8x + 25}, & x \in (-\infty, 0] \\ \sqrt{x+3} - 3, & x \in (6, +\infty) \end{cases}$$

$$30. f^*(x) = \begin{cases} -\sqrt{2x-2}, & x \in (3, 9] \\ x^2 - 2, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$31. f^*(x) = \begin{cases} -1 - \sqrt{x+3}, & x \in (-2, 1] \\ \frac{x-3}{x+1}, & x \in (-\infty, -5) \end{cases}$$

$$32. f^*(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{6}{x^2-1}, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$39. (g \circ f^*)(x) = \begin{cases} -(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x + 2), & x \in [-4, 1 - 2\sqrt{3}] \\ \sqrt{2-x} + x + 2, & x \in [-2, -3/2] \end{cases}$$

$$40. \#f^* \text{ (f no es univalente)}, g^*(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right); \quad 41. f^*(x) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

$$42. (f \circ g^*)(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1)^2 - 1, & x \in (-\infty, -3) \\ x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

$$43. h(x) = \begin{cases} 10 - \sqrt{x-2}, & x \in [7, +\infty) \\ \frac{1}{4}(x^2+3)^2 + 4, & x \in [\sqrt{3}, \sqrt{5}] \end{cases}$$

$$45. (f^* \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{4(x^2-6x+1)}{-2x^2+12x-1}, & x \in (-2, 3 - \sqrt{17/2}) \\ \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}}, & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

$$46. A = [-2, 0] \cup [1, 4] \\ B = [-3, 7]$$

$$47. g(x) = \begin{cases} -1 - \sqrt{x-2}, & x \in (2, +\infty) \\ x^2 + 1, & x \in (-\infty, -1) \end{cases} \quad g^*(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 2, & x \in (-\infty, -1) \\ -\sqrt{x+1}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

GRUPO 40. Pag.452

1. $f(M) = \{-3, -1, 3, 5\}$, $f^*(S) = \{0, 2, 4\}$; 4. a) -5 , b) $f(M) = \{0, 7/12\}$; 7.a) $\langle 1, 2 \rangle$
 b) $[-1, 0] \cup [2, 3]$, c) $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 5/3, 2 \rangle \cup [3, +\infty)$, d) $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, 1/2 \rangle \cup \langle 1, +\infty)$,
 e) $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, 1/3 \rangle \cup \langle 1/2, +\infty)$; 8. $\mathcal{L}(\langle 2/9, 1/3 \rangle)$; 9. $\langle -1, 2 \rangle$; 11.b) $[-8/3, \frac{2}{3}]$

d) $\langle -\infty, -\frac{1}{3}(5+3\sqrt{5}) \rangle \cup [-8/3, +\infty)$; 12. $\langle -\infty, -3 \rangle \cup [7/2, +\infty)$.

GRUPO 41. Pag. 458

- 3.a) $b=3$, b) $b=10$, c) $b=1/2$, d) $b=8$; 4.a) $D=R$, $R=\langle 0, +\infty \rangle$, b) $D=R$, $R=\langle 0, +\infty \rangle$
 c) $D=R$, $R=\langle 0, +\infty \rangle$, d) $D=R$, $R=\langle -\infty, 1 \rangle$, e) $D=R$, $R=\langle -1, 0 \rangle$, f) $D=R$, $R=[3, +\infty)$, g)
 $D=R$, $R=[6, +\infty)$, h) $D=x_{\mathbb{E}}[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$, i) $D=x_{\mathbb{E}}[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$; 5.a) $x=25$, b) $x=\frac{4}{9}$
 c) $x=25$; 6. $E=7/2$; 7. $E=-10/27$; 8. $E=16/15$

GRUPO 42. Pag. 466

1. $\log_a \frac{27(x-b)^2}{a^x(y-c)^a}$; 2. $\log_2(\frac{25a^2}{81 \cdot 2^a})$; 3. $\log_e(\frac{20e^2}{3})$; 4. $x=\log 2$; 5. $x=\log 5$
 6. $x=1$; 7. $x=\log 3$; 8. $x=167/240$; 9. $x=20$; 10. $x=48$; 11. $x=8$; 13. $x=3/2$
 12. $x=2 \pm \frac{\sqrt{7a-1}}{2^a}$; 15. $4k/5$; 16. $3(1-a-b)$; 17. $b=a^2$; 18. $24\sqrt{2}$; 19. $a=\pi/4$
 20. $\frac{5p}{2(p+1)}$; 21. $11/3$; 22. $x=48$; 23. $b=\sqrt{3}$; 24. $x=8$; 25. $E=-77/4$; 28. $E=2$
 26. $x=\sqrt{2}$; 29. $\sqrt[3]{10}$; 30. $3/2$; 31. $\log_{c-b}(a) + \log_{c+b}(a)$. (Sug. Partir del Teorema de Pitágoras)

GRUPO 43. Pag. 471

9. $\text{Dom}(f)=\langle 1, 3 \rangle$, $f^*(x)=1+2^{x^2-1}$; 10.a) $x \in \langle 2, 3 \rangle$, b) $x \in [4, 6]$, c)
 $x \in \langle -2, 2 \rangle$, d) $x \in \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$, e) $x \in [1, 4]$; 11. FVV ; 12. FVVF
 13. VFF ; 14. VFF ; 15.a) F
 $S=\langle 1, 2\sqrt{5} \rangle$, b) F, 17. $(\text{gof})(x) = \begin{cases} 2^{\sqrt{2-x}-2}, & x \in \langle -17/4, -2 \rangle \\ 2^{x^2-2}, & x \in \langle \sqrt{2}, \sqrt{5/2} \rangle \\ \ln(\sqrt{x^2+1}), & x \in \langle \sqrt{7/2}, 2 \rangle \end{cases}$
 S= $\{a_i\}$, c) V

GRUPO 44. Pag. 476

1. $\{-1, 2\}$; 2. $\{2\}$; 3. $\{1, 2\}$; 4. $\{1\}$; 5. $\{2, 3\}$; 6. $\{3\}$; 7. $\{3\}$; 8. $\{-3\}$
 9. $\{-1, 1\}$; 10. $\{3\}$; 11. $\{1\}$; 12. $\{-2, 2\}$; 13. $\left\{2, \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3}\right\}$; 14.
 $\left\{\frac{5-7\log 2}{3-2\log 2}\right\}$; 15. $\left\{\frac{2}{-1+5\log 2}\right\}$; 16. $\left\{\frac{\log a}{\log b - \log a}\right\}$; 17. $\{\frac{1}{2}\log 2\}$; 18. $\{\ln 3, \ln 4\}$
 19. $\left\{\frac{2(1-2\log 2)}{1-\log 2}, \frac{2(2\log 2-1)}{1-\log 2}\right\}$; 20. $\left\{\frac{\log 3}{\log(2/3)}\right\}$; 21.a) $x = \frac{h}{h-k}$, $y = \frac{k}{h-k}$
 b) $x = \frac{3h-2k}{4(h-k)}$, $y = \frac{h}{4(h-k)}$; 22. $\{(3, 5)\}$; 23. $\{(1/4, 1/2)\}$; 24. $\{(9/4, 27/4)\}$
 25. $\{(1/3, 9)\}$; 26. $\{(7, 121)\}$; 27. $\{(7, 5)\}$; 28. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8n}-1)$, $y = 2n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+8n})$; 29. $\{(2, 0)\}$; 30. $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5} \mp \sqrt{2})$, $u=5/3$, $v=7/5$; 31.
 $\{(-1/2, 1/2, 1/2)\}$.

GRUPO 45. Pag.481

1. $\{-1,3\}$; 2. $\{5\}$; 3. $\{16\}$; 4. $\{3\}$; 5. $\{1,2\}$; 6. $\{5, \sqrt[3]{5}\}$; 7. $\{8\}$; 8. $\{a, a^2\}$; 9. $\{\log 4\}$; 10. $\{\frac{5+\sqrt{145}}{10}\}$; 11. $\{1/3, 81\}$; 12. $\{10, 10^3\}$; 13. $\{2, 1/\sqrt[3]{4}\}$; 14. $\{1\}$; 15. $\{10\}$; 16. $\{-4/3, 2\}$; 17. $\{1/a, 10/a\}$; 18. $\{10\}$; 19. $\{2\}$; 20. $\{5\}$; 21. $\{1/\sqrt{a}\}$; 22. $x = \log_2(\frac{3+\sqrt{41}}{2})$; 23. $x = \pi/6$; 24. $\{\pm 4, \pm 8\}$; 25. $x = k\pi + \arctan 10$; 26. $x = 29/8$; 27. $\{a^{-1}, a^2\}$; 28. $\{\sqrt[3]{3}, 1/\sqrt[3]{3}\}$; 29. $\{29/8, -21/8\}$; 30. $\{(1, -2)\}$; 31. $\{(100, 10), (1/100, 1/10)\}$; 32. $\{(505, 495)\}$; 33. $\{(3, 4), (-7\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$; 34. $\{(1/10, 2), (100, -1)\}$; 35. $\{(6, 3)\}$; 36. $\{(9, 5)\}$; 37. $\{(e, e^{-2}), (e^{-1}, e^3), (e^3, e^{-1}), (e^{-3}, e)\}$; 38. $\{(e^2, e)\}$; 39. $\{(8, 4)\}$; 40. $\{(5^3, 3^3), (3^3, 5^3)\}$; 41. $\{(2a, b/3), (1/2a, 3/b)\}$; 42. $\{(10^3, 10^3)\}$; 43. $x = \frac{1}{4}(\pm \sqrt{41})$.

GRUPO 46. Pag.486

1. $x \in \langle -3, -1 \rangle \cup [3, +\infty)$; 2. $x \in \langle -1, +\infty) - \{-1/2\}$; 3. $x \in \langle -3, 0 \rangle \cup \langle 1/2, 3 \rangle$; 4. $x \in \langle 1, 2 \rangle \cup [3, 5]$; 5. $x \in \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 5, +\infty)$; 6. $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup [-1/2, +\infty)$; 7. $[3, +\infty)$; 8. $\langle -\infty, -3 \rangle$; 9. $\langle 0, +\infty)$; 10. $[-5/2, -2/5] \cup [2, +\infty)$; 11. $\langle -\infty, -6 \rangle \cup \langle 1/2, 2 \rangle \cup [3, +\infty)$

GRUPO 47. Pag.498

1. $x \in \langle 2, +\infty)$; 2. $x \in \langle 2/11, 1/2 \rangle$; 3. $x \in \langle 1/2, 7/3 \rangle$; 4. $x \in \langle -\infty, -5/4 \rangle \cup \langle 11/4, +\infty)$; 5. $x \in \langle 0, 3/2 \rangle \cup \langle 3/2, 3 \rangle$; 6. $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 5, +\infty)$; 7. $x \in \langle 7/2, 5 \rangle \cup \langle 5, +\infty)$; 8. $x \in [-1, 0 \rangle \cup \langle 3, 15 \rangle$; 9. $x \in \langle -1, -1/2 \rangle \cup \langle 3/2, 2 \rangle$; 10. $x \in \langle 1, 3 \rangle$; 11. $x \in \emptyset$; 12. $x \in \langle 3, +\infty)$; 13. $x \in \langle 6, 25/4 \rangle$; 14. $x \in [0, 1] \cup \langle 3, 4 \rangle$; 15. $x \in \langle -2\sqrt{2}, -\sqrt{6} \rangle \cup \langle \sqrt{6}, 2\sqrt{2} \rangle$; 16. $x \in \langle -1+\sqrt{6}, 2 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$; 17. $x \in \langle 0, 1 \rangle \cup [2, +\infty)$; 18. $x \in \langle 0, 1/2 \rangle \cup \langle 1, +\infty)$; 19. $x \in \langle 0, 1/2 \rangle \cup \langle 1, +\infty)$; 20. Si $1 < a < 2 + 2 < x < \frac{3-a}{2-a}$, si $a > 2 + x < \frac{3-a}{2-a}$ o $x > 2$; 21. $x \in \langle -\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+16\pi}), -\sqrt{2\pi} \rangle \cup \langle \sqrt{2\pi}, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+16\pi}) \rangle$

GRUPO 48. Pag.506

26. (2) y (3) ; 27. FVV ; 28. 16 ; 29. Todas ; 30. (1), (3) y (4) ; 31. 3 ; 32. $3/4$; 33. $8n^2+4$; 34. $f(40)$; 35. $f(n)+2n+3$; 36. $31c+d$

GRUPO 50. Pag.521

1. $\sqrt[3]{2}-5$; 2. $10(10^n-1)$; 3. $\frac{100}{101}$; 4. $\frac{n}{6}(2n^2+9n+13)$; 5. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$; 6. $\frac{n}{3}(4n^2+12n+11)$; 7. $2[1+(n-1)2^n]$; 8. $\frac{\text{Sen} 2nx}{2 \text{Sen} x}$; 9. $\frac{n}{2} + \frac{\text{Cos}(n+1)x \text{Sen}(nx)}{\text{Sen} x}$; 10. $(1-\text{Cos}^{2n} 2x) \text{Cotg}^2 2x$; 11. $\text{Ln}[\frac{36}{(n+4)(n+3)^2}]$; 12. $x[(n+1)!-1]$; 14. 8

15. 550 ; 16. $n=7$; 17. $2^{-3}(2^{24}-1)$; 18. 12 ; 19. 19 ; 20. 874 ; 21. 10
 22. -4 ; 24. $n=6$; 25. $37/28$; 26. 190 ; 27. $a=1/2$, $b=-1/2$, $c=0$; 28. $n=80$
 29. $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$

GRUPO 51. Pag.534

7. $n=7$; 8. $2^{n+1}-2$; 9. $n=4$; 10. $\binom{2n+1}{n+1}$; 11. $\binom{n+1}{k}$; 12. $n=22$; 13. 18
 14. 25 ; 15. $\binom{n+3}{k}$; 16. 53 ; 17. 56 ; 18. 120 ; 19. 36 ; 20. 48 ; 21. 56
 22. 56 ; 23. $n=4$; 24. 392 ; 25. 1,296 ; 26. 18 ; 27. 7 ; 28. 259 ; 29. -4480
 30. $-14/3$; 31. T_{11} ; 32. T_8 ; 33. $495 \times 2^3 \times 3^4$; 34. $-816x^{-33}$ y $-816x^{-31}$; 36.
 $-1/2^{n+1}$; 37. $2^{n+2}-n-3$; 38. $n=6$; 39. 8 ; 40. $-165/4$; 41. $5/9$; 43. Las dos
 son falsas, en b) $n=10$; 44. 4020 y -540 ; 45. $5pq^4+30p^4q^2r+10p^3r^2$; 46.
 $\{(3/2, 1/2)\}$.

GRUPO 52. Pag.543

1. 3,9,19,33,51 ; 2. 1,-3,5,-7,9 ; 3. 1,4,19,364,132499 ; 4. 100,23,21/4,
 13/16,-19/64 ; 5. 3,1,-2,-3,-1 ; 6. $a_n=4n$; 7. $a_n=3n^2-5$; 8. $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$; 9.
 $a_n=4n-2$; 10. $a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)(2n)$; 11. $a_n=(-1)^{n+1}(1/3)^n$; 12. -86 ; 13.
 12,9,6,3,0,-3 o -9,-6,-3,0,3,6 ; 14. $k=1/2$; 15. 4,9,14 o 14,9,4 ; 16. 2,4,
 6,8 ; 17. 579 ; 18. 84 ; 19. $n=11$; 20. a) 13, b) $19n-11$; 21. 9,3,1 o -9,3,
 -1 ; 22. 2,6,18 ; 23. 9 ; 24. 1,5,9 o 10,5,0 ; 25. $r=-2$, $n=11$; 26. 5,10,20
 40 ; 27. 5 días ; 30. $a_n=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+(n-1)a_1-(n-2)a_1$

GRUPO 53. Pag.547

1. Creciente ; 2. No monótona ; 3. Creciente ; 4. No monótona ; 5. Decrecien
 te ; 6. Creciente ; 7. Decreciente ; 8. Creciente ; 9. Decreciente ; 10. Cre
 ciente. 11. Creciente, acotada inferiormente por $1/2$, pero no acotada sup.
 12. Creciente, acotada inferiormente por $4\sqrt{5}/5$ y superiormente por 2
 13. Decreciente, " " " 0 " " " $2/5$
 14. No es monótona, no acotada ni superior ni inferiormente.
 15. Creciente, acotada inferiormente por 0 y superiormente por $\log_2$
 16. Decreciente, " " " 1 " " " 4
 17. Creciente, " " " $1/2$ " " " 1
 18. Decreciente, " " " 0 " " " $1/2$
 19. " " " 0 " " " $(1/3)\log_3$
 20. No monótona " " " $1/3$ " " " $4/9$
 21. No monótona " " " -1 " " " 1

GRUPO 54. Pag.556

1. $k=(3+\epsilon)/\epsilon$; 2. $(12-3\epsilon)/2\epsilon$; 3. $1/\epsilon^2$; 4. $(5-3\epsilon)/4\epsilon$; 5. $(7-6\epsilon)/4\epsilon$; 6. $1/\sqrt{3}\epsilon$; 7. Converge a 2 ; 8. Converge a $3/2$; 9. Converge a $3/2$; 10. Converge a $3/2$; 11. Divergente ; 12. Divergente ; 13. Converge a $-5/2$; 14. Converge a 4 ; 15. Converge a $\sqrt{2}/2$; 16. Converge a $\log 2$; 17. 832 ; 18. $10/3$; 19. 3 ; 20. a) -3, b) 0 ; 22. 3 ; 23. $17/4$; 24. $3/2$; 25. b) $1/3$; 30. $(a^2-1)/a$; 32. 9 ; 33. $p^2/2$; 34. $S_1=n/2n+1$, $S_2=(2^{n+1}-1)/n+1$, $L=1/2$; 35. $100/441$; 36. -1 ; 37. $1/2$ (Ver Ejerc.12, pag.533) ; 38. $1/2$; 39. a) $S_n=-2n/3(2n+3)$, c) $-\frac{1}{3}$

GRUPO 55. Pag.563

1. $1/4$; 2. $1/3$; 3. $1/2$; 4. $5/6$; 5. $15/2$; 6. $-3/2$; 7. $2150/99$; 8. $1/2$; 9. $1/4$; 10. 24 ; 11. $5/2$; 12. $7/2$; 13. $8/33$; 14. $112/999$; 15. $687/1100$; 16. $47/33$; 17. $18607/49950$; 18. $7/22$

GRUPO 56. Pag.580

1. a) $x=3$, $y=2$, b) $x=-2/3$, $y=1/3$, c) $x=-4/11$, $y=5/11$, d) $x=2/5$, $y=-1/5$, e) $x=-13/7$, $y=5/7$, f) $x=1$, $y=-2$, g) $x=2$, $y=-3$; 2. a) $z=(1,-12)$, b) $z=(0,1)$, c) $z=(1,1)$, d) $z=(-1,0)$, e) $z=(-1/2,3/2)$; 3. a) 2, b) $8(1-i)$, c) -1, d) -i ; 5. $\bar{z}_1=(2,-2)$, $z_1^{-1}=(1/4,1/4)$; 6. $2[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)]$; 7. $\text{Im}(z)=-3$; 8. $z_1^{-1}=(-2/17,-9/17)$; 9. 1 ; 10. $z=(17/100,-6/100)$; 11. $(1/16,1/16)$; 12. a) $z=672(-1+i)$, b) $z=i\sqrt{6}$, c) $z=-(3+i)/2$; 13. $x^2+y^2=1$; 14. $2+(1+\sqrt{3})i$, $1+(1-\sqrt{3})i$; 15. a) $(-1,6)$, b) $(-4,8)$; 16. a) $z=1+i$, $w=i$, b) $z=\frac{1}{34}(37,73)$, $w=\frac{2}{17}(8,-15)$, c) $z=2+3i$, $w=1-i$, d) $z=2+i$, $w=1-2i$, e) $z=\pm i\sqrt{2}$, $w=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $t=-1\pm i$, f) $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=2i$, g) $z_1=3+2i$, $z_2=4-i$, h) $z_1=1-i$, $z_2=-1-i$, $z_3=3$, i) $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$, $z_3=-1+i$, j) $z_1=i$, $z_2=2i$, $z_3=2-3i$; 17. 1 ; 19. $S=1$, $S=i$; 20. a) 1, b) -1

GRUPO 57. Pag.588

1. $\sqrt{2}/2$; 2. $\sqrt{2}$; 3. $4i$; 4. VVV ; 5. $VVVF$; 6. $z_1=(1,2)$, $z_2=(3,-1)$; 7. $x=3/4+i$; 8. $z_3=(7+2\sqrt{3},4+3\sqrt{3})$, $z_3=(7-2\sqrt{3},4-3\sqrt{3})$; 9. $(3,2) \circ (3,8)$; 10. $(\frac{7}{8},\frac{7}{8})$; 13. $z=(2,-2)$; 24. a) $w=\pm(1-4i)$, b) $w=\pm(2-i)$, c) $w=\pm(5+6i)$, d) $w=\pm(1+3i)$, e) $w=\pm(3-2i)$, f) $w=\pm(1-3i)$, g) $w=\pm(\sqrt{2-\sqrt{3}},i\sqrt{2+\sqrt{3}})$, h) $w=\pm(4+3i)$, i) $w=\pm(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i)$, j) $w=\pm(\sqrt{3}+2i)$

GRUPO 58. Pag.601

1. a) Eje imaginario para $y \leq 0$, b) Parábola $y^2=4(x+1)$, c) Circunferencia de centro $Q(-1,0)$ y $r=1$, d) Circunferencia de centro $Q(-2,0)$ y $r=2$, e) Circunferencia de centro $Q(2,-1)$, $r=2$, f) Elipse, Focos: $F_1(1,2)$, $F_2(-1,2)$, semi-ejes: $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, g) Mediatriz del segmento z_1z_2 , h) Hipérbola equilátera

- $xy=2$, i) Parábola: $x^2=2y+1$; 2.a) El interior y el borde de la circunferencia de radio 1 y centro $Q(0,1)$, b) El interior de la circunferencia de radio 1 y centro $Q(1,1)$, c) El interior y el borde de la elipse con focos en $F_1(2,0)$ y $F_2(-4,0)$, semiejes: $a=5$ y $b=4$, d) La franja $-1 < y < 0$. e) Interior de rama izquierda de la hipérbola de focos $F_1(2,0)$ y $F_2(-2,0)$, semieje real $a=3/2$. f) Interior de $|z-i|=\sqrt{2}$ y $|z+i|=\sqrt{2}$, excepto la región común. g) El interior y el borde de las dos ramas de la hipérbola de centro $Q(0,0)$ y semiejes: $a=2$ y $b=\sqrt{5}$, focos: $F_1(0,4)$ y $F_2(0,-2)$. h) El interior de las dos ramas de la hipérbola con centro en $Q(1,2)$ y focos en $F_1(-3,5)$ y $F_2(5,-1)$, semiejes: $a=4$, $b=3$. i) El semiplano superior y el borde de la recta $x+4y=-4$
4. En el interior de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r=5$.
5. Parábola: $y^2=4(1-x)$

GRUPO 59. Pag.607

- 1.a) $z=12\text{Cis}30^\circ$, b) $z=6\text{Cis}300^\circ$, c) $z=\text{Cis}150^\circ$, d) $z=10\text{Cis}210^\circ$, e) $z=8\text{Cis}120^\circ$
 f) $z=4\text{Cis}315^\circ$; 2. $2(1+i\sqrt{3})$; 3.a) $-1-i$, b) $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, c) $\frac{1}{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$, d) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$; 5.a) $z=\sqrt{2}-\sqrt{3}\text{Cis}75^\circ$, b) $z=|\text{Cosec}\theta|\text{Cis}(270^\circ-\theta)$; 6. $672\sqrt{2}\text{Cis}(3\pi/4)$
8. $i\text{Cosec}\theta$

GRUPO 60. Pag.610

- 1.a) $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$, b) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, c) $2^*(1-i\sqrt{3})$, d) $(2-\sqrt{3})^{12}+0i$, e) $0-2^{12}i$, f) 1
 g) $-64+0i$, h) $0+64i$, i) $-1+0i$; 2.a) $-\sqrt{3}+i$, b) $-1+0i$, c) $1-i\sqrt{3}$; 3. -2^{12} ;
 4. $\text{Cis}(n\pi/3)$; 5. $-\text{Cos}6x+i\text{Sen}6x$; 6.a) $\frac{1}{8}(\text{Cos}4x-4\text{Cos}2x+3)$, b) $\frac{1}{32}(\text{Cos}6x+$
 $6\text{Cos}4x+15\text{Cos}2x+10)$, c) $\frac{1}{64}(-\text{Sen}7x+7\text{Sen}5x-21\text{Sen}3x+35\text{Sen}x)$, d) $\frac{1}{64}(\text{Cos}7x+7\text{Cos}5x$
 $+21\text{Cos}3x+35\text{Cos}x)$; 7.a) $\text{Cos}^4x-10\text{Cos}^2x\text{Sen}^2x+5\text{Cos}x\text{Sen}^3x$, b) $\text{Cos}^4x-28\text{Cos}^2x\text{Sen}^2x$
 $+70\text{Cos}^2x\text{Sen}^2x-28\text{Cos}^2x\text{Sen}^4x+\text{Sen}^4x$, c) $7\text{Cos}^4x\text{Sen}x-35\text{Cos}^2x\text{Sen}^3x+21\text{Cos}^2x\text{Sen}^3x-$
 Sen^7x ; 9. $\theta=k\pi$ o $\theta=k\pi-\pi/2$; 10. $\{(0,0), \frac{1}{64}(1,\sqrt{3})\}$; 11.a) $\frac{1}{32}(-1+i\sqrt{3})$, b) $\frac{-a^*}{\text{Sen}^2a}$
 c) $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i)$

GRUPO 61. Pag.615

- 1.a) $\pm(\sqrt{3}+i), \pm(-1+i\sqrt{3})$, b) $2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$, c) $2\text{Cis}(\frac{5\pi+6k\pi}{15})$, $k=0,1,2,3,4$.
 2.a) $(1/\sqrt{2})\text{Cis}(\frac{5\pi+6k\pi}{15})$, $k=0,1,2,3,4,5$; b) $(1/\sqrt{2})\text{Cis}(\frac{19\pi+24k\pi}{96})$, $k\in[0,7]$
 c) $(1/\sqrt{2})\text{Cis}(\frac{17\pi+24k\pi}{96})$, $k\in[0,5]$; 3.a) 0, b) 0; 5.a) $\{2+3i, -3+2i\}$, b)
 $\{1+i, 2+i\}$, c) $\{0, 1+i, 1+i\}$, d) $\{-1+i, -3-4i\}$; 6.a) $\pm(1+i\sqrt{3}), \pm(-\sqrt{3}+i)$, b)
 $w_k = 2\text{Cis}(\frac{240+2k\pi}{3})$, $k=0,1,2$, c) 1, -2, $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i)$, $1\pm i\sqrt{3}$, d) $w_k =$
 $\sqrt{12}\text{Cis}(\frac{240+2k\pi}{3})$, $k=0,1,2$; e) $\pm(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}), \pm(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}})$; f) $(1\pm i\sqrt{3}), (-1\pm i\sqrt{3})$

- g) $\pm(\sqrt{\frac{13+2}{2}}, -\sqrt{\frac{13-2}{2}})$; $\pm(\sqrt{\frac{2+1}{2}}, \sqrt{\frac{2-1}{2}})$; h) $1, -1/3, -\frac{1}{5}(1 \pm 2i)$; i)
 $w_k = \sqrt{6} \text{Cis}(\frac{k\pi}{2})$ o $w_k = \text{Cis}(\frac{\pi+2k\pi}{4})$, $k=0,1,2,3$; j) $w_k = 2[\text{Cis}(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{4})] - 3$, $k=0,1,2,3$; 8.a) Si $\omega=1 \rightarrow S = \frac{n}{2}(n+1)$, si $\omega \neq 1 \rightarrow S = \frac{n}{\omega-1}$
 b) Si $\omega=1 \rightarrow S = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$, si $\omega \neq 1 \rightarrow S = \frac{n^2\omega^2 - 2n(n+1)\omega + n(n+2)}{(\omega-1)^3}$

GRUPO 62. Pag.632

1. $z = \frac{99}{4}(e^{i5\pi/3})$; 2. $z = 2^{-1}(-1+i\sqrt{3})$; 3. $\frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$; 4. $16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1$; 5.a) $w_0 = \text{Cis} 70^\circ$, $w_1 = \text{Cis} 190^\circ$, $w_2 = \text{Cis} 310^\circ$, b) $w_1 = i$, $w_2 = \frac{3}{2} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$, $w_3 = -\frac{3}{2} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})i$, c) $w_0 = 2\text{Cis} 100^\circ$, $w_1 = 2\text{Cis} 220^\circ$, $w_2 = 2\text{Cis} 340^\circ$, d) $z_1 = \frac{1}{2}(1-i)$, $z_2 = \frac{1}{2}(1+i)$; 6. $^1\sqrt{2}, -2.^1\sqrt{2}, ^1\sqrt{2}$; 11. $-\sqrt{5}/5$; 13.a) V, b) V; 14. -2^{13} ; 17. $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}\text{Cotg}(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n})$, $\text{Im}(z) = -1/2$; 18. $\frac{2\cos nx}{\cos^n x}$; 20. -2; 21.b 32
 23. $\frac{2^n}{3^{(n-1)/2}} \text{Sen}(n\pi/6)$; 27. $\frac{\cos[a + (\frac{n-1}{2})x] \text{Sen}(-\frac{nx}{2})}{\cos(x/2)}$, si n es par
 $\frac{\text{Sen}[a + (\frac{n-1}{2})x] \cos(\frac{nx}{2})}{\cos(x/2)}$, si n es impar; 28. $2^n \cos^n(\frac{x}{2}) \text{Sen}(\frac{n+2}{2})x$
 29.a) $2^n \text{Sen}^n(\frac{x}{2}) \cos[\frac{n\pi - (n+2)x}{2}]$, b) $2^n \text{Sen}^n(\frac{x}{2}) \text{Sen}[\frac{(n+2)x - n\pi}{2}]$; 30. $\frac{n}{2} - \frac{\text{Sen} 4nx}{4\text{Sen} 2x}$
 34. $\frac{\text{Sen}(\frac{n+1}{2})x \cos(\frac{nx}{2})}{\cos x/2}$, n impar; $-\frac{\cos(\frac{n+1}{2})x \text{Sen}(\frac{nx}{2})}{\cos x/2}$, n par
 37. $S = \text{Tg}^n x \cos(\frac{3\pi n}{2})$; 38. $\text{Sen}(\frac{nx}{2-n})$; 39. $-1/2$; 41. 0, $\frac{\omega-1}{\omega+1}$, $\frac{\omega^2-1}{\omega^2+1}$, $\frac{\omega^3-1}{\omega^3+1}$,
 $\frac{\omega^4-1}{\omega^4+1}$, $\omega = e^{2\pi i/5}$; 42. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Sen}(n-k)\theta = 2^n \text{Sen}^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos n(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$; 43. 0
 44. $2^{11} \cdot \sqrt{3}$; 46. $P(z) = \frac{\text{Sen}(\frac{n+1}{2})\theta}{\cos(\theta/2)} \text{Cis}(\frac{\pi+n}{2})$; 47.a) $2^n \text{Sen}^n(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{n\theta}{2})$, n par
 $2^n \text{Sen}^n(\frac{\theta}{2}) \text{Sen}(\frac{n\theta}{2})$, n impar; b) $-2^n \text{Sen}^n(\frac{\theta}{2}) \text{Sen}(\frac{n\theta}{2})$, n par; $2^n \text{Sen}^n(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{n\theta}{2})$,
 n impar; 50. $\frac{\text{Sen}^2 nx}{\cos x/2}$, n par; $\frac{\cos^2 nx}{\cos x/2}$, n impar; 51. $\frac{1}{4}[3\text{Cotg}(\frac{1}{2}) - \text{Cotg}(\frac{3}{2})]$

GRUPO 63. Pag.642

- 1.a) $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$, b) $x^4 - x^3 - 4x^3 + 3x + 1$; 2.a) $Q(x) = 2x^2 + 3x + 11$,
 $R(x) = 25x - 5$, b) $Q(x) = \frac{1}{9}(3x - 7)$, $R(x) = \frac{2}{9}(13x + 1)$; 3. $p = -q^2 - 1$, $m = q$; 5. $a = 4$,

b=2 ; 6.a) $\pm(x^3-6x^2+12x-8)$, b) $\pm(4x^3-5x^2+3x-2)$; 7. a=c, $b=a^2/4+2$; 8. $m=\pm 6$
 $n=13$ o $n=5$.

GRUPO 64. Pag.653

1.a) $Q(x)=x^3-x^2+3x-3$, $R=5$; b) $Q(x)=2x^2+2x-2$, $R=5$; c) $Q(z)=4z^2-(3+4i)z-1+7i$
 $R=8-6i$; d) $Q(z)=z^2-2iz-5-2i$, $R=-9+8i$; 2.a) 10, b) $-1-44i$, c) $2x-5$, d)
 $1-3x$; 3. 22 ; 4. 21 ; 5. 2 ; 6. -15 ; 7. b=2, c=-9, d=-18 ; 8. m=8, n=5,
 $p=-6$; 9. a=-2, b=6 ; 10. 215 ; 11. k=-2 ; 12. $k^3(k-1)$; 13. a=3, b=-4 ; 14
 -10 ; 15. $P(z)=z^3-\frac{9}{4}z^2-\frac{19}{4}z+\frac{15}{2}$; 16. A=3, B=4 ; 17. A=n, B=-n-1 ; 18. $5x+15$
 19. $\frac{3}{8}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{33}{8}x-\frac{27}{4}$; 20. Cuando m,n y p son simultáneamente pares o
 impares. 21. Si m no es divisible por 3 ; 22. Para $m=6n+2$ y $m=6n+4$; 23. Sólo
 lo para $m=6n+1$; 24. Sólo para $m=6n+4$; 26. $n>2$, $a=n/n-2$; 27. $p=24$, $q=-20$

GRUPO 65. Pag.660

1. $2+i$, 1, 1 ; 2. $-2-\sqrt{5}i$, $1\pm i\sqrt{3}$; 3. $1+\sqrt{3}$, -2, 3 ; 4. $-3-\sqrt{2}$, $1/2$, $-1/3$; 5.
 $x^4-4x^3+5x^2-2x-12=0$; 6. $x^4-4x^3+24x^2-16x+80=0$; 7. $x^4-3x^3-9x^2+25x-6=0$; 8.
 $2x^3+11x^2+6x^3-42x^2-52x+35=0$; 9. $x^6-9x^3+32x^3-54x^3+37x^2+3x-10=0$; 10. x^7-7x^6+
 $6x^5+22x^4-56x^3+48x^2+112=0$

GRUPO 66. Pag.672

1. $\{-1/2, 1/3, 1, \pm i\}$; 2. $\{-3, 1, 2, 2, \pm i\sqrt{3}\}$; 3. $\{-3, 1/2, 3\pm i\sqrt{2}\}$; 4. $\{1/3, 1/2,$
 $3/2, \frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})\}$; 5. $\{1, 5, \pm \frac{1}{2}i\}$; 6. $\{1, 2, \pm i\sqrt{2}\}$; 7. $\{0, -2, 1/3, \pm i\}$; 8. $\{-2, -2,$
 $2, 1/2\}$; 9. $\{-5, -1/3, 2/3, 3\}$; 10. $\{1/2, 1/2, 3, \pm i\}$; 11. $\{1\pm i, 1/3, 2, 1\pm i\sqrt{2}\}$;
 12. $\{-2\pm i, -1/2, 2/3, 1\pm i\sqrt{3}\}$; 13. $\{1/3, \frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3}), 1\pm i\sqrt{3}\}$; 14. $P(x)=(3x+1)(2x+1)$
 $(2x-1)(x+3i)(x-3i)$; 17.c) $x\in(-2, 1)$, d) $\{-3/2, 1/2, 2/3, \pm i\sqrt{2}\}$; 18.c) $-1<x<4$
 d) $\{-1/2, 1/2, 5/3, 2\}$; 19.c) $x\in(0, 8)$, d) $\{3/2, 9/4, 5, \frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})\}$; 20.c) $-1<x<4$
 d) $\{-1/3, 1/2, 2, \frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})\}$; 21.c) $x\in(0, 4)$, d) $\{1/4, 1/3, 1/2, 1/2(-1\pm i\sqrt{7})\}$;
 22.c) $x\in(-6, 4)$, d) $\{-4, -3, 2, 1\pm i\sqrt{2}\}$; 23.c) $x\in(-1, 2)$, d) $\{-2/3, 1/2, 1, 3/2, \pm i\}$
 24.c) $x\in(-2, 1)$, d) $\{-3/2, -1, 1/3, 1\pm i\sqrt{3}\}$; 25.c) $-3<x<3$, d) $\{-5/2, -1/2, 2, 5/2\}$

GRUPO 67. Pag.680

1. $\{-3/2, -2, 4\}$; 2. $\{-1, 1, 3, 5\}$; 3. $k=26$, $\{2, 3, 4\}$; 6. $\{8/9, -2/3, 1/2\}$; 7.a
 $(q^2-2pr)/r^2$, b) $(p^2-2q)/r^2$; 8. $E=2q^2$; 9. $E=157/36$, $S=3/2$; 10.a) $-6p$
 b) p/q , c) $-p^3$, d) q^4 , e) -3 , f) $-2p^3-3q^2$; 12. $\{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, -2\pm i\sqrt{11}\}$
 13. $\{-2, -2, -4\}$ y $\{-2, 1, 3\}$; 14.a) $m=-3$, $M=8$, b) 2 y 4, c) 7 y 12, d) -14
 15.a) $205/16$, b) $\{1/4, 1/2, 1, 2\}$; 16.a) $x^3-37x^2-121x-99=0$, b) x^3+4x^2+28x+
 $216=0$; 17. $r=10$ o $m=10/19$



BIBLIOGRAFIA

- 1.- **MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO**
Louis Leithol - Editorial Harla
- 2.- **ÁLGEBRA SUPERIOR**
Louis Leithol - Compañía Editorial Continental
- 3.- **EL CÁLCULO**
Louis Leithol - Editorial Oxford University Press
- 4.- **MATEMÁTICA BÁSICA** con vectores y matrices
H.R. Taylor - T.L. Wade - Editorial Limusa - Wiley
- 5.- **CONJUNTOS Y ESTRUCTURAS**
Alvaro Pinzón - Colección Harper
- 6.- **MÉTODO DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA**
I. Sominski - Editorial Mir - Moscú
- 7.- **PROBLEMAS DE ÁLGEBRA SUPERIOR**
I. Sominski - Editorial Mir - Moscú
- 8.- **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA**
J. M. Silva - A. Lazo - Editorial Limusa

1955

PEDIDOS A PROVINCIAS

Depositar a la Cta. de Ahorros del Bco. de Crédito
N° 193-03122265-0-02

Ricardo Figueroa García

INFORMES

Ediciones



Jr. Loreto 1696 - Breña (Alt. cdra. 9 y 10 de la Av. Brasil)

E-mail: ediciones_2@hotmail.com

Telefax 423-8469

Lima - Perú

Otras obras del Autor

